数理解析研究所講究録
第 1810 巻 2012 年 153-168

不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する初期値境界値問題

サレジオ工業高等専門学校 一般教育科 渡邉 紘 (HIROSHI WATANABE)
Department of General Education,
Salesian Polytechnic, Japan

1 導入.

本論文では, 以下の形をした退化放物型方程式に対する初期値境界値問題について考える:

$$
\text{(P)} \quad \begin{cases} u_t + \partial_x A(x,t,u) + B(x,t,u) = \partial_x^2 \beta(u) & (x,t) \in \Pi_T = I \times (0,T), \\ \partial_x \beta(u) - A(x,t,u) = 0, & (x,t) \in \{a,b\} \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in I, \quad u_0 \in BV(I). \end{cases}
$$

ここで, $I \equiv (a,b) \subset \mathbb{R}$ は有界開区間とする. 関数 $A(x,t,\xi)$ と $B(x,t,\xi)$ は, $\overline{I} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする. 関数 $\beta(\xi)$ は, $\mathbb{R}$ 上の単調非減少で局所 Lipschitz 連続であるとする. 関数 β が単調非減少であることから, $\beta'(\xi) = 0$ が成立する点 ξ の集合が非負測度を持つ場合が考えられる. この意味で, 問題 (P) 内の方程式を強退化放物型方程式と云う.

この方程式は, 以下のような多次元方程式の 1 次限版である:

$$
u_t + \nabla \cdot A(x,t,u) + B(x,t,u) = \Delta \beta(u). \tag{1.1}
$$

方程式 (1.1) は, 様々な数学モデル (双曲型保存則, 多孔性媒質流れ, Stefan 問題, filtration 問題, 沈殿過程, 交通流, 血流流れ等) に適用可能であることが知られている. さらに, (1.1) は時間依存する保存則方程式 (準線形双曲型方程式) と多孔性媒質方程式 (非線形放物型方程式) の 1 次結合の形をしているとみなすことができる. したがって, (1.1) は双曲型方程式の性質と放物型方程式の性質の両方を持っていると考えられる. 実際, 関数 β に対する仮定から, (1.1) の持つ性質は次のように表すことができる:

- β が狭義増加ならば, 双曲性よりも放物性の方が強い.
- β が単調非減少ならば, 放物性が強いところと双曲性が強いところが混在している.

本研究では, 方程式の係数 $A(x,t,\xi)$ が空間変数 x に関して不連続な場合において問題 (P) を考える. 特に, $A(\cdot,t,\xi) \in BV(I)$ の場合における問題 (P) の適切性を得ることが目標である. 本論文では特に, 問題 (P) の弱解の存在性を証明する.

係数 $A(x,t,\xi)$ が全ての変数に関して滑らかな場合, 問題 (P) の適切性の証明には Kružkov's doubling variable method と BV 空間内の compact 性を用いる手法が良く知られている. この手法を用いるためには, 以下の評価を得る必要がある:

- $||u_\varepsilon(\cdot,t)||_{L^\infty} \leq C.$
- $|u_\varepsilon(\cdot,t)|_{BV} \leq C.$
- $||u_\varepsilon(\cdot,t) - u_\varepsilon(\cdot,s)||_{L^1} \leq C|t-s|.$

ここで, u_ε は問題 (P) の近似解であり, $|u_\varepsilon|_{BV}$ は u_ε の全変動を表している. 実際, Carrillo [4] は多次元斉次 Dirichlet 問題に対するエントロピー解の一意存在性を証明した. さらに, Watanabe-Oharu [15] は多次元斉次 Neumann 問題に対する一般解である BV-エントロピー解を定式化し, その一意存在性を証明した. ここでエントロピー解とは, 熱力学の第二法則であるエントロピー増大則に起因する条件であるエントロピー不等式が成立するような弱解である. (1.1) に対する一般解の一意存在性を考える場合, 通常は一般解としてエントロピー解を選ぶ. なぜなら, (1.1) は双曲性を持っており, 解に不連続性が発生するため, 一般には弱解の一意性が破れるからである. しかしながら本論文では, 不連続な係数を持つ問題 (P) を解析する第 1 歩として, 弱解についてのみ考える.

空間変数 x に関して不連続な係数を持つ場合, 近似解の全変動が一様に有界であることを証明することは困難である. ゆえに, Kružkov の理論を直接適用することができない. この困難さを克服する 1 つの方法として, Tartar [13] によって導入された compensated compactness method が挙げられる. この手法を適用するためには, 以下の評価が必要である:

- $||u_\varepsilon(\cdot,t)||_{L^\infty} \leq C.$
- $||\sqrt{\beta_\varepsilon'(u_\varepsilon)}\partial_x u_\varepsilon||_{L^2} \leq C.$

実際, Karlsen-Risebro-Towers [9] は変数分離系の flux を持つ強退化放物型方程式:

$$\partial_t u + \partial_x(\gamma(x)f(u)) = \partial_x^2\beta(u), \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \tag{1.2}$$

に対する 1 次元 Cauchy 問題の弱解の存在性を証明した. ここで, $\gamma(x) \in BV(\mathbb{R})$ であり, $f(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$ は

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{1.3}$$

を満たすような真性非線形関数である. 彼らは退化拡散項のコンパクト性を得るために, (1.2) の近似問題に対する total flux のコンパクト性を証明した. このアイディアは, 本論文においても用いられる. このように初期値問題に対する結果はいくつか見つけることができるが, 境界値問題について扱われた論文はとても少ないのが現状である. また, compensated compactness method を用いるため, 多次元問題を取り扱うのが難しいことにも注意しておく.

本論文では, 不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する1次元 zero-flux 問題を考える. この定式化は, 乱流モデルや多孔性媒質内の二層流れモデルの粘性消滅極限へ応用できる. 例えば, Bürger-Frid-Karlsen [3] は zero-flux 境界条件の下で, 滑らかな係数を持つ双曲型保存則方程式に対するエントロピー解の一意存在性を証明した. 一方で, 不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する結果は未だ得られていない.

Zero-flux 問題 (P) の弱解の存在性を証明するために, 本論文では Panov のコンパクト性定理 [12] を用いる. Panov [12] は H-measure を使い, 多次元双曲型保存則方程式に対する近似解の族の L^1_{loc}-強位相での相対コンパクト性を証明した. この Panov の結果を使うことにより, 弱解の存在性を証明することができたことを報告する. さらに, 本論文における結果は, compensated compactness method を用いた Karlsen-Risebro-Towers [9] より弱い正則性の仮定の下で示されていることに注意する.

2 仮定と主結果.

本節では, 仮定と主結果を述べる. まず, 問題 (P) の弱解を以下のように定義する:

定義 2.1. 初期関数 $u_0 \in BV(I)$ をとる. 関数 $u \in L^\infty(\Pi_T)$ が問題 (P) の弱解であるとは, 次の二つの性質が成り立つときに云う:

(1) $\beta(u) \in L^2(0,T;H^1(I))$;

(2) 任意のテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,T))$ に対し,

$$\int_{\Pi_T}(u\varphi_t + A(x,t,u)\partial_x\varphi - B(x,t,u)\varphi - \partial_x\beta(u)\partial_x\varphi)dxdt + \int_I u_0(x)\varphi(x,0)dx = 0.$$

注意 2.2. *zero-flux* 境界条件は, 定義 *2.1* の *(2)* に含まれていることに注意する.

本論文では, 問題 (P) の弱解の存在性を証明する. そのために, いくつかの仮定を課す. まず, 初期関数 u_0 は

$$c < u_0 < d,$$

を満たすものとする. ここで, c と d は相異なる実数である. 1次元の場合, $BV(I) \subset L^\infty(I)$ が成立するため, この仮定を課しても一般性を失わないことに注意する. 例えば $c = -||u_0||_\infty - 1$, $d = ||u_0||_\infty + 1$ と選べばよい. さらに, 以下の条件を仮定する:

$$\{\mathrm{A1}\}\ \begin{cases} A(\cdot,t,\xi),\ B(\cdot,t,\xi) \in BV(\overline{I}) \ \text{ for } (t,\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}, \\ A(x,\cdot,\xi),\ B(x,\cdot,\xi) \in C^1([0,T]) \ \text{ for } (x,\xi)\in\overline{I}\times\mathbb{R}, \\ A(x,t,\cdot),\ B(x,t,\cdot) \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}) \ \text{ for } (x,t)\in\overline{I}\times[0,T]. \end{cases}$$

$$\{\mathrm{A2}\}\ \begin{cases} \partial_x A(x,t,c) + B(x,t,c) \le 0, \quad \partial_x A(x,t,d) + B(x,t,d) \ge 0, \quad \text{for } (x,t) \in \Pi_T, \\ A(a,t,d), A(b,t,c) \ge 0, \ \ A(b,t,d), A(a,t,c) \le 0, \quad \text{for } t \in (0,T). \end{cases}$$

$$\{\mathrm{A3}\}\ \partial_t A(x,t,p) + \int^x \partial_t B(x,t,p) \le 0, \quad \partial_t A(x,t,q) + \int^x \partial_t B(x,t,q) \ge 0, \quad \text{for } (x,t) \in \Pi_T.$$

$$\{\mathrm{A4}\}\ \begin{cases} -\partial_x[(\partial_t A)(x,t,\xi)] - (\partial_t B)(x,t,\xi) \le \alpha \\ -\partial_\xi B(x,t,\xi) \le \alpha' \end{cases} \quad \text{for a.e. } (x,t,\xi) \in \overline{I} \times [0,T] \times \mathbb{R}.$$

ここで, p と q は, 後程 (3.11) で定義される実数である. 仮定 $\{A1\}$ は, 方程式の係数に対する正則性の仮定である. 仮定 $\{A2\}$ と $\{A3\}$ は, 問題 (P) の近似解と total flux に対する L^∞ 評価を導出する際に必要となる. 係数 $A(x,t,\xi)$ が変数分離系の場合, 仮定 $\{A2\}$ と $\{A3\}$ は, (1.3) と類似することに注意する. 仮定 $\{A4\}$ は, 近似解に対する時間に関する Lipshitz 連続性を証明するために必要となる増大条件である. さらに, 関数 $A(x,t,\xi)$ の変数 ξ に関する一般化された非退化条件:

{A5} 以下が成立するような関数 $h(x,t,\xi) \in C^1((0,T) \times \mathbb{R}; L^\infty(I))$ が存在する:

任意の $\lambda \in S^1$ に対し, $\lambda_0 h(x,t,\xi) + \lambda_1 A(x,t,\xi)$ が ξ に関して定数となるような区間は殆ど至るところの $x \in I$, $t \in [0,T]$ で存在しない.

を課す. これは Panov のコンパクト性定理を使用する際に必要な仮定である. これらに加え, 弱解の $x = a, b$ における trace の存在を保証するために, $A(x,t,\xi)$ に対する条件:

{A6} 任意の $(t,\xi) \in (0,T) \times (c,d)$ に対し, 関数 $A(x,t,\xi)$ は, 点 $x = a, b$ において不連続にならない.

を課す. 仮定 {A6} の下では, $A(\cdot,t,\xi)$ が区間 $[a, a+\nu_1)$ 及び $(b-\nu_2, b]$ で変数 x に関して連続となるような非負実数 ν_1, ν_2 が存在する. 故に, 弱解 u は strong trace $u^\tau(x,t) \in L^\infty(\{a,b\} \times (0,T))$ を持つことが保障される. (参照: Vasseur [14]).

これらの仮定の下で, 問題 (P) の近似問題を以下のように定式化する:

$$(RP)\ \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^\delta + \partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) + B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) = \partial_x^2 \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta), \ \ (x,t) \in \Pi_T, \\ \partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta) - A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) = 0, \quad (x,t) \in \{a,b\} \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta(x,0) = u_0^\delta(x), \quad x \in I. \end{cases}$$

ここで, $A^\delta(x,t,\xi)$ と $B^\delta(x,t,\xi)$ は $A(x,t,\xi)$, $B(x,t,\xi)$ の軟化子による正則化である. すなわち,

$$A^\delta(x,t,\xi) = \frac{1}{\delta}\omega(x/\delta) * A(x,t,\xi), \quad B^\delta(x,t,\xi) = \frac{1}{\delta}\omega(x/\delta) * B(x,t,\xi).$$

ここで, $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$\omega(\lambda) = 0 \ \text{ for } \ |\lambda| \geq 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} \omega(\lambda) d\lambda = 1$$

を満たす任意の滑らかな関数であり, $*$ は畳み込みを表す. さらに,

$$u_0^\delta(x) = \frac{1}{\delta}\omega(x/\delta) * u_0(x)$$

とし, $\beta_\varepsilon^\delta(\xi) = \beta^\delta(\xi) + \varepsilon\xi$ とおく.

本論文では $\varepsilon \downarrow 0$ としたとき, 近似解 u_ε^δ の $L^1(\Pi_T)$ における強収束を証明することを試みる. 実際, 以下の結果が得られる:

定理 2.3. 条件 $\{A1\}$-$\{A6\}$ を仮定する.

(i) $\delta = c\varepsilon$ とすると, 問題 (P) の弱解 u が存在する. さらに, u は近似解の列 $\{u_\varepsilon^\delta\}_{\varepsilon>0}$ の L^1-強位相での収束極限として構成される.

(ii) 関数 v を初期関数 v_0 を持つ近似解 v_ε の強位相での収束極限として構成されるもう *1* つの弱解とする. このとき,

$$\int_I |u(x,t) - v(x,t)| dx \leq e^{\alpha' t} \int_I |u_0(x) - v_0(x)| dx. \tag{2.1}$$

従って, 本手法によって構成された問題 (P) の弱解 u は一意である.

(iii) 初期関数 u_0 に, 以下の正則性条件 $\{A7\}$ を仮定する:

$\{A7\}$ $|-A(x,t,u_0) - \int^x B(\zeta,t,u_0)d\zeta + \partial_x\beta(u_0)|_{BV(I)} < \infty.$

このとき, 弱解 u は以下の性質を満たす :

(1) $|-A(x,t,u) - \int^x B(\zeta,t,u)d\zeta + \partial_x\beta(u)|_{BV(I)} \leq C \quad$ *for all* $t \in (0,T)$,

(2) $||u(\cdot,t+\tau) - u(\cdot,t)||_{L^1(I)} \leq C\tau \quad$ *for all* $\tau \geq 0$,

(3) 関数列 $\{\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ の部分列は, 関数 $\beta(u)$ に殆ど至るところ一致する $C^{1,\frac{1}{2}}$ 級の関数に, Π_T の任意のコンパクト部分集合上で一様に収束する.

注意 2.4. 本論文における結果は, 問題 *(P)* に対する弱解の存在性と, 本手法で構成された弱解の一意性である. よって, 弱解の一意性が完全に証明されたわけではないことに注意する. *1* 節でも述べたように, 一般には弱解の一意性は成立しない.

3 近似解 u_ε^δ に対する評価.

本節では, 近似解 u_ε^δ に対するいくつかの評価を導く. まず, 最も基本となる L^∞ 評価を証明する:

補題 3.1 (L^∞-有界性). 任意の $t>0$ に対し, 以下の不等式を満たす, ε と δ に独立な定数 c_1 が存在する:

$$||u_\varepsilon^\delta||_{L^\infty(I)} < c_1.$$

特に, 任意の $t>0$ に対し, $c \leqq u_\varepsilon^\delta \leqq d$ が成立する.

証明. 任意の $\gamma>0$ に対し, 以下のような補助問題を考える:

$$(3.1)\quad (RP)_\gamma \begin{cases} \partial_t v(x,t) + \partial_x A^\delta(x,t,v) + B^\delta(x,t,v) = \partial_x^2 \beta_\varepsilon^\delta(v) + \gamma h(v), & (x,t) \in \Pi_T, \\ \partial_x \beta_\varepsilon^\delta(v(a,t)) - A^\delta(a,t,v(a,t)) = -\gamma h(v), & t \in (0,T), \\ \partial_x \beta_\varepsilon^\delta(v(b,t)) - A^\delta(b,t,v(b,t)) = \gamma h(v), & t \in (0,T), \\ v(x,0) = u_0^\delta, \quad x \in I, \quad c < u_0 < d. \end{cases}$$

ここで, $h(v) = c+d-2v$ とする. このとき, 一様放物型方程式に対する古典的理論 [10] により, 任意の $x \in I$ に対して $v(x,0) \in (c,d)$ を初期値とする 補助問題 $(RP)_\gamma$ の $C^{2,1}$ 級の解が一意的に存在する.

我々は背理法を用いて, 結果を証明する. そのために,

$$v(x,t) > d \ \text{ for all } \ (x,t) \in K$$

が成り立つような Π_T のコンパクト部分集合 K をとる. もし, K が空集合でないならば, 以下のような時刻 $\bar{t}$ を定義する:

$$\bar{t} = \inf\{t \mid v(\bar{x},t) = d \text{ が成立するような実数 } \bar{x} \text{ が存在する }\}.$$

初期関数に対する不等式 $c < u_0 < d$ より, 明らかに $\bar{t}$ は非負である. そして, $v(\cdot,\bar{t})$ が時間局所的に最大値を持つような点 $\bar{x}$ が存在し, 特に $v(\bar{x},\bar{t}) = d$ となる.

もし $\bar{x}$ が区間 I の内点, すなわち $\bar{x} \in (a,b)$ ならば, 以下の性質が成り立つ:

$$(3.2)\qquad \partial_x v(\bar{x},\bar{t}) = 0, \quad \partial_x^2 v(\bar{x},\bar{t}) \le 0, \quad \partial_t v(\bar{x},\bar{t}) \ge 0.$$

他方で, 関数 h の定義から,

$$h(v(\bar{x},\bar{t})) = h(d) < 0$$

が成り立つ. それゆえに, $v(\bar{x},\bar{t})$ が満たす方程式と (3.2) から, 以下の不等式が成立する:

$$\begin{aligned} &\partial_t v(\bar{x},\bar{t}) + (\partial_x A^\delta)(\bar{x},\bar{t},v(\bar{x},\bar{t})) + B^\delta(\bar{x},\bar{t},v(\bar{x},\bar{t})) \\ &= [(\beta_\varepsilon^\delta)''(v(\bar{x},\bar{t}))(\partial_x v(\bar{x},\bar{t}))^2 + (\beta_\varepsilon^\delta)'(v(\bar{x},\bar{t}))\partial_x^2 v(\bar{x},\bar{t})] + \gamma h(v(\bar{x},\bar{t})) \le \gamma h(d) < 0. \end{aligned}$$

ここで左辺を (3.2) を用いて計算し, 仮定 {A2} を使うと矛盾が発生する. よって, K が空集合であることが示され, 内点で最大値を持つ場合は $v(x,t) \le d$ が証明された.

他方で, $\bar{x} = a, b$ の場合を考える. もし $\bar{x} = a$ であると仮定すると, zero-flux 境界条件より

$$(\beta_\varepsilon^\delta)'(d)\partial_x v(a,\bar{t}) - A^\delta(a,t,d) = -\gamma h(d) > 0$$

が得られる．故に，仮定 {A2} から $\partial_x v(a,\bar{t}) > 0$ が得られる．同様に，$\partial_x v(b,\bar{t}) < 0$ も得られる．これらは境界上で最大値を取ることに矛盾する．それゆえに，K が空集合であることが得られ，$v \leq d$ が得られる．$\bar{x} = b$ のときも同様に示される．さらに，$v \geq c$ の証明も同様である．以上により，$c \leq v(x,t) \leq d$ が証明された．

ここで，Evje-Karlsen-Risebro [6] 又は Watanabe-Oharu [16] における連続的依存性の結果を用いると，$\gamma \downarrow 0$ のとき，$v \to u_\varepsilon^\delta$ が各点で成立する．故に，主張を得る． □

次に，u_ε^δ の時間変数 t に関する Lipschitz 連続性を証明する．これは，Panov のコンパクト性定理を用いる際に必要となる．実際，Karlsen-Rascle-Tadmor [8] や Aleksić-Mitrovic [1] は，この手法を用いて 2 次元双曲型保存則方程式の近似解の列に対する L^1_{loc} の強位相での相対コンパクト性を証明した．

補題 3.2 (時間に関する Lipschitz 連続性). 定数 $c > 0$ に対し，$\delta = c\varepsilon$ とする．すると，任意の $t > 0$ に対し，以下の不等式を満たす，ε と δ に独立な定数 c_2 が存在する：

$$\int_I |\partial_t u_\varepsilon^\delta(\cdot,t)| dx \leq c_2.$$

証明. 近似問題 (RP) 内の近似方程式：

$$\partial_t u_\varepsilon^\delta + \partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) + B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) = \partial_x^2 \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta) \tag{3.3}$$

を用いて証明を始める．上記の方程式 (3.3) の両辺を t に関して微分し，$w_\varepsilon^\delta = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ とおくと，

$$\begin{aligned} &\partial_t w_\varepsilon^\delta + \partial_x[(\partial_t A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta) + (\partial_\xi A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta] \\ &+(\partial_t B^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta) + (\partial_\xi B^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta = \partial_x^2((\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta) \end{aligned}$$

が得られる．この方程式の両辺に $\mathrm{sgn}(w_\varepsilon^\delta)$ を掛けると，以下の等式が超関数の意味で成立する：

$$\begin{aligned} \partial_t|w_\varepsilon^\delta| = {}& \partial_x^2(\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta)|w_\varepsilon^\delta|) - \mathrm{sgn}'(w_\varepsilon^\delta)\partial_x((\beta_\varepsilon^\delta)'(w_\varepsilon^\delta))\partial_x w_\varepsilon^\delta \\ & -\partial_x[(\partial_\xi A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)|w_\varepsilon^\delta|] - \mathrm{sgn}(w_\varepsilon^\delta)\partial_x(\partial_t A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta) \\ & - \mathrm{sgn}(w_\varepsilon^\delta)[(\partial_t B^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta) + (\partial_\xi B^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

この方程式 (3.4) の右辺を評価する．まず，(3.4) の右辺第 2 項は負である．また，以下の等式が成立することに注意する：

$$\partial_t[\partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta) - A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)] = \partial_x(\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta) - (\partial_t A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta) - (\partial_\xi A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta. \tag{3.5}$$

さらに zero-flux 境界条件より，(3.5) の左辺は境界上で 0 となる．よって (3.4) の右辺第 1 項と第 3 項は以下のように評価される：

$$[\mathrm{sgn}(w_\varepsilon^\delta)\{\partial_x((\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta) - (\partial_\xi A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)w_\varepsilon^\delta\}]_a^b = [\mathrm{sgn}(w_\varepsilon^\delta)(\partial_t A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)]_a^b < C.$$

ここで, C は ε と δ に独立な正定数である. また, 仮定 $\{A6\}$ を用いていることに注意する. さらに仮定 {A4} を用いると, その他の項も評価され, 以下の不等式を得る:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_I |w_\varepsilon^\delta|dx \leq \alpha \int_I \mathrm{sgn}(w_\varepsilon^\delta)dx + \alpha' \int_I |w_\varepsilon^\delta|dx + C \leq \alpha(b-a) + C + \alpha' \int_I |w_\varepsilon^\delta|dx$$

が成立する. ここで $u_0 \in BV(I)$ より最右辺は有界となるので, Gronwall の不等式を用いると, 要求された評価が成立する. □

補題 3.3 (Entropy dissipation bound). 任意の $t > 0$ に対し, 以下の不等式を満たす, ε と δ に独立な定数 $c_3 > 0$ が存在する:

$$\int_I (\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x u_\varepsilon^\delta(\cdot,t))^2 dx \leq c_3.$$

証明. 近似方程式 (3.3) を用いて証明を始める. (3.3) の両辺に u_ε^δ を掛け, x に関して I 上で積分すると, 以下が得られる:

$$\int_I [u_\varepsilon^\delta \partial_t u_\varepsilon^\delta + u_\varepsilon^\delta \partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) + u_\varepsilon^\delta B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)]dx = \int_I u_\varepsilon^\delta \partial_x[(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta]dx.$$

上記の方程式の右辺を部分積分すると,

$$\int_I u_\varepsilon^\delta \partial_x[(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta]dx = [u_\varepsilon^\delta(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta]_a^b - \int_I (\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x u_\varepsilon^\delta)^2 dx \tag{3.6}$$

となることから, 以下の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\int_I (\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x u_\varepsilon^\delta)^2 dx &= [u_\varepsilon^\delta(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta]_a^b \\ &\quad - \int_I [u_\varepsilon^\delta \partial_t u_\varepsilon^\delta + u_\varepsilon^\delta \partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) + u_\varepsilon^\delta B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)]dx.\end{aligned} \tag{3.7}$$

さらに (3.7) の右辺第 3 項を部分積分すると,

$$-\int_I u_\varepsilon^\delta \partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)dx = -[u_\varepsilon^\delta A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)]_a^b + \int_I \partial_x u_\varepsilon^\delta A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)dx \tag{3.8}$$

となる. zero-flux 境界条件より, (3.6) の右辺 1 項と (3.8) の右辺第 1 項の和は 0 となる. その上, (3.8) の右辺第 2 項は以下のように評価される:

$$\int_I \partial_x u_\varepsilon^\delta A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)dx = \int_I \partial_x\left(\int_0^{u_\varepsilon^\delta} A^\delta(x,t,\xi)d\xi\right)dx - \int_I\left(\int_0^{u_\varepsilon^\delta}(\partial_x A^\delta)(x,t,\xi)d\xi\right)dx.$$

それゆえに, 以下の等式が得られる:

$$\begin{aligned}\int_I (\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x u_\varepsilon^\delta)^2 dx &= -\int_I u_\varepsilon^\delta \partial_x u_\varepsilon^\delta dx + \left[\int_0^{u_\varepsilon^\delta} A^\delta(x,t,\xi)d\xi\right]_a^b \\ &\quad - \int_I\left(\int_0^{u_\varepsilon^\delta}(\partial_x A^\delta)(x,t,\xi)d\xi\right)dx - \int_I u_\varepsilon^\delta B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)dx.\end{aligned}$$

仮定 $\{A6\}$ に注意すると, 以下の評価が得られる:

$$\int_I (\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x u_\varepsilon^\delta)^2 dx \leq \sup_{t,\xi} |A^\delta(x,t,\xi)|_{BV(I)} + ||u_\varepsilon^\delta||_{L^\infty(I)}(||\partial_t u_\varepsilon^\delta||_{L^\infty(0,T;L^1(I))}$$
$$+2\sup_{t,\xi} ||A^\delta(x,t,\xi)||_{L^\infty(I)} + \sup_{t,\xi} ||B(x,t,\xi)||_{L^1(I)}).$$

ここで, $\sup_{t,\xi}$ は $(t,\xi) \in (0,T)\times(c,d)$ における上限を意味する. よって, 主張である不等式が証明された. □

Karlsen-Risebro-Towers が用いた compensated compactness method や Panov が用いた H-measure による手法は, 双曲型保存則に対してよく用いられる. 退化放物型方程式に対してこれらの手法を用いる場合, 退化拡散項についての評価を得ることが重要となる. まず, [9, Lemma 3.2, Lemma 3.5] と同様の方針で以下のような正則性評価を得ることができる.

補題 3.4. 以下の性質を満たす, T には独立だが ε と δ には依存する正定数 C が存在する: 任意の $y \in \mathbb{R}$ と $\tau \geq 0$ に対し,

$$||\beta(u_\varepsilon^\delta(\cdot+y,\cdot+\tau)) - \beta(u_\varepsilon^\delta(\cdot,\cdot))||_{L^2(I\times(0,T-\tau))} \leq C(|y|+\sqrt{\tau}).$$

特に, $\{\beta(u_\varepsilon^\delta)\}_{\varepsilon>0}$ は $L^2_{loc}(\Pi_T)$ の強位相でコンパクトである.

補題 3.5. 関数列 $\{\beta(u_\varepsilon^\delta)\}_{\varepsilon>0}$ の部分列は, $\beta(u)$ に $L^2_{loc}(\Pi_T)$ 内で強収束する. ここで, u は近似解の列 $\{u_\varepsilon^\delta\}_{\varepsilon>0}$ の $L^\infty(\Pi_T)$ における汎弱極限関数である. さらに,

$$\beta(u) \in L^\infty(\Pi_T) \cap L^2(0,T;H^1(I)).$$

これに加え, 近似問題 (RP) の total flux のコンパクト性を証明する. この結果は, Karlsen-Risebro-Towers [9] の主要アイディアである.

補題 3.6 (total flux のコンパクト性). 条件 $\{A7\}$ を仮定する. 近似問題 *(RP)* の *total flux*

$$v_\varepsilon^\delta(x,t) = -A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) - \int^x B^\delta(\zeta,t,u_\varepsilon^\delta)d\zeta + \partial_x\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta) \tag{3.9}$$

をとる. このとき, 任意の $t\in(0,T)$ に対して以下の不等式を満たす, ε と δ に独立な定数 $C>0$ が存在する;

(i) $||v_\varepsilon^\delta(\cdot,t)||_{L^\infty(I)} \leq C$.

(ii) $|v_\varepsilon^\delta(\cdot,t)|_{BV(I)} \leq C$.

(iii) $||v_\varepsilon^\delta(\cdot,t+\tau) - v_\varepsilon^\delta(\cdot,t)||_{L^1(I)} \leq C\sqrt{\tau}$ *for all* $\tau \geq 0$.

特に, 関数列 $\{v_\varepsilon^\delta\}_{\varepsilon>0}$ は $L^1_{loc}(\Pi_T)$ の強位相でコンパクトである.

証明. 関数 v_ε^δ の定義より, $\partial_x v_\varepsilon^\delta = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ は明らかである. この等式と (3.9) から, 以下の補助問題を考える :

$$
(3.10)\qquad
\begin{cases}
\partial_t v_\varepsilon^\delta = \partial_x((\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x v_\varepsilon^\delta) - (\partial_t A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta) - (\partial_\xi A^\delta)(x,t,u_\varepsilon^\delta)\partial_x v_\varepsilon^\delta, \\
\qquad -\partial_t \int^x B^\delta(\zeta,t,u_\varepsilon^\delta)d\zeta + \gamma h(v_\varepsilon^\delta), \quad (x,t)\in \Pi_T, \\
v_\varepsilon^\delta(a,t) = -[\int^x B^\delta(\zeta,t,u_\varepsilon^\delta)d\zeta]_{x=a} - \gamma h(v_\varepsilon^\delta(a,t)), \quad t\in(0,T), \\
v_\varepsilon^\delta(b,t) = -[\int^x B^\delta(\zeta,t,u_\varepsilon^\delta)d\zeta]_{x=b} + \gamma h(v_\varepsilon^\delta(b,t)), \quad t\in(0,T), \\
v_\varepsilon^\delta(x,0) = \partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_0^\delta) - A^\delta(x,0,u_0^\delta) - \int^x B^\delta(\zeta,0,u_0^\delta)d\zeta \quad x\in I.
\end{cases}
$$

ここで, $h(u_\varepsilon^\delta) = p + q - 2v_\varepsilon^\delta$ とおき, p, q は殆ど至るところの $x\in I$ に対して, 以下の等式が成立するような相異なる実数である:

$$
(3.11)\qquad
\begin{aligned}
\partial_x\beta_\varepsilon(p) - A^\delta(x,0,p) - \int^x B^\delta(\zeta,0,p)d\zeta &= \operatorname*{ess\,inf}_x v_\varepsilon^\delta(x,0) \equiv \overline{p}, \\
\partial_x\beta_\varepsilon(q) - A^\delta(x,0,q) - \int^x B^\delta(\zeta,0,q)d\zeta &= \operatorname*{ess\,sup}_x v_\varepsilon^\delta(x,0) \equiv \overline{q}.
\end{aligned}
$$

すなわち, p, q は, 時刻 0 における total flux の本質的下限, 本質的上限を与えるような定数である.

(i) の証明は 補題 3.1 と同様の方針で行う. すなわち, $v_\varepsilon^\delta > \overline{q}$ または $v_\varepsilon^\delta < \overline{p}$ となる集合が空集合であることを証明し, $\overline{p} \le v_\varepsilon^\delta \le \overline{q}$ を導く.

まず, 最大値を取る点が区間 I の内点の場合は, 補題 3.1 と同様に証明できる. 注意すべきことは, 仮定 {A3} が必要となる点である.

最大値を取る点が境界点の場合を考察する. 例えば, $v_\varepsilon^\delta(a,\overline{t}) = \overline{q}$ の場合を考えると, v_ε^δ と u_ε^δ の定義から,

$$
\overline{q} = v_\varepsilon^\delta(a,\overline{t}) = -[\int^x B^\delta(\zeta,\overline{t},u_\varepsilon^\delta(\zeta,\overline{t}))d\zeta]_{x=a}.
$$

これと問題 (3.10) の境界条件より, $\overline{p} = \overline{q}$ となり矛盾. その他の場合も同様に証明できる.

次に, (ii) を証明する. 方程式 $\partial_x v_\varepsilon^\delta = \partial_t u_\varepsilon^\delta$ より,

$$
|v_\varepsilon^\delta|_{BV(I)} \equiv \int_I |\partial_x v_\varepsilon^\delta| dx = \int_I |\partial_t u_\varepsilon^\delta| dx
$$

が得られる. したがって, 補題 3.2 より, 評価 (ii) が得られる.

(iii) の証明については, Karlsen-Risebro-Towers [9] の証明と同様にできる. それゆえに, Frechét-Kolmogorov のコンパクト性定理を適用すると, $\{v_\varepsilon^\delta\}$ が $L^1_{loc}(\Pi_T)$ の強位相でコンパクトであることが示される. □

4 主結果の証明.

本節では, 主結果の証明を行う. まず, 関数列 $\{u_\varepsilon^\delta\}$ に対する $L^1_{loc}(\Pi_T)$ の強位相での相対コンパクト性を得るために用いる Panov のコンパクト性定理を一般形で紹介する.

定理 4.1 (Panov). 開集合 $\Omega_T \equiv \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ をとる. ベクトル $\phi(x,t,u) \in (C(\mathbb{R}; BV(\Omega_T)))^{N+1}$ が条件 {A5} の意味で u に関して非退化であると仮定する. このとき, ヘヴィサイド関数 H と $k \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の性質を満たす有界列 $(u_k(x,t))_k \in L^\infty(\Omega_T)$, $c \le u_k(x,t) \le d$ をとる:

$$\nabla_{x,t} \cdot [H(u_k(x,t)-k)(\phi(x,t,u_k(x,t)) - \phi(x,t,k))] \text{ は, } H^{-1}_{loc}(\Omega_T) \text{ 内で相対コンパクト.}$$

この関数列 $(u_k(x,t))_k \in L^\infty(\Omega_T)$ は, 部分列を取ることにより $L^1_{loc}(\Omega_T)$ 内で収束する.

定理 4.1 において, 問題 (P) と適合する関数 ϕ を選ぶことにより, 以下の結果を証明することができる:

定理 4.2. 条件 {A7} を仮定する. $\varepsilon = c\delta$ とすると, 近似解の族 $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \equiv (u_\varepsilon^\delta)_{\varepsilon,\delta}$ は, $L^1_{loc}(\Pi_T)$ の強位相で相対コンパクトである.

証明. 関数 $h(x,t,\xi) \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}; L^\infty(I))$ をとる. そして近似方程式 (3.3) を以下のように書き直す:

$$h(x,t,u_\varepsilon^\delta)_t + \partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) + B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) = h(x,t,u_\varepsilon^\delta)_t - \partial_t u_\varepsilon^\delta + \partial_x^2 \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta). \tag{4.1}$$

また, 問題 (P) に対応するエントロピー流速関数を以下のように取る:

$$\phi_0(x,t,\lambda) \equiv H(\lambda-k)(h(x,t,\lambda) - h(x,t,k)),$$

$$\phi_1(x,t,\lambda) \equiv H(\lambda-k)(A(x,t,\lambda) - A(x,t,k)),$$

$$\phi_1^\delta(x,t,\lambda) \equiv H(\lambda-k)(A^\delta(x,t,\lambda) - A^\delta(x,t,k)).$$

ここで, H はヘヴィサイド関数を表し, k は任意の実数である. 方程式 (4.1) に $\eta'(u_\varepsilon^\delta) = H(u_\varepsilon^\delta - k)$ を掛け, 両辺に $\partial_x\phi_1(x,t,u_\varepsilon^\delta)$ を足すと以下の等式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\phi_0(x,t,u_\varepsilon^\delta) + \partial_x\phi_1(x,t,u_\varepsilon^\delta) \\
&= -\eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) - \eta'(u_\varepsilon^\delta)B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) + \eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_t h(x,t,u_\varepsilon^\delta) \\
&\quad -\eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_t u_\varepsilon^\delta + \eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x((\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta) + \partial_x\phi_1(x,t,u_\varepsilon^\delta) - \eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_t h(x,t,k).
\end{aligned}$$

ここで, 右辺第 5 項を以下の等式を用いて変形する:

$$\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta) = \eta''(u_\varepsilon^\delta)(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x u_\varepsilon^\delta)^2 + \eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x((\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta).$$

この方程式の右辺第1項は正であることから, 以下の不等式が得られる:

$$\begin{aligned}&\partial_t\phi_0(x,t,u_\varepsilon^\delta)+\partial_x\phi_1(x,t,u_\varepsilon^\delta)\\&\le\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_t h(x,t,u_\varepsilon^\delta)-\partial_t h(x,t,k)-\partial_x A^\delta(x,t,k)-B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)-\partial_t u_\varepsilon^\delta)\\&\quad+\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta)+\partial_x[\phi_1-\phi_1^\delta](x,t,u_\varepsilon^\delta).\end{aligned}$$

ここで非負超関数に対するSchwartzの補題より, 以下の等式が成り立つような$\mu_k^{\varepsilon,\delta}(x,t)\in\mathcal{M}(\Pi_T)$ が存在する:

$$\begin{aligned}&\partial_t\phi_0(x,t,u_\varepsilon^\delta)+\partial_x\phi_1(x,t,u_\varepsilon^\delta)\\&=\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_t h(x,t,u_\varepsilon^\delta)-\partial_t h(x,t,k)-\partial_x A^\delta(x,t,k)-B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)-\partial_t u_\varepsilon^\delta)\\&\quad+\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta)+\partial_x[\phi_1-\phi_1^\delta](x,t,u_\varepsilon^\delta)+\mu_k^{\varepsilon,\delta}(x,t).\end{aligned}$$

主張を証明するためには, 上記の方程式の右辺を検証すればよい. まず, u_ε^δ に対する時間に関するLipschitz連続性 (補題 3.2) より, 以下の評価が成立する:

$$\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_t h(x,t,u_\varepsilon^\delta)-\partial_t h(x,t,k)-\partial_t u_\varepsilon^\delta)\in\mathcal{M}_{b,loc}(\Pi_T).$$

ここで, $\mathcal{M}_{b,loc}(\Pi_T)$ は局所有界なRadon測度の族である. さらに, 正則性の仮定$\{$A1$\}$より,

$$\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\partial_x A^\delta(x,t,k)+B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta))\in\mathcal{M}_{b,loc}(\Pi_T)$$

が得られる. 次に, 以下の退化拡散項について考える:

$$\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta)=\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta)+\varepsilon\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta).$$

右辺第1項は退化拡散項であり, 第2項は人工粘性項である. 人工粘性項についてはentropy dissipation bound (補題 3.3) より,

$$\int_{\Pi_T}|\varepsilon\eta'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta|^2dxdt\le C\varepsilon\int_{\Pi_T}\varepsilon|\partial_x u_\varepsilon^\delta|^2dxdt<C\varepsilon$$

を得る. ここで, $\varepsilon\downarrow 0$ とすると最右辺は0となる. 他方で退化拡散項について考えるために, 領域Π_Tを以下のように分割する:

$$\begin{aligned}H&:=\{(x,t)\in\Pi_T\mid l(\beta(u(x,t)))<L(\beta(u(x,t)))\},\\P&:=\{(x,t)\in\Pi_T\mid l(\beta(u(x,t)))=L(\beta(u(x,t)))\}.\end{aligned}$$

ここで, $l(\xi)=\min\{\lambda\in[a,b]\ :\ \beta(\lambda)=\xi\}$, $L(\xi)=\max\{\lambda\in[a,b]\ :\ \beta(\lambda)=\xi\}$ とおく. H は方程式が双曲性を持つ, すなわち拡散項が退化している領域であり, P は方程式が放物性を持つ領域であると解釈できる. H 上の退化拡散項については, $\varepsilon\downarrow 0$ としたとき,

$$(\beta^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\to 0\quad\text{a.e. on } H$$

という収束が得られる. さらに u_ε^δ の L^∞-有界性 (補題 3.1) と entropy dissipation bound (補題 3.3) より, $\varepsilon \downarrow 0$ としたとき,

$$\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta \to 0 \quad \text{a.e. on } H$$

が示される.

次に, P 上の退化拡散項を考える. total flux のコンパクト性と関数列 $\{u_\varepsilon^\delta\}_{\varepsilon,\delta}$ が P 上で殆ど至るところ収束することから (ref. [9, Lemma 3.3]), 関数列 $\{\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta\}_{\varepsilon>0}$ は, P 上殆ど至るところ収束する.

他方で, u_ε^δ に対する L^∞-有界性 と entropy dissipation bound より,

$$\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta \in L^2(\Pi_T)$$

という評価も得られる. 従って, 関数列 $\{\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta\}_{\varepsilon>0}$ は $L^2(\Pi_T)$ 内で強収束する. よって, $\partial_x(\eta'(u_\varepsilon^\delta)(\beta_\varepsilon^\delta)'(u_\varepsilon^\delta)\partial_x u_\varepsilon^\delta) \in H_{c,loc}^{-1}(\Pi_T)$ が示された. ここで, $H_{c,loc}^{-1}(\Pi_T)$ は $H_{loc}^{-1}(\Pi_T)$ で相対コンパクトとなる関数の族である.

最後に, 残りの項を評価する. まず,

$$\begin{aligned}|\phi_1 - \phi_1^\delta|(x,t,u_\varepsilon^\delta) &\le |A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta) - A(x,t,u_\varepsilon^\delta)| + |A^\delta(x,t,k) - A^\delta(x,t,k)| \\ &\le 2\max_{a\le p\le b}|A^\delta(x,t,p) - A(x,t,p)|\end{aligned}$$

が得られる. $\delta \to 0$ とすると, $L_{loc}^2(I)$ の位相で最右辺は 0 に収束する. これより, $\partial_x[\phi_1 - \phi_1^\delta] \in H_{c,loc}^{-1}(\Pi_T)$ も得られる. さらに, $\mu_k^{\varepsilon,\delta} \in \mathcal{M}_{b,loc}(\Pi_T)$ も得られる. それゆえに, 以下の補題 4.3 を使うことにより結論が得られる. □

補題 4.3 (Murat). 関数列 (Q_ε) は $L^p(\Omega)$, $p > 2$, 内で有界であり, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は開集合とする. このとき, $(q_\varepsilon)_\varepsilon \in H_{c,loc}^{-1}(\Omega)$ と $(p_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{b,loc}(\Omega)$ であり, $\nabla \cdot (Q_\varepsilon)_\varepsilon = p_\varepsilon + q_\varepsilon$ とおくと,

$$\nabla \cdot (Q_\varepsilon)_\varepsilon \in H_{c,loc}^{-1}(\Omega)$$

が成立する.

定理 2.3 (i), (ii), (iii) (1)-(2) の証明. まず, 条件 $\{A7\}$ を仮定する. 定理 4.2 より, 近似解 u_ε^δ は部分列を取ることにより, 極限関数 u へ Π_T 上殆ど至るところ収束する. さらに補題 3.1 より, u は $L^\infty(\Pi_T)$ に属する. 故に, この収束は 任意の $p \in [1,\infty)$ に対し, $L^p(\Pi_T)$ で成立する. これに加え補題 3.5 より, $\beta(u) \in L^2(0,T;H^1(I))$ が得られる. 故に, 極限関数 u は定義 2.1 の (i) を満たす.

次に, 近似解 u_ε^δ が満たす方程式の両辺に $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times[0,T))$ を掛け, x と t に関して積分すると, 以下の等式が得られる:

$$\begin{aligned}0 = &\int_{\Pi_T}\{-u_\varepsilon^\delta\partial_t\varphi + \partial_x\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta)\partial_x\varphi - A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)\partial_x\varphi + B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta)\varphi\}dxdt \\ &- \int_I u_\varepsilon^\delta(x,0)\varphi(x,0)dx.\end{aligned}$$

ここで $\delta = c\varepsilon$ とする. $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, 極限関数 u は定義 2.1 の (ii) を満たす. さらに補題 3.6 より, 弱解 u は 定理 2.3(iii) の (1), (2) を満たす.

次に, 条件 {A7} を仮定せずに定理 2.3 の (ii) が成立することを示す. まず, Watanabe-Oharu [15] の結果により, 以下の安定性結果が得られることに注意する:

$$\int_I |u_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x,t)|dx \le e^{\alpha' t} \int_I |u_\varepsilon(x,0) - v_\varepsilon(x,0)|dx. \tag{4.2}$$

ここで, $\delta = c\varepsilon$ としていることにより, $u_\varepsilon^\delta = u_\varepsilon$ と書いた. (4.2) において $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, 不等式 (2.1) は 条件 {A7} が成立するような初期関数 u_0 と v_0 に対して成立する. このとき, 条件 $\{A7\}$ が成立し, $m \uparrow \infty$ のとき $L^1(I)$ 内で u_0 に収束するような関数 u_0^m の族 $\{u_0^m\}_{m=1}^\infty$ を取ることができる. 問題 (P) の初期関数 u_0^m に対する弱解 u^m をとる. (4.2) より, 以下の不等式:

$$\int_I |u^m(x,t) - u^n(x,t)|dx \le e^{\alpha' t} \int_I |u_0^m(x) - u_0^n(x)|dx$$

が得られ, その右辺は $m, n \uparrow \infty$ のとき 0 に収束する. 故に, 関数列 $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ は $L^1(\Pi_T)$ 内での Cauchy 列になるので, 関数 u に収束する. さらに, 極限関数 u が定義 2.1(i), (ii) を満たすことは明らかである. よって, 定理 2.3 (i), (ii) 及び (iii) (1)-(2) の主張が得られた.

注意 4.4. *Watanabe-Oharu [15] では, 方程式 (1.1) を Neumann 境界条件 : $\nabla\beta(u)\cdot\mathbf{n} = 0$ の下で考えており, (4.2) 等の結果を得ている. zero flux 境界値問題の場合も, 同様の結果が得られることに注意する.*

定理 2.3 (iii)(3) の証明. 最後に, 定理 2.3 (iii) の (3) を証明する. 近似解 u_ε^δ と方程式の係数 $A(\cdot,t,\xi)$ の一様有界性と 補題 3.6 (i) より, ε と δ に独立な定数 C で, 任意の $t \in (0,T)$ に対して以下を満たすものが存在する:

$$||\partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(\cdot,t))||_{L^\infty(I)} \le C.$$

この評価と u_ε^δ の L^∞-有界性 (補題 3.1) から,

$$\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(x+y,t)) - \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(x,t)) \le C|y|$$

が成立する. ここで $\tau > 0$ をとる. 微分積分学の基本定理と部分積分を用いることにより, 以下の評価が成立する:

$$\begin{aligned}
&\int_x^{x+\sqrt{\tau}} (u_\varepsilon^\delta(x,t+\tau) - u_\varepsilon^\delta(x,t))dx = \int_x^{x+\sqrt{\tau}} \int_t^{t+\tau} \partial_t u_\varepsilon^\delta(x,\xi) d\xi dx \\
&= \int_x^{x+\sqrt{\tau}} \int_t^{t+\tau} [-\partial_x A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta(x,\xi)) - B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta(x,\xi)) + \partial_x^2 \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(x,\xi))] d\xi dx \\
&= \int_t^{t+\tau} ([-A^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta(x,\xi))]_x^{x+\sqrt{\tau}} - \int_x^{x+\sqrt{\tau}} B^\delta(x,t,u_\varepsilon^\delta(x,\xi))dx + [\partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(x,\xi))]_x^{x+\sqrt{\tau}}) d\xi \\
&\le C(t+\tau-t) = C\tau.
\end{aligned}$$

また, 平均値の定理より,

$$(u_\varepsilon^\delta(x^*, t+\tau) - u_\varepsilon^\delta(x^*, t))\sqrt{\tau} \le C\tau$$

が成立するような x^* が, x と $x+\sqrt{\tau}$ の間に存在する. 故に, 以下の不等式が成立する:

$$|u_\varepsilon^\delta(x^*, t+\tau) - u_\varepsilon^\delta(x^*, t)| \le C\sqrt{\tau}.$$

それゆえに,

$$|\beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(x, t+\tau) - \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta(x, t))| \le C(|x - x^*| + \sqrt{\tau} + |x - x^*|) \le C\sqrt{\tau}.$$

が得られる. この不等式と Ascoli-Arzelá のコンパクト性定理から, 主張が得られる.

参考文献

[1] J. Aleksić and D. Mitrovic, *On the compactness for two dimensional scalar conservation law with discontinuous flux*, Comm. Math. Science, **4** (2009), 963-971.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco and Paliara, "Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems", Oxford Science Publications, (2000).

[3] R. Bürger, H. Frid and K. H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solutions to conservation laws with a zero-flux boundary condition*, J. Math. Anal. Appl., **326** (2007), 108-120.

[4] J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, Arch. Rational. Anal., **147** (1999), 269-361.

[5] L. C. Evans and R. Gariepy, "Measure theory and fine properties of functions", Studies in Advanced Math., CRC Press, London, (1992).

[6] S. Evje, K. H. Karlsen and N. H. Risebro, *A continuous dependence result for nonlinear degenerate parabolic equations with spatially dependent flux function*, Internat. Ser. Numer. Math., **140**, **141**, Birkhäuser, Basel, (2001), 337-346.

[7] J. Jimenez, *Scalar conservation law with discontinuous flux in a bounded domain*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., 520-530.

[8] K. H. Karlsen, M. Rascle and E. Tadmor, *On the existence and compactness of a two-dimensional resonant system of conservation laws*, Commun. Math. Sci. **5**(2), (2007), 253-265.

[9] K. H. Karlsen, N. H. Risebro and J. D. Towers, *On a nonlinear degenerate parabolic transport-diffusion equation with a discontinuous coefficient*, Electron. J. Differential Equations, **28** (2002), 1-23 (electronic).

[10] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.

[11] C. Mascia, A. Porretta and A. Terracina, *Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **163** (2002), 87-124.

[12] E. Yu. Panov, *Existence and strong pre-compactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux*, Arch. Rational Mech. Anal., 195 (2010), 643-673.

[13] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, 136–212. Pitman, Boston, Mass. London, (1979).

[14] A. Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal., **160** (2001), 181-193.

[15] H. Watanabe and S. Oharu, *BV-entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations*, Adv. Differential Equations **15**(7-8) (2010), 757-800.

[16] H.Watanabe and S. Oharu, *Strongly degenerate parabolic equations with nonlocal convective terms*, preprint.

[17] W. P. Ziemer, "Weakly differentiable functions", Springer-Verlag, New York, (1989).