数理解析研究所講究録
第 1809 巻 2012 年 188-197

安定的捻れ理論の一般化

函館工業高等専門学校・一般科目理数系 竹花靖彦 (Yasuhiko Takehana)
General Education Hakodate National College of Technology

ここでは R は単位元を持つ結合的環とする. Mod-R で右 R-加群全体を表し, 特に断らない限り加群はユニタリーな R-加群を表すことにする. Mod-R の恒等関手の部分関手を弱根基という. $\mathcal{T}$ が移入包絡で閉じているとき捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は安定的であるという. $E(M)$ を加群 M の移入包絡とする. 弱根基 σ に対し,$E_\sigma(M)$ を $E_\sigma(M)/M := \sigma(E(M)/M)$ で定義し加群 M の σ-移入包絡と呼ぶ.$\mathcal{T}$ が σ-移入包絡で閉じているとき捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は σ-安定的であると定義する. ここでは σ が冪等根基のとき σ-安定的捻れ理論を特徴付し関連する結果を調べる.

1. 捻れ理論の基本的事柄

弱根基 σ に対し任意の加群 M とその部分加群 N について $M \supseteq \sigma(M)$ であり $\sigma(M/N) \supseteq (\sigma(M)+N)/N$ が成り立つ. 弱根基 σ に対して $\mathcal{T}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R | \sigma(M) = M\}$ で定義しその元を σ-捻れ元といい $\mathcal{F}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R | \sigma(M) = 0\}$ で定義してその元を σ-捻れ自由元という. $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ が $C \in \mathcal{T}_\sigma$ である短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ の完全性を保つとき加群 M は σ-入射的であると言う. 任意の加群 M に対しいつでも $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ であるとき弱根基 σ は冪等であるという. 任意の加群 M に対しいつでも $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ であるとき弱根基 σ は根基であるという. 任意の加群 M とその部分加群 N に対し $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$ が成り立つ時に弱根基 σ は左完全であるという. 左完全な弱根基は冪等であることが知られている.

$\mathcal{C} \subset$Mod-R とする. $\mathcal{C}$ に関する捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ とは $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}, \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ であって次の条件 (i)(ii)(iii) を満たすものである.(i) 任意の $T \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}$ に対し, いつでも $\mathrm{Hom}_R(T, F) = 0$ が成り立つ.(ii) 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対し $\mathrm{Hom}_R(M, F) = 0$ であるなら $M \in \mathcal{T}$ が成り立つ.(iii) 任意の $T \in \mathcal{T}$ に対し $\mathrm{Hom}_R(T, N) = 0$ であるなら $N \in \mathcal{F}$ が成り立つ. $t(M) = \sum_{\mathcal{T} \ni N \subset M} N \ (= \bigcap_{M/N \in \mathcal{F}} N)$ とすると $\mathcal{T} = \mathcal{T}_t$ 及び $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$ が成り立ち, さらに t が冪等根基になる. 逆に t が冪等根基であるならば $(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ は捻れ理論になる.

非零部分加群と常に非零共通部分加群を持つ部分加群を大部分加群という. 加群 M とその部分加群 N に対し $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ のとき N を M の σ-稠密な部分加群という. 大部分加群であり σ-稠密な部分加群を σ-大部分加群であるという. また N が M の σ-大部分加群のとき M を N の σ-大な拡大であるという. 加群 M に対し M を大加群として含む入射加群を移入包絡といい $E(M)$ で表す. $E(M)$ は存在し同型を除いて一意的に決定する. Eckman & Shopf により $E(M)$ は M を大加群として含むものの中で極大であり, また $E(M)$ は M を含む入射加群の中で極小である.

2. Eckman & Shopf's Theorem の一般化

$E_\sigma(M)$ は $E_\sigma(M)/M := \sigma(E(M)/M)$ で定義される. σ は根基であるから $E(M)/E_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ である. 従って任意の加群 M に対し $E_\sigma(M)$ は σ-入射的であることがわかる.σ は羃等であるから M は $E_\sigma(M)$ の σ-大部分加群である.$E_\sigma(M)$ は M の σ-移入包絡と呼ばれる.σ-安定的捻れ理論を述べる前に Eckman & Shopf の定理が拡張されることを述べておく.

補題 1. 加群 N は加群 M の σ-大部分加群とする. そのとき $E_\sigma(M) = E_\sigma(N)$ が成り立つ. σ は左完全なら逆が成り立つ.

証明 加群 N は加群 M の σ-大部分加群とする. 次の短完全列を考える. $0 \to M/N \to E_\sigma(M)/N \to E_\sigma(M)/M \to 0$.$\mathcal{T}_\sigma$ は拡大で閉じているから $E_\sigma(M)/N \in \mathcal{T}_\sigma$ である. $\mathcal{T}_\sigma$ は剰余加群を取ることで閉じているから $E_\sigma(M)/E_\sigma(N) \in \mathcal{T}_\sigma$ である. かくして $E_\sigma(M)$ のある部分加群 K があって $E_\sigma(M) = E_\sigma(N) \oplus K$ となる. N は M の大部分加群であり M は $E_\sigma(M)$ の大部分加群であるから N は $E_\sigma(M)$ の大部分加群である.$E_\sigma(N) \cap K = 0$ であるから $N \cap K = 0$ で従って $K = 0$ が従う. よって $E_\sigma(M) = E_\sigma(N)$ が成り立つ.

逆に σ は左完全で $E_\sigma(M) = E_\sigma(N)$ であるとすると $M/N \hookrightarrow E_\sigma(M)/N = E_\sigma(N)/N \in \mathcal{T}_\sigma \cap \mathcal{T}_Z$ であるから N は M の σ-大部分加群である.(ここで加群 M に対し $Z(M)$ は $\{m \in M | (0:m)$ は R の大部分加群 $\}$ を表す.)

補題 2. σ-入射的加群 M に対し $E_\sigma(M) = M$ が成り立つ.

証明 短完全列 $0 \to M \to E_\sigma(M) \to \sigma(E(M)/M) \to 0$ は分裂し M は $E_\sigma(M)$ の大部分加群であるから明らかである.

次は Eckman & Shopf's Theorem の拡張である.

定理 2. 加群 M は加群 E の部分加群とする. 次の条件を考える.

(1)E は σ-入射的で M を σ-大部分加群として含む.

(2)E は $\{Y | Y \supseteq M$ で Y は σ-入射的である $\}$ の中で極小な元である.

(3)E は $\{Y | Y \supseteq M$ で M は Y の σ-大部分加群である $\}$ の中で極大な元である.

(4)E は $E_\sigma(M)$ と同型である.

そのとき (1)→(2) と (4)↔(1)↔(3) が成り立つ. σ が左完全なら全て同値である.

証明.(1)→(2):I は σ-入射的加群で $M \subseteq I \subseteq E$ とする. $\mathcal{T}_\sigma \ni E/M \twoheadrightarrow E/I$ であるから $E/I \in \mathcal{T}_\sigma$ である. よって短完全列 $0 \to I \to E \to E/I \to 0$ は分裂する. よって E の部分加群 X があって $E = I \oplus X$ となる. $0 = I \cap X \supseteq M \cap X$ であり, M は E の大部分加群であるから $X = 0$ となり従って $E = I$ が得られる.

(2)→(1):ここでは σ は左完全とする. 仮定より E は σ-入射的である. よって補題 2 より $E_\sigma(E) = E$ が従う. M は E の σ-大部分加群でないとする. 補

題1より $E=E_\sigma(E)\supsetneq E_\sigma(M)\supseteq M$ が従う．E と $E_\sigma(M)$ は σ-入射的であるから E の極小性に矛盾する．従って M は E の σ-大部分加群である．

(1)→(3):E は σ-入射的で M は E の σ-大部分加群とする．そのとき補題1,2から $E_\sigma(E)=E$ と $E_\sigma(E)=E_\sigma(M)$ が成立する．従って $E=E_\sigma(M)$ が成立する．$I\supseteq E$ であり，M は I の σ-大部分加群であるとする．その時 $E_\sigma(I)=E_\sigma(M)=E$ である．よって $E=E_\sigma(I)$ となる．$E_\sigma(I)\supseteq I$ であるから $E\supseteq I$ となる．よって $E=I$ となる．

(3)→(1):仮定より E は M を σ-大部分加群として含む．よって補題1より $E_\sigma(M)=E_\sigma(E)$ である．よって M は $E_\sigma(E)$ の σ-大部分加群である．$E_\sigma(E)\supseteq E$ であるから仮定より $E_\sigma(E)=E$ が従い補題2より E は σ-入射的である．

(1)→(4):E_1 と E_2 は σ-入射的な $E(M)$ の部分加群で M を σ-大部分加群として含むとする．次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & M & \overset{i}{\hookrightarrow} & E_1 \\ & & \downarrow 1_M & & \downarrow f \\ 0 & \to & M & \underset{j}{\hookrightarrow} & E_2 \end{array}$$

$0=\ker f|_M=\ker f\cap M$ であるから $\ker f=0$ が従い f は単型になる．$\mathcal{T}_\sigma\ni E_2/j(M)\twoheadrightarrow E_2/f(E_1)$ であり $f(E_1)$ は σ-入射的であるから，次の短完全列は分裂する．$0\to f(E_1)\to E_2\to E_2/f(E_1)\to 0$. かくして E_2 の部分加群 L があって $E_2=f(E_1)\oplus L$ となる．$f(E_1)\supseteq f(i(M))$ であり $f(i(M))=j(M)$ は E_2 の大部分加群で $f(E_1)\cap L=0$ であるから $L=0$ が従う．よって $E_2=f(E_1)$ となる．かくして f は全型であり $E_2\simeq E_1$ が従う．

$E_\sigma(M)$ は σ-入射的な $E(M)$ の部分加群で M を σ-大部分加群として含むから，M を σ-大部分加群として含む σ-入射的加群 E は $E_\sigma(M)$ に同型である．

(4)→(1):明らかである．

3. 安定的捻れ理論の拡張

σ は冪等根基とする．$\mathcal{T}_t$ が移入包絡で閉じているとき弱根基 t が安定的であると言われる．$\mathcal{T}_t$ が σ-移入包絡で閉じているとき弱根基 t は σ-安定的であると定義する．

定理 **3.**t は冪等弱根基のとき次の条件は同値である．

(1) t は σ-安定的である．

(2) 任意の σ-移入加群 E に対し $t(E)$ もまた σ-入射的加群になる．

(3) 任意加群 M に対し $E_\sigma(t(M))\subseteq t(E_\sigma(M))$ が成り立つ．

証明．(1)→(3): 任意の加群 M に対し $t(M)\in\mathcal{T}_t$ である．仮定より $E_\sigma(t(M))\in\mathcal{T}_t$ となる．$E_\sigma(t(M))\subseteq E_\sigma(M)$ であるから $E_\sigma(t(M))=t(E_\sigma(t(M)))\subseteq t(E_\sigma(M))$ が従う．

(3)→(2): X は σ-入射的加群とする．そのとき補題2より $E_\sigma(X)=X$ となる．仮定より $E_\sigma(t(X))\subseteq t(E_\sigma(X))=t(X)$ が従う．$E_\sigma(t(X))\supseteq t(X)$ であるから $E_\sigma(t(X))=t(X)$ が従う．よって補題2より $t(X)$ は σ-入射的である．

(2)→(1): $M \in \mathcal{T}_t$ とする. 仮定より $t(E_\sigma(M))$ は σ-入射的である.$t(E_\sigma(M)) \supseteq t(M) = M$ であるから $E_\sigma(M)/M \twoheadrightarrow E_\sigma(M)/t(E_\sigma(M))$ である. 従って $E_\sigma(M)/t(E_\sigma(M)) \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ. よって短完全列 $(0 \to t(E_\sigma(M)) \to E_\sigma(M) \to E_\sigma(M)/t(E_\sigma(M)) \to 0)$ は分裂する. よってある部分加群 K が $E_\sigma(M)$ にあって $E_\sigma(M) = t(E_\sigma(M)) \oplus K$ となる.$0 = K \cap t(E_\sigma(M)) \supseteq K \cap M$ であり M は $E_\sigma(M)$ の大部分加群であるから $K = 0$ となり, $E_\sigma(M) = t(E_\sigma(M))$ が成り立つ.

遺伝的捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ とは $\mathcal{T}$ が部分加群で閉じているときに言う. $\mathcal{T}$ が部分加群で閉じていることと $\mathcal{F}$ が移入包絡で閉じていることは同値であることは良く知られている. P.Gabriel は遺伝的捻れ理論を仮定して安定的捻れ理論の様々な性質を調べた (参照 [3] 又は [12, p152]).[14] において著者は遺伝的捻れ理論を拡張した. ここではこの拡張した遺伝的捻れ理論を仮定して安定的捻れ理論の拡張を行う. まず最初に左完全弱根基を拡張する. 加群 M の σ-稠密部分加群 N に対しいつでも $t(N) = N \cap t(M)$ が成り立つとき弱根基 t を σ-左完全であると定義する.

命題 4. σ は左完全冪等根基で t は冪等根基のとき次は同値である.

(1) t は σ-左完全である.

(2)$\mathcal{T}_t$ は σ-稠密部分加群で閉じている.

(3)$\mathcal{F}_t$ は σ-移入包絡で閉じている.

補題 5. σ は左完全冪等根基で $L \subseteq M$ のとき次は同値である.

(1)$L = E_\sigma(L) \cap M$.

(2)$L \subseteq X \subseteq M$ で L は X の σ-大部分加群なら $L = X$ が成り立つ.

$\mathcal{X}_t(M) := \{X | M/X \in \mathcal{T}_t\}$ で $N \cap \mathcal{X}_t(M) := \{N \cap X | X \in \mathcal{X}_t(M)\}$ と定義する. 次の定理 6 は [12, Proposition 7.1] と [2,Theorem 2.8(1)(2)] を一般化する.

定理 6. σ は左完全冪等根基で t は σ-左完全な冪等根基の時次は (6) を除いて同値である. さらに t が左完全なら全ては同値である.

(1) t は σ-安定的である.

(2) σ-入射的加群の t-捻れ部分加群は σ-入射的である.

(3) 任意の加群 M に対し $E_\sigma(t(M)) \subseteq t(E_\sigma(M))$ が成り立つ.

(4) $\mathcal{T}_t$ は σ-大な拡大で閉じている.

(5) N は M の σ-稠密な部分加群のとき $N \cap \mathcal{X}_t(M) = \mathcal{X}_t(N)$ が成り立つ.

(6) $M \notin \mathcal{T}_t$ であり $M/t(M) \in \mathcal{T}_\sigma$ である加群 M は $0 \neq N \in \mathcal{F}_t$ である部分加群 N を持つ.

(7) 任意の部分加群 M に対し $t(M) = E_\sigma(t(M)) \cap M$ が成り立つ.

(8) 任意の加群 M に対して $t(M)$ は M の中に σ-大な拡大を持たない.

(9) σ-入射加群 E の部分加群 $t(E)$ は $E/t(E) \in \mathcal{T}_\sigma$ であるなら E の直和因子になる.

(10) 任意の加群 M について $E_\sigma(t(M)) = t(E_\sigma(M))$ が成り立つ.

証明.(1)→(3)→(2)→(1) は定理 3 で既に示した.

(1)→(4): $M \in \mathcal{T}_t$ で加群 X の σ-大な部分加群とする. 仮定により $E_\sigma(M) \in \mathcal{T}_t$ が従う. 補題 1 より $E_\sigma(M) = E_\sigma(X)$ が従う. よって $E_\sigma(X) \in \mathcal{T}_t$ が成り立つ.X は $E_\sigma(X)$ の σ-稠密な部分加群であるから $X \in \mathcal{T}_t$ が成り立つ.

(4)→(1): 明らかである.

(3)→(7): t は σ-左完全であるから仮定により次が成り立つ.$t(M) \subseteq M \cap E_\sigma(t(M)) \subseteq M \cap t(E_\sigma(M)) = t(M)$. よって $t(M) = M \cap E_\sigma(t(M))$ が得られる.

(7)→(9): E は σ-入射的で $E/t(E) \in \mathcal{T}_\sigma$ とする. そのとき $t(E) = E_\sigma(t(E)) \cap E$ と $E_\sigma(t(E)) \subseteq E_\sigma(E) = E$ が成り立つ. それで $t(E) = E_\sigma(t(E))$ が成り立ち補題 2 より $t(E)$ は σ-入射的になる. よって短完全列 $(0 \to t(E) \to E \to E/t(E) \to 0)$ は分裂するから $t(E)$ は E の直和因子になる.

(9)→(1): $M \in \mathcal{T}_t$ とする. そのとき $M = t(M) \subseteq t(E_\sigma(M))$ が成り立つ. 従って $E_\sigma(M)/t(E_\sigma(M))$ は $E_\sigma(M)/M \in \mathcal{T}_\sigma$ の全型像である. 仮定により $K \subseteq E_\sigma(M)$ で $E_\sigma(M) = K \oplus t(E_\sigma(M))$ となる K が存在する. よって $0 = K \cap t(E_\sigma(M)) \supseteq K \cap M$ であるから $K = 0$ が得られ $E_\sigma(M) = t(E_\sigma(M)) \in \mathcal{T}_t$ が成立する.

(10)→(2): 明らかである.

(3)→(10): ここでは σ の左完全性と t の σ-左完全性を仮定する. まず最初に $t(M)$ は $t(E_\sigma(M))$ の σ-大な部分加群を示す. $L \subseteq t(E_\sigma(M))$ で $L \cap t(M) = 0$ とする. そのとき $0 = L \cap t(M) = L \cap M \cap t(E_\sigma(M)) = L \cap M$ が成り立つ. M は $E_\sigma(M)$ の大部分加群であるから $L = 0$ となる. よって $t(M)$ は $t(E_\sigma(M))$ の大部分加群である. $t(E_\sigma(M))/t(M) = t(E_\sigma(M))/(M \cap t(E_\sigma(M))) \simeq (M + t(E_\sigma(M)))/M \subseteq E_\sigma(M)/M \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つから $t(M)$ は $t(E_\sigma(M))$ の σ-稠密な部分加群である. よって $t(M)$ は $t(E_\sigma(M))$ の σ-大な部分加群である. よって補題 1 より $E_\sigma(t(M)) = E_\sigma(t(E_\sigma(M))) \supseteq t(E_\sigma(M))$ が成り立つ. 仮定により $E_\sigma(t(M)) \subseteq t(E_\sigma(M))$ であるから $E_\sigma(t(M)) = t(E_\sigma(M))$ が成立する.

(4)→(5): ここでは $\mathcal{T}_t$ が σ-稠密な部分加群で閉じていることを仮定する. N は σ-稠密な M の部分加群とする. まず最初に $N \cap \mathcal{X}_t(M) \supseteq \mathcal{X}_t(N)$ を示す. $N_0 \in \mathcal{X}_t(N)$ とすると定義により $N/N_0 \in \mathcal{T}_t$ となる. $\Gamma := \{M_i/N_0 \subseteq M/N_0 | (M_i/N_0) \cap (N/N_0) = 0\}$ とする. Zorn の補題により M/N_0 において N/N_0 の補部分群 M_0/N_0(Γ の極大元) を持つ. このとき $M_0 \cap N = N_0$ が成り立つ. よって $(M_0/N_0) \oplus (N/N_0)$ は M/N_0 の大部分加群である. 従って $[(M_0/N_0) \oplus (N/N_0)]/[M_0/N_0]$ は $[M/N_0]/[M_0/N_0]$ の大部分加群である. 従って $(M_0 + N)/M_0$ は M/M_0 の大部分加群である. $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $M/(M_0 + N) \in \mathcal{T}_\sigma$ である. よって $(M_0 + N)/M_0$ は M/M_0 の σ-大部分加群である. また $\mathcal{T}_t \ni N/N_0 = N/(M_0 \cap N) \simeq (N + M_0)/M_0$ であるから仮定により $M/M_0 \in \mathcal{T}_t$ が成立する.$M_0 \cap N = N_0$ であるから $N \cap \mathcal{X}_t(M) \supseteq \mathcal{X}_t(N)$

が成り立つ.

次に $N \cap \mathcal{X}_t(M) \subseteq \mathcal{X}_t(N)$ を示す. $M_1 \in \mathcal{X}_t(M)$ とする. そのとき $M/M_1 \in \mathcal{T}_t$ になる. $N/(N \cap M_1) \simeq (N+M_1)/M_1 \subseteq M/M_1 \in \mathcal{T}_t$ であり $\mathcal{T}_\sigma \ni M/N \twoheadrightarrow M/(N+M_1)$ であるから仮定より $N/(N \cap M_1) \in \mathcal{T}_t$ が従う. よって $N \cap M_1 \in \mathcal{X}_t(N)$ が言える.

(5)→(1): $M \in \mathcal{T}_t$ とする. $E_\sigma(M)/M \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $M \in \mathcal{T}_t$ に対し $\mathcal{X}_t(E_\sigma(M)) \cap M = \mathcal{X}_t(M) \ni 0$ が成立する. かくして部分加群 X が $E_\sigma(M)$ に存在し $E_\sigma(M)/X \in \mathcal{T}_t$ で $X \cap M = 0$ となる. M は essential in $E_\sigma(M)$ の大部分加群であるから $X = 0$ となり $E_\sigma(M) \in \mathcal{T}_t$ が得られる.

(1)→(6): $M \notin \mathcal{T}_t$ であり $M/t(M) \in \mathcal{T}_\sigma$ である加群 M を取る.$M \supseteq N \neq 0$ のとき $N \notin F_t$ とする.$0 \neq t(N) \subseteq N \cap t(M)$ であるから $N \cap t(M) \neq 0$ である. よって $t(M)$ は M の大部分加群である. よって $t(M)$ は M の σ-大部分加群である. 補題 1 より $E_\sigma(t(M)) = E_\sigma(M)$ が成立する.$t(M) \in \mathcal{T}_t$ であるから仮定より $E_\sigma(t(M)) \in \mathcal{T}_t$ が成り立つ. よって $E_\sigma(M) \in \mathcal{T}_t$ が導かれる. そのとき $t(M) = M \cap t(E_\sigma(M)) = M \cap E_\sigma(M) = M$ であるから $M \in \mathcal{T}_t$ が従う. これは矛盾であるから $M \notin \mathcal{T}_t$ で $M/t(M) \in \mathcal{T}_\sigma$ である加群 M は非零部分加群 $N \in F_t$ を持つ.

(6)→(1):$M \in \mathcal{T}_t$ とする. そのとき $t(E_\sigma(M)) \supseteq t(M) = M$ が成り立つ.$E_\sigma(M) \notin \mathcal{T}_t$ であると仮定する.$E_\sigma(M)/M \twoheadrightarrow E_\sigma(M)/t(E_\sigma(M))$ であるから $0 \neq E_\sigma(M)/t(E_\sigma(M)) \in \mathcal{T}_\sigma$ が従う. 仮定により $E_\sigma(M)$ は非零部分加群 $N \in \mathcal{F}_t$ を持つ.M は $E(M)$ の大部分加群であるから $M \cap N \neq 0$ が成り立つ.$\mathcal{F}_t \ni N \supseteq N \cap M \subseteq M \in \mathcal{T}_t$ であり t は完全であるから $N \cap M \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{T}_t = \{0\}$ が成り立つ. これは矛盾であるから $E_\sigma(M) \in \mathcal{T}_t$ が得られる.

さて次の章からは紙面の関係で証明を省略する.

4. σ-安定的捻れ理論の応用

R は右ネーター環のとき [6, Proposition 11.3] により冪等根基 t は安定的であることと, 任意の入射的な直規約な加群が t-捻れ元か又は t-捻れ自由元であることとは同値な条件である. これを拡張する. この時 Matlis Papp's theorem の捻れ理論的拡張 [10] を必要とする. これは堀米, 政池 (σ が Goldie 捻れ理論では山形) による.

[10,Theorem 1] σ は左完全冪等根基とし $\mathcal{L}_\sigma := \{I \subseteq R | R/I \in \mathcal{T}_\sigma\}$ と置くとき次は同値である.

(1)$\mathcal{L}_\sigma$ が昇鎖条件を満たす.

(2) 任意の σ-入射的な σ-捻れ元は σ-入射的 σ-捻れ直規約部分加群の直和である.

次は [6, Proposition 11.3] を一般化する.

定理 7. t は冪等根基で σ は左完全冪等根基とする．$(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ は σ-遺伝的捻れ理論（$\mathcal{T}_t$ は σ-稠密な部分加群で閉じている）とする．このとき次が成立する．

(1)t は σ-安定的ならば (*) 任意の直規約で σ-入射的加群 E で $E/t(E) \in \mathcal{T}_\sigma$ であるならば E は t-捻れ元か又は t-捻れ自由元である．

(2) もし R が条件 (*) を満たし $\mathcal{L}_\sigma$ が昇鎖条件を満たすならば $\mathcal{T}_t \cap \mathcal{T}_\sigma$ は σ-移入包絡で閉じている．

次の命題は [7, Proposition 1.2] を一般化する．

命題 8. σ は左完全冪等根基とする．$(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ は σ-遺伝的で σ-安定的捻れ理論とする．このとき $M/t(M) \in \mathcal{T}_\sigma$ であるならば $E_\sigma(M/t(M)) \simeq E_\sigma(M)/E_\sigma(t(M))$ であり，$E_\sigma(M) \simeq E_\sigma(t(M)) \oplus E_\sigma(M/t(M))$ が成り立つ．

短完全列 $0 \to N \to M \to M/N \to 0$,（ただし $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$）に対し，$\mathrm{Hom}_R(-, A)$ が左完全性を保つ時，加群 A が σ-M-入射的であると言う．次の命題は [16, Theorem 15] を拡張する．

命題 9. σ は左完全冪等根基とする．次は同値である．

(1) A は σ-M-入射的である．

(2) 任意の $f \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(M), E_\sigma(A))$ に対し $f(M) \subseteq A$ が成り立つ．

次は Johnson Wong の定理の一般化である．命題 9 で $M = A$ と置けば得られる.A が σ-A-入射的ならば加群 A は σ-自己-入射的であるという．

系 10. σ は左完全冪等根基とするとき次は同値である．

(1) A は σ-自己入射的である．

(2) 任意の $f \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(A), E_\sigma(A))$ に対し $f(A) \subseteq A$ が成立する．

次は原田の [17, Proposition 2.3] を拡張する．

補題 11. A は σ-自己入射的で $E_\sigma(A) = M \oplus N$ ならば $A = (M \cap A) \oplus (N \cap A)$ が成り立つ．

次は [1,Theorem 2.3] を拡張する．

定理 12. σ は左完全冪等根基で $\mathcal{T}_t$ は σ-移入包絡で閉じているものとする．$A/t(A) \in \mathcal{T}_\sigma$ である σ-自己入射的 R-加群 A は $t(A)$ を直和因子に持つ．$t(A) \in \mathcal{T}_\sigma$ ならば N は自己入射的である．

5. σ-特異関手

大加群の最初の捻れ理論的拡張は [11]Rubin(1974) に見受けられる．続いて [9]Manocha(1982) や [4]Pardo Gomez(1985) に見受けられるが直接的関係は無い．加群 M の大イデアルで零化される元全体を集めると部分加群 $Z(M)$ となるが特異部分加群と言われる．ここでは [11] に現れた σ-大イデアルで零化される元全体を集めて部分加群 $Z_\sigma(M)$ を考えその性質を調べることにする．

加群 M に対し $Z(M)$ は $Z(M) := \{m \in M | (0 : m)$ は R の右イデアル$\}$ で定義される．ここで $(0 : m) = \{r \in R | mr = 0\}$ である．σ は左完全冪等根基

とする．M の σ-特異部分加群 $Z_\sigma(M)$ を $Z_\sigma(M) := \{m \in M | (0:m)$ は σ-大イデアル $\}$ で定義する．$Z_\sigma(M) = M (Z_\sigma(M) = 0)$ の時 M は各々 σ-特異 (σ-非特異) であると言う．

命題 13. σ は冪等根基で加群 E は σ-非特異であるとする．$\mathcal{T} := \{M \in$ Mod- $R|$ $\mathrm{Hom}_R(M, E) = 0\}$ で $\mathcal{F} := \{M \in$ Mod- $R|$ 任意の $X \in \mathcal{T}$ に対し $\mathrm{Hom}_R(X, M) = 0\}$ とする．このとき $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は σ-安定的捻れ理論になる．

命題 14. N は M の σ-大部分加群なら $Z_\sigma(M/N) = M/N$ が成立する．

系 15. R の右イデアル I が R の σ-大イデアル $\Leftrightarrow Z_\sigma(R/I) = R/I$

系 16. M は σ-非特異で N は M の部分加群とする．この時 N は M の σ-大部分加群 $\Leftrightarrow Z_\sigma(M/N) = M/N$

系 17. N は $Z_\sigma(M/Z_\sigma(M)) = N/Z_\sigma(M)$ で決まる M の部分加群とする．その時 $Z_\sigma(M)$ は N の σ-大部分加群である．

系 18. 加群 M に対し $Z_\sigma(M/Z_\sigma(M)) = M/Z_\sigma(M) \Leftrightarrow Z_\sigma(M)$ は M の σ-大部分加群である．

命題 19. 単純右 R-加群 S は σ-非特異である $\Leftrightarrow S$ は σ-捻れ自由元又は射影的加群である．

命題 20. σ は左完全冪等根基とする．R が σ-非特異なら Z_σ は左完全根基である．

命題 21. M/N が σ-非特異なら N は M の中に σ-大的拡大を持たない．M が σ-非特異なら逆も成り立つ．

6. Goldie 捻れ理論の一般化

まずはじめに捻れ理論の基本的性質を述べておく．$\mathcal{B}$ は剰余加群と直和をとることで閉じている Mod-R の部分集合とする．加群 M に対し $b(M) := \sum_{\substack{N \in \mathcal{B} \\ N \subseteq M}} N$ で定義する．この時 $b(M)$ は $\mathcal{B}$ に属する最大の M の部分加群になる．

$\mathcal{F} := \{M \in$Mod-$R|\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B}, M) = 0\}$,$\mathcal{T} :=\{M \in$Mod-$R|\mathrm{Hom}_R(M, \mathcal{F}) = 0\}$ と定義すると $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は捻れ理論になる．

なぜなら $(\mathcal{T}', \mathcal{F})$ は $\mathcal{T}$ によって生成された捻れ理論とする．$\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$ であることは明らかである．$\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ を示す.$C \in \mathcal{T}'$ とする．そのとき任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $\mathrm{Hom}_R(C, F) = 0$ が成り立つ．そのとき $\mathcal{T}$ に属する最大の $T \subsetneq C$ がある.$C/T \in \mathcal{F}$ を示す．もし $\mathrm{Hom}_R(M, C/T) \neq 0$ であるような $M \in \mathcal{T}$ があるなら $0 \neq f \in\mathrm{Hom}_R(M, C/T)$ があって $0 \neq f(M) = C_1/T \subseteq C/T$ が成り立つ．ただし C_1 は C の真の部分加群である．$C_1/T \in \mathcal{T}$ であり $T \in \mathcal{T}$ であるから $C_1 \in \mathcal{T}$ が従う．しかしこれは T の極大性に矛盾する．よって $M \in \mathcal{T}$ ならば $\mathrm{Hom}_R(M, C/T) = 0$ が従い $C/T \in \mathcal{F}$ が得られる.$C \in \mathcal{T}'$ であるから $C/T \in \mathcal{T}'$ が成り立つ．よって $C/T \in \mathcal{F} \cap \mathcal{T}' = \{0\}$ なので $C = T \in \mathcal{T}$ が従い $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ がわかる．そのとき $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は $\mathcal{B}$ によって生成された捻れ理論という.$\mathcal{T} \supseteq \mathcal{B}$ であり，Hom 関手の性質により $\mathcal{T}$ は剰余加群，直和や拡大で閉じていることがわかる．

次は命題4の言い換えであるが捻れ理論に付随する冪等根基 t を用いないで述べる.

命題 22. σ は左冪等根基で $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は捻れ理論の時次は同値である.

(1) $\mathcal{T}$ は σ-稠密部分加群で閉じている.

(2) $\mathcal{F}$ は σ-移入包絡で閉じている.

次は [12,Proposition 3.3,p141] の拡張である.

命題 23. $\mathcal{B}$ は剰余加群と σ-稠密部分加群で閉じている Mod-R の部分クラスとする. そのとき $\mathcal{B}$ で生成された捻れ理論は σ-遺伝的である.

例 **24.** E は σ-入射的加群とする. $\mathcal{B} := \{M|\mathrm{Hom}_R(M,E) = 0\}$ とおくと $\mathcal{B}$ は σ-稠密部分加群, 剰余加群, 直和や拡大で閉じていることがわかる. $\mathcal{F} := \{M|\mathrm{Hom}_R(\mathcal{B},M) = 0\}$ と置くと $(\mathcal{B},\mathcal{F})$ は σ-遺伝的捻れ理論になる.

さてここで Goldie 捻れ理論の拡張を述べる. $\mathcal{B} := \{M/N|N$ はある加群 M の σ-大部分加群である $\}$.$\mathcal{B}$ により生成された捻れ理論を σ-Goldie 捻れ理論と呼ぶことにする.

定理 25. σ は左完全冪等根基のとき σ-Goldie 捻れ理論は遺伝的で σ-安定的である.

加群 M に対し $Z_\sigma(M) \subseteq Z(M) \cap \sigma(M)$ で Z と σ は左完全であるから $\sigma(Z(M)) = Z(M) \cap \sigma(M) = Z(\sigma(M))$ が成り立つ. よって $Z_\sigma(M) \subseteq Z(\sigma(M)) = \sigma(Z(M))$ がわかる. $m \in Z(\sigma(M)) = \sigma(Z(M))$ であるなら $mR \in \mathcal{T}_Z \cap \mathcal{T}_\sigma$ であるから $Z_\sigma(M) = Z(\sigma(M)) = \sigma(Z(M))$ が成り立つ.

次に [12,Proposition 6.2] の拡張を述べる. 記号 $(\_)_2, \overline{(\_)}$ の定義については [12] の 6 章を用いる. $(Z_\sigma)_2(M)/M = Z_\sigma(M/Z_\sigma(M)) = Z\sigma(M/Z(\sigma(M))) = Z(\sigma(M)/Z(\sigma(M))) = Z_2(\sigma(M))/Z(\sigma(M))$. が成り立ち $\mathbf{Z}_2\sigma = (Z_\sigma)_2$ が成立する. $\mathbf{Z}_2$ と σ は左完全であるから Z_{σ_2} は左完全である. $\overline{Z_\sigma}$ は Z_σ を含む最小の根基であるから $Z_{\sigma_2} = \overline{Z_\sigma}$ が成り立つ. 従って次が得られる.

定理 26. 左完全冪等根基σ に対し $\mathbf{Z}_2\sigma = (Z_\sigma)_2 = \overline{Z_\sigma}$ が成り立つ.

REFERENCES

1. E. P. Armendariz, **Quasi-injective modules and stable torsion classes**, Pacific J. Math.31, 227-280, 1969

2. L. Bican, P. Jambor, T. Kepka and P. Nemec, **Stable and Costable Preradicals**, Acta Universitatis Carolinae-Mathematicaet Physica,Vol 16, No2 (1975), 63-69.

3. P. Gabriel, **Des Categories Abeliennes**, Bull. Soc. Math. France 90(1962), 323-448

4. J. L. Gómez Pardo, **Spectral Gabriel Topologies and relative singular functors**,Comm. in Algebra, 13(1), 21-57(1985)

5. K. R. Goodearl, "**Ring Theory**", Dekker, New York,1976

6. J. S. Golan, "**Localization of Noncommutative Rings**" Marcel Dekker, New York. 1976.

7. J. S. Golan, **Structure Sheaves over a Noncommutative Rings**, Marcel Dekker Inc. 1980.

8. J. S . Golan, "**Torsion Theories**" Longman Scientific & Technical, 1986

9. J. N. Manocha, **Singular submodule relative to a kernel functor**, Comm. in Algebra, 10(5),474-491(1982)

10. K. Masaike and T. Horigome, **Direct sums of τ-injective modules,** Tsukuba Journal of Mathematics, Vol 4(1980) 77-81

11. R. A. Rubin, **Semi-simplicity relative to kernel functors**, Can. J. Math. 26(1974), 1405-1411

12. Bo Stenström, **Rings of Quotients**, Springer -Verlag, Berlin, 1975.

13. Y. Takehana, **On generalization of CQF-3$'$ modules and cohereditary torsion theories**, Math. J. Okayama Univ. 54 (2012), 53-63.

14. Y. Takehana, **On generalization of QF-3$'$ modules and hereditary torsion theories**, Math. J. Okayama Univ. 54 (2012), 65-76.

15. Z. Papp, **Semi-stability and topologies on R-sp**, Comm. in Algebra 4(1976) 793-809.

16. G. Azumaya, **M-Projective and M-injectives,** unpublished.

17. M. Harada, **Note on quasi-injective modules**, Osaka J. Math. 2 (1965), 351-356.

18. K. Ohtake, **Colocalization and localization,** Journal of oure and applied algebra 11(1977), 217-241.

General Education
Hakodate National College of Technology,
14-1 Tokura-cho Hakodate Hokkaido, 042-8501 Japan
E-mail address: takehana@hakodate-ct.ac.jp