数理解析研究所講究録
第1810巻 2012年 39-58

交差拡散を伴う数理生態学モデルについて

早稲田大学・理工学術院　山田　義雄 (Yoshio Yamada)
Faculty of Science and Engineering,
Waseda University

1 SKT モデル

1.1 非線形項を持つ Lotka-Volterra 競合モデル

本論文では次の形の非線形拡散方程式系を考える：

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta\{(d_1+\gamma_1 u+\alpha v)u\} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\
v_t = \Delta\{(d_2+\beta u+\gamma_2 v)v\} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\
\text{または } u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\
u(\cdot,0) = u_0 \geq 0,\ v(\cdot,0) = v_0 \geq 0 & \text{in } \Omega.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

ここで Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ R^N の有界領域，$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ は境界における外向き法線方向の微分，a_i, b_i, c_i, d_i は正定数，α, β, γ_i $(i=1,2)$ は非負の定数である．自然界においては，同一の棲息領域で生存競争をする二つの競合種について，棲み分けの行われていることがしばしば観測される．この方程式系はそのような棲み分け現象を記述するために提起されたモデルであり，u, v は二つの競合種の個体数密度を表す．ここで特徴的な点は，拡散係数が個体数密度に依存するような非線形拡散を伴うことである．非線形拡散をもたらす係数のうち α, β は**交差拡散 (cross-diffusion) 係数**, γ_1, γ_2 を**自己拡散 (self-diffusion) 係数**と呼ばれる．このような方程式に対して次のような問題を考える．

問題

1. 非定常問題 (1.1) の大域解を構成せよ．
2. (1.1) に対する定常問題の正値定常解の性質を調べよ．
3. 競合種の棲み分け現象は起こるか？

それではこのような問題を議論する前に，何故，交差拡散や自己拡散のような形の拡散が登場するのか，その経緯を簡単に説明しておこう．

1.2　数理生態学における拡散

数理生態学における拡散現象の考え方を Okubo-Levin [33] にしたがって概説する．空間変数を $x \in R^N$, 時間変数を $t \in R$ とし，場所 (x,t) における生物種の個体数密度を $S(x,t)$ とする．$S(x,t)$ の変化は拡散のみにより支配されているとする．このとき場所 x, 時間 t において単位時間に通過する生物種の個体数をベクトル $J(x,t)$ で表すと，拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) = -\mathrm{div}J(x,t)$$

が得られる．ここで $J(x,t)$ は flux (流量) と呼ばれ，密度 $S(x,t)$ にどのように依存するかに応じて色々な定式化がなされる．数理生態学においては，個々の生物が二点間を移動する際の確率が何に依存して決まるか，という点について三つのタイプが考えられている．

(i) 移動する確率が出発点と到達点の環境に無関係である．このとき J は

$$J(x,t) = -D(x)\nabla S(x,t)$$

で与えられる．ここで $D(x)$ は拡散係数である．これは flux J が密度勾配 ∇S に比例して密度の高い方から低い方へ移動すると仮定しており，拡散が Fick の法則にしたがうケースである．

(ii) 移動する確率が出発点の環境に依存する．この場合拡散が出発点での “反発力” によって引き起こされるといえる．このとき J は

$$J(x,t) = -\nabla\{D(x)S(x,t)\} = -D(x)\nabla S(x,t) - S(x,t)\nabla D(x)$$

で与えられる．ここで $D(x)$ は拡散係数である．このとき flux J は密度勾配 ∇S と ∇D のベクトル和になり，密度 S の低い方向と拡散係数 D の低い方向への和として向き付けられる．

(iii) 移動する確率が到達点の環境に依存する．このとき拡散は到達点での “吸引力” によって引き起こされるといえる．このとき J は

$$J(x,t) = -D(x)^2\nabla\left\{\frac{S(x,t)}{D(x,t)}\right\} = -D(x)\nabla S(x,t) + S(x,t)\nabla D(x)$$

で与えられる．ここで $D(x)$ は拡散係数である．このとき flux J は密度勾配 ∇S と ∇D のベクトル和になるものの，密度 S の低い方向と拡散係数 D の高い方向への和として向き付けられる．

1.3　線形拡散を伴う Lotka-Volterra 型競合モデル

R^N の滑らかな有界領域 Ω において二種の競合生物種が生存競争しているとする．二種の個体数密度を u, v とするとき，u, v の変化は Lotka-Volterra のシステムによって与えられるとする．

まず線形拡散の場合を考え，境界 $\partial\Omega$ においては同次 Neumann 境界条件を設ける：

$$\begin{cases} u_t = d_1\Delta u + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty), \\ v_t = d_2\Delta v + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) & \text{in } \ \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \ \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 \geq 0, \quad v(\cdot,0) = v_0 \geq 0 & \text{in } \ \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

ここで $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 1,2)$ は正定数である．このシステム (1.2) は有界な大域解 (u,v) を一意的に持つことはよく知られている．解の $t\to\infty$ における漸近挙動についても，詳しい結果が知られており，対応する定常問題

$$\begin{cases} d_1\Delta u + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) = 0 & \text{in } \ \Omega, \\ d_2\Delta v + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) = 0 & \text{in } \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

の解集合と深く関わっている．定常問題 (1.3) は，非負値定数定常解として

$$(0,0), \quad \left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right), \quad \left(0, \frac{a_2}{c_2}\right),$$

の他，$\min\{b_2/b_1, c_2/c_1\} < a_2/a_1 < \max\{b_2/b_1, c_2/c_1\}$ の場合には唯一つの正値定数定常解

$$(u^*, v^*) := \left(\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1c_2 - b_2c_1}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1c_2 - b_2c_1}\right)$$

を持つ．(1.2) の解の挙動は競合のタイプ；(1) $b_2c_1 < b_1c_2$ (weak competitioin), (2) $b_2c_1 > b_1c_2$ (strong competition), によって異なる．

(1) $b_2c_1 < b_1c_2$ の場合

(i) $a_2/a_1 > c_2/c_1$ のとき: $(0, a_2/c_2)$ はグローバル・アトラクタである．

(ii) $c_2/c_1 > a_2/a_1 > b_2/b_1$ のとき： (u^*, v^*) はグローバル・アトラクタである．

(iii) $b_2/b_1 > a_2/a_1$ のとき: $(a_1/b_1, 0)$ はグローバル・アトラクタである．

したがって線形拡散モデル (1.2) の任意の解は $t\to\infty$ とともに定数定常解に収束することがわかる．この場合，空間的に非一様な定常解は存在しないし，棲み分け現象は起こらない．

(2) $b_2c_1 > b_1c_2$ の場合

(i) $a_2/a_1 > b_2/b_1$ のとき: $(0, a_2/c_2)$ はグローバル・アトラクタである．

(ii) $b_2/b_1 > a_2/a_1 > c_2/c_1$ のとき: $(0,0), (u^*, v^*)$ はともに不安定であり，$(a_1/b_1, 0), (0, a_2/c_2)$ はともに漸近安定である．

(iii) $c_2/c_1 > a_2/a_1$ のとき: $(a_1/b_1, 0)$ はグローバル・アトラクタである．

ここで (ii) の場合に，非定数定常解が現れ，これが安定となる可能性がある．しかし，Kishimoto-Weinberger [15] により，線形拡散項を伴う競合モデル (1.2) の非定数定常解は，領域が凸集合ならば，不安定であることが示されている．したがって安定な棲み分け現象は起こらない．

以上 (1),(2) いずれの場合も，線形拡散を伴う場合は，(1.3) は安定な非定数非負値解を持たない．

1.4 非線形拡散の導入–SKT モデル–

競合モデルにおいて，線形拡散のみを考えているだけでは，一般には安定な棲み分け現象が起こらない．このような状況のもとで，Shigesada-Kawasaki-Teramoto [34] は，二つの競合種の棲み分け現象を記述するために次のような非線形拡散を伴うモデル

$$\begin{cases} u_t = \Delta\{(d_1 + \gamma_1 u + \alpha v)u\} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = \Delta\{(d_2 + \beta u + \gamma_2 v)v\} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{cases} \tag{1.4}$$

を提起した．ここで $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ は非負の定数である．(1.4) において，個体数密度 u, v に依存する非線形拡散の意味を述べておこう．u の方程式において，flux J は

$$\begin{aligned} J &= -\nabla\{(d_1 + \gamma_1 u + \alpha v)u\} \\ &= -(d_1 + 2\gamma_1 u + \alpha v)\nabla u - \alpha u \nabla v \end{aligned}$$

で与えられる．**1.2** で述べた数理生態学における拡散の意味を考えると，Fick の法則による通常の線形拡散に加え，"反発力"に基く拡散を考慮したものである．ここでは拡散を引き起こす反発力が，個体数密度に応じて強くなるものと仮定している．したがって，

flux J の方向: u の少ない方向＋ v の少ない方向

となる．なお，非線形拡散の係数について α, β は交差拡散 (cross-diffusion) 係数，γ_1, γ_2 は自己拡散 (self-diffusion) 係数と呼ばれる．

以後，上のシステム (1.4) を SKT モデルと呼ぶことにしよう．このシステムが提起されて以来，多くの数学者により研究され，とりわけ棲み分け現象に対応する非定数の定常解の存在やその安定性が調べられてきた．例えば空間次元 $N = 1$ の場合に限定すると，Mimura-Kawasaki [29] により，交差拡散係数の一つが大きくなるにつれ，定数定常解が不安定化し，非定数の定常解の分岐が実現されることが，局所分岐理論 ([6]) を適用することにより示された．その後，振幅の大きい非定数定常解が特異摂動法を用いて，Mimura [28], Mimura-Nishiura-Tesei-Tsujikawa [30] により構成されている．また，このような解が安定であることが，Kan-on [13] により証明されている．さらに，どのような形状の定常解が存在するか，という問題についても研究が始まり，Wu [38, 39], Wu-Xu [40] により，遷移層やスパイクを伴う解の存在が示されている．

なお，定常解の分岐構造や数値シミュレーションに関する結果については，Iida-Mimura-Ninomiya [11]，Murakawa [31, 32]，山田 [47] の論文を参照してほしい．

このように，SKT モデルについて，空間次元が $N = 1$ の場合に限っても，解集合の構造は非常に複雑，かつ豊富である．一般次元の場合について，交差拡散の影響はどんな点に現れるかを

調べよう.

(I) **SKT モデルに対する数学的問題–非定常問題–**

SKT モデル (1.4) について，重要な問題の一つは時間大域解が存在するか否かを調べることである．一般の非線形拡散については，残念ながら満足できる結果が得られていない．ここでは次の形の非定常問題

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta\{(d_1 + \gamma_1 u + \alpha v)u\} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = \Delta\{(d_2 + \gamma_2 v)v\} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}
$$

(ただし，$\alpha > 0, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$) に限定して考える．我々の目標は次の課題に答えることである．

問題

任意の空間次元 N において，任意の初期値に対する (P) の時間大域解を構成せよ．

(II) **SKT モデルに対する数学的問題–定常問題–**

SKT モデル (1.4) に対応する定常問題は次のようになる：

$$
\text{(SPN)} \qquad \begin{cases} \Delta\{(d_1 + \gamma_1 u + \alpha v)u\} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\{(d_2 + \beta u + \gamma_2 v)v] + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

上の定常問題 (SPN) について定数定常解の存在自体の結果は線形拡散の場合と同様である．したがって重要なことは次の課題に答えることである．

問題

$\alpha > 0$ または $\beta > 0$ の下で (SPN) の非定数正値解の存在・非存在を調べよ．

定常問題の構造については，境界条件を同次 Dirichlet 境界条件に置き換えると様相が大きく異なる：

$$
\text{(SPD)} \qquad \begin{cases} \Delta\{(d_1 + \gamma_1 u + \alpha v)u\} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\{(d_2 + \beta u + \gamma_2 v)v] + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

この定常問題の場合，自明な定数定常解は $(0, 0)$ のみである．したがって，$(u^*, 0)$ や $(0, v^*)$，ただし $u^* > 0, v^* > 0$, の形の半自明解，さらには正値解を構成することが重要となる．我々の目標は次の問題に答えることである．

問題

$\alpha > 0$ または $\beta > 0$ の下で (SPD) の正値解集合の構造を解明せよ.

2 SKT モデルに対する非定常問題–時間大域解の存在–

SKT モデルに対する非定常問題を扱うとき，最初に必要となるのが局所解の存在定理である. $L^p(\Omega)$ 空間の枠組で議論するときには，Amann によって得られた次の結果が有用である.

定理 2.1 (Amann [1]; **局所解の存在定理**). $p > N$ に対し $u_0, v_0 \in W_p^1(\Omega)$ とする. このとき (1.1) は次の性質をみたす解 (u,v) を一意にもつ：

$$u, v \in C([0,T); W_p^1(\Omega)) \cap C((0,T); W_p^2(\Omega)) \cap C^1((0,T); L_p(\Omega)),$$

ただし $T > 0$ は解の最大存在時間である. さらに

$$\sup_{0\le t<T} \|u(t)\|_{W_p^1} < \infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{0\le t<T} \|v(t)\|_{W_p^1} < \infty$$

ならば $T = \infty$ である.

この局所解の存在定理は，境界条件が Neumann 条件の場合も Dirichlet 条件の場合もどちらのケースでも成立する. さらに，古典解の範囲で議論する際には次の結果が知られている ([19]).

定理 2.2 (**局所解の存在定理**). 非負値関数 (u_0, v_0) が $\lambda > 0$ に対して $u_0, v_0 \in C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$, および $\partial\Omega$ において $\partial u_0/\partial n = \partial v_0/\partial n = 0$ をみたすとする. このとき同次 Neumann 境界条件に対する (1.1) の解 (u,v) で

$$u, v \in C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega} \times [0,T))$$

をみたすものが唯一つ存在する. ここで T は解の最大存在範囲を定める正数である.

注意 2.1. 定理 2.2 において，Dirichlet 境界条件に対応する結果は初期関数 u_0, v_0 のみたすべき境界条件を "$\partial\Omega$ において $u_0 = v_0 = 0$" に置き換えれば，定理の主張がそのまま成立する.

我々の課題は SKT モデル (P) に対する時間大域解を構成することである. ポイントは定理 2.1, 2.2 を適用するために，解のアプリオリ評価を求めることである. 空間次元 $N = 1$ の場合，J. U. Kim [14] の結果 ($d_1 = d_2$) の他，S. A. Shim [35] により，解の一様有界な評価が得られている.

一般次元の場合，多くの研究者により SKT モデルに対する大域解の存在問題が取り扱われている. Choi-Lui-Yamada [4, 5], Deuring [10], Ichikawa-Yamada [12], Le [20, 21], Le-Nguyen [23], Le-L.V.Nguyen-T.T.Nguyen [22], Lou-Ni-Wu [26], Tuộc [36, 37], Yagi [41, 42], らの研究を参照してほしい.

解の評価の難しさがどこにあるかを説明しよう. (P) の解 (u,v) について，初期値が非負であるならば，解の正値性

$$u(x,t) \ge 0, \quad v(x,t) \ge 0$$

は最大値原理により示すことができる．難しいのは解の上からの評価を求めることである． u は $Q_T := \Omega \times [0,T]$ で存在するものとする．(P) の第 1 方程式より

$$u_t = (d_1 + 2\gamma_1 u + \alpha v)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \tilde{a_i}(x,t)u_{x_i} + u(\alpha\Delta v + a_1 - b_1 u - c_1 v)$$

となる．ただし $\tilde{a}_i(x,t) = 2\gamma_1 u_{x_i}(x,t) + 2\alpha v_{x_i}(x,t)$. ここで $M := \max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = u(x^*,t^*), (x^*,t^*) \in \Omega \times (0,T]$ と仮定する．このとき

$$u_t(x^*,t^*) \geq 0, \quad \Delta u(x^*,t^*) \leq 0, \quad \nabla u(x^*,t^*) = 0.$$

よって

$$\begin{aligned} 0 \leq u_t(x^*,t^*) &\leq u(x^*,t^*)(\alpha\Delta v(x^*,t^*) + a_1 - b_1 u(x^*,t^*) - c_1 v(x^*,t^*)) \\ &\leq M(\alpha\Delta v(x^*,t^*) + a_1 - b_1 M) \end{aligned}$$

となる．これより $M \leq (a_1 + \alpha\Delta v(x^*,t^*))/b_1$ が成立する．したがって $\alpha = 0$ なら，$M \leq a_1/b_1$ となり u の上からの評価が得られる．しかし $\alpha > 0$ のときの評価を得るのは容易ではない．

最初に $N = 2$ の場合を考えると，Lou-Ni-Wu により次の結果が知られている．

定理 2.3 (Lou-Ni-Wu [26]; 大域解の存在定理). $N = 2$, $\alpha > 0, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ とする．$p > 2$ に対し $u_0, v_0 \in W_p^1(\Omega)$ とするとき (P) は次のクラスの解 (u,v) を一意的にもつ：

$$u, v \in C([0,\infty); W_p^1(\Omega)) \cap C((0,\infty); W_p^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L_p(\Omega)).$$

注意 2.2. Yagi [41] は $N = 2$ のとき $\gamma_1 > 0$ を仮定して (P) の大域解を構成した．定理 2.3 では $\gamma_1 > 0$ を仮定せずに大域解の存在を証明している点が大切である．

次に $N \geq 2$ の場合を考えるために，以下では次を仮定する．

(A.1) $u_0, v_0 \in C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda > 0$, かつ

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

(A.2) $\alpha > 0$ かつ $\gamma_1 > 0$.

仮定 (A.1),(A.2) の下，大域解の存在について次の結果が成り立つ．

定理 2.4 (Choi-Lui-Yamada [5]; 大域解の存在定理). (i) $\gamma_2 = 0$ とする．このとき次の性質をみたす (P) の解 (u,v) が一意的に存在する：

$$u, v \in C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega} \times [0,\infty)).$$

(ii) $\gamma_2 > 0$ および $N \leq 5$ とする．このとき次の性質をみたす (P) の解 (u,v) が一意的に存在する：

$$u, v \in C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega} \times [0,\infty)).$$

注意 2.3. 定理 2.4 において (i) の仮定 $\gamma_2 = 0$ は v に対する方程式の拡散項が線形であることを意味し, (ii) の仮定 $\gamma_2 > 0$ のもとでは v に対する方程式の拡散項が非線形となる. いずれの場合においても定理 2.4 の証明においては自己拡散係数 $\gamma_1 > 0$ であることが決定的に重要である.

この定理を証明するためには, 以下のアプリオリ評価が出発点となる.

アプリオリ評価 1.

$$u \geq 0 \quad \text{および} \quad m \geq v \geq 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega} \times [0, T],$$

ただし $m = \max\{a_2/c_2, \|v_0\|_\infty\}$.

この評価は放物型方程式に対する最大値原理を適応すればよい.

アプリオリ評価 2.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L_1(\Omega)} e^{a_1 T}, \qquad \|u\|_{L_2(Q_T)} \leq \|u_0\|_{L_1(\Omega)} e^{a_1 T}/b_1.$$

(P) の第 1 式 (u の方程式) を Ω で積分すれば, Gronwall の不等式を応用して上の評価が得られる.

アプリオリ評価 3.

命題 2.1. (u, v) を (P) の $[0, T]$ 上の解とする.

$$\begin{cases} 1 < q & \gamma_2 = 0 \text{ のとき}, \\ 1 < q < \dfrac{2(N+1)}{N-2} & \gamma_2 > 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

とするとき, 次をみたす正定数 C_T が存在する：

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L_q(\Omega)} \leq C_T, \qquad \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)} \leq C_T.$$

命題 2.1 の証明のアイデア. $\dfrac{1}{q}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega u^q\, dx = \int_\Omega u^{q-1} u_t\, dx$ の評価から始める. 整理すると

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|^q_{L^q(\Omega)} + c_0 \|\nabla(u^{(q+1)/2})\|^2_{L^2(Q_t)} \\ \leq &\|u_0\|^q_{L^q(\Omega)} + C_q |\Omega| + (q-1)\alpha \int_{Q_t} u^q \Delta v\, dxds, \end{aligned} \tag{2.1}$$

が成立する. ここで c_0, C_q は正定数である. なお, $\gamma_2 > 0$ のときには上の不等式の代わりに

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|^q_{L^q(\Omega)} + c_0 \|\nabla(u^{(q+1)/2})\|^2_{L^2(Q_t)} \\ \leq &\|u_0\|^q_{L^q(\Omega)} + C_q |\Omega| - (q-1)\alpha \int_{Q_t} \nabla u^q \cdot \nabla v\, dxds, \end{aligned} \tag{2.2}$$

を使う. 上の不等式 (2.1),(2.2) における

$$\int_{Q_t} u^q \Delta v\, dxds \qquad \text{または} \qquad \int_{Q_t} \nabla u^q \cdot \nabla v\, dxds$$

の評価がポイントである．詳しくは [5] を参照してほしい．

定理 2.4 の証明. 上記の三つのアプリオリ評価を利用する．v に対する $L_\infty(\Omega)$ 評価 と u に対する $L_q(\Omega)$ 評価を組み合わせる．このとき u, v 各々の方程式に放物型方程式の正則性理論を個別に適用すればよい．詳細は [5] を参照のこと．

命題 2.1 の $\gamma_2 > 0$ のケースについて，同様な評価が $1 < q < 4(N+1)/(N-2)$ のときに成立することが Tuộc [37] によって証明された．この結果，定理 2.4 は次のように拡張可能である．

定理 2.5 (**Tuộc [37]; 大域解の存在定理**). $\gamma_2 > 0$ かつ $N \leq 9$ とするとき次をみたす (P) の一意解 (u, v) が存在する：

$$u, v \in C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega} \times [0, \infty)).$$

これまでの結果は $\gamma_2 > 0$ の場合には，空間次元に制約を設けて時間大域解を構成してきた．$\gamma_2 > 0$ のとき空間次元 N に制約を置かないで (P) の時間大域解を構成できるだろうか？この点についても Tuộc の結果がある．

定理 2.6 (**Tuộc [36]; 大域解の存在定理**). $\gamma_2 > 0$ かつ $N \geq 1$ とする．このとき $\alpha < 2\gamma_2$ または $\alpha = 2\gamma_2, d_1 \leq d_2$ ならば (P) は次をみたす時間大域解 (u, v) をもつ：

$$u, v \in C^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega} \times [0, \infty)).$$

注意 2.4. 定理 2.6 の証明では解の L_p 評価を利用しない．$w = G(u, v)$ の形の新しい未知関数 w のみたす放物型方程式を導き，これに最大値原理を適用して，まず w の評価を求める．この評価を用いて次に u の評価を求めている．

非定常問題に対する未解決問題.

ここで，非定常問題 (P) に関する未解決問題についてまとめておこう．

1. $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ のとき N や α に制約を置かないで (P) の大域解を構成せよ．
   (大域解の存在定理; $N \leq 9$,　または $\alpha < 2\gamma_2$ など)

2. 交差拡散係数 $\alpha > 0$ 自己拡散係数 $\gamma_1 = 0$ の場合に (P) の時間大域解を構成せよ．
   (大域解の存在定理; $\gamma_1 = 0$, $N \leq 2$)

3. 大域解の一様評価を導くとともに対応するグローバル・アトラクタ, 指数アトラクタを調べよ．
   (Le 達 [16, 21, 22] の結果; $N \leq 5$ の場合でのアトラクタの存在, および
   Yagi [43, 44] の結果; $N = 2$ の場合での指数アトラクタの研究)

3 SKT モデルに対する定常問題–Neumann 境界条件–

この節のテーマは no-flux 条件下での (SPN) の非定数正値解を探すことである．まずそのような解の非存在が Lou-Ni により証明されている．

定理 3.1 (**Lou-Ni [24]; 非定数解の非存在定理 1**). $a_2/a_1 \neq b_2/b_1, a_2/a_1 \neq c_2/c_1$ とする．

(i) 正定数 $C_1 = C_1(a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha, \beta)$ が存在し，$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq C_1$ ならば (SPN) は非定数正値解を持たない.

(ii) $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ とする．このとき正定数 $C_2 = C_2(a_i, b_i, c_i, \alpha, \beta, \gamma_i)$ が存在し，$\max\{d_1, d_2\} \geq C_2$ ならば (SPN) は非定数正値解を持たない.

この定理3.1により，拡散係数 d_1, d_2, 自己拡散係数 γ_1, γ_2 のうち一つでも大きいならば，非定数の正値解は存在しないことがわかる.

次に，交差拡散係数の役割について考えよう．議論を簡単にするため，以下では weak competition の場合

$$b_2/b_1 < a_2/a_1 < c_2/c_1 \tag{3.1}$$

に限定する.

定理 3.2 (**Lou-Ni [24]; 非定数解の非存在定理 2**). 仮定 (3.1) のもとで正定数 $C_3 = C_3(a_i, b_i, c_i)$ が存在し，次の条件 (i)〜(iii) のいずれかが成立すれば (u^*, v^*) は (SPN) の唯一つの正値解となる.

(i) $$\max\left\{\frac{\alpha}{d_i}, \frac{\beta}{d_i}, \frac{\gamma_j}{d_i};\quad i, j = 1, 2\right\} \leq C_3,$$

(ii) $$\max\left\{\frac{\beta}{d_1}\left(1 + \frac{\alpha}{d_1}\right), \frac{\alpha}{d_2}\left(1 + \frac{\beta}{d_2}\right)\right\} \leq C_3,$$

(iii) $$\max\left\{\frac{\beta}{\sqrt{d_1 d_2}}\left(1 + \frac{\alpha}{d_1}\right), \frac{\alpha}{\sqrt{d_1 d_2}}\left(1 + \frac{\beta}{d_2}\right)\right\} \leq C_3.$$

定理 3.2 により交差拡散係数 α, β が拡散係数 d_1, d_2 に比べ小さいならば非定数正値解は存在しないことがわかる.

それでは，非定数の正値解が存在するのはいかなる条件の下か，考えよう．ここでは交差拡散係数の 1 つ $\beta \geq 0$ を固定し，$\alpha > 0$ の関わり具合を調べる.

定理 3.3 (**Lou-Ni [24]; 非定数解の存在定理**). $a_1/a_2 > (b_1/b_2 + c_1/c_2)/2$ とする．正定数 $C_4 = C_4(a_i, b_i, c_i) < C_5 = C_5(a_i, b_i, c_i)$ および $\Lambda_1 = \Lambda_1(a_i, b_i, c_i, d_i, \beta, \gamma_i)$ が存在し，α, d_2, γ_2 が $\alpha \geq \Lambda_1, d_2 + 2v^*\gamma_2 \in (C_4, C_5)$ をみたすとき，(SPN) は非定数の正値解をもつ.

注意 3.1. 条件 $a_1/a_2 > (b_1/b_2 + c_1/c_2)/2$ を $a_2/a_1 > (b_2/b_1 + c_2/c_1)/2$ に置き換えても，類似の定理が成立する．また，weak competition の条件 (3.1) の代わりに strong competition の条件が成立する場合も非定数の正値解の存在を示すことができる．詳しくは [24] を参照してほしい.

定理3.3により，適当な条件下では交差拡散係数 α を大きくすれば，非定数の正値解が出現することがわかる．しかし，このような非定数解の形状，安定性，個数などに関する詳しい性質については，十分な情報は得られない．そこで $\beta \geq 0$ を固定し，$\alpha \to \infty$ とするとき，(SPN) の正値解の挙動はどのようになるかを調べよう．α が大きいときの (SPN) の正値解を (u_α, v_α) とする．$\alpha \to \infty$ とするときの (u_α, v_α) の極限がみたす極限問題を導出し，極限問題を解析することにより，もとの問題 (SPN) に関する情報を求めよう．このアイデアは次のようなフロー・チャートにまとめられる.

$$(u_\alpha, v_\alpha) \to (u_\infty, v_\infty) \qquad (\alpha \to \infty)$$
$$\Downarrow$$
(u_∞, v_∞) のみたす極限問題
$$\Downarrow$$
極限問題の解析
$$\Downarrow$$
(SPN) (α: 非常に大きい場合) の正値解集合の構造

(SPN) において $\beta \geq 0$ を固定し，$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ とおいて，極限移行しよう．このとき (SPN) は次のようになることに注意する：

$$\begin{cases} \Delta\{(d_1 + \alpha v)u\} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\{(d_2 + \beta u)v\} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

定理 3.4 (Lou-Ni [25]; 正値解の一様有界性定理). $1 \leq N \leq 3$ とする．任意の $\eta > 0$ に対して，$d_2 \geq \eta, 0 < b_2 \leq 1/\eta$ ならば，正定数 $\delta_0 = \delta_0(\eta, a_i, b_1, c_2)$ が存在して，$\beta/d_2 \leq \delta_0$ が成り立つとき (3.2) の任意の正値解 (u, v) は

$$\|u\|_\infty \leq 1/\delta_0, \qquad \|v\|_\infty \leq 1/\delta_0$$

をみたす．

定理 3.4 により，(3.2) の正値解 (u, v) について α に無関係な一様有界評価が得られる．ここで

$$U := (d_1 + \alpha v)u, \quad V := (d_2 + \beta u)v$$

とおけば，U, V は

$$\begin{cases} -\Delta U = u(a_1 - b_1 u - c_1 v) \ \text{ in } \ \Omega, \ \ \partial U/\partial n = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega, \\ -\Delta V = v(a_2 - b_2 u - c_2 v) \ \text{ in } \ \Omega, \ \ \partial V/\partial n = 0, \ \text{ on } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

をみたす．上の楕円型方程式の右辺は一様有界であるから，楕円型方程式の正則性評価を利用すれば，U, V について一様な $W_p^2(\Omega)$ 評価が得られる．この結果，$\alpha \to \infty$ とするとき，正値解の極限関数のみたすべき極限問題を導出することができる．

定理 3.5 (Lou-Ni [25]; 正値解の極限定理). $1 \leq N \leq 3$ の下で (u_n, v_n) を (3.2)($\alpha = \alpha_n$) の正値解で，$\alpha_n \nearrow \infty$ とする．このとき適当な部分列を選べば，以下の (i) または (ii) が成立する．

(i) $(u_n, \alpha_n v_n) \to (u^*, w^*)$ (Ω で一様収束)，ここで (u^*, w^*) は次のシステムの正値解である：

$$\begin{cases} \Delta\{(d_1 + w^*)u^*\} + u^*(a_1 - b_1 u^*) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\{(d_2 + \beta u^*)w^*\} + w^*(a_2 - b_2 u^*) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u^*}{\partial n} = \dfrac{\partial w^*}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

(ii) $(u_n, v_n) \to (\dfrac{\tau^*}{v^*}, v^*)$ (Ω で一様収束), ここで τ^* は正定数, v^* は正値関数で τ^*, v^* は次のシステムをみたす：

$$\begin{cases} d_2\Delta v^* + v^*(a_2 - c_2 v^*) - b_2\tau^* = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial v^*}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{v^*}\left(a_1 - \frac{b_1\tau^*}{v^*} - c_1 v^*\right) dx = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

この定理により, $\alpha \to \infty$ のとき, 正値解 (u_α, v_α) の極限がみたす極限問題には二つのタイプがあることがわかる. (i) のケースでは $\alpha v_\alpha \to w^*$ となるため, $v_\alpha \to 0$ である. この場合, 棲み分け現象は起きない.

一方 (ii) のケースでは $u_\alpha v_\alpha \to \tau^*$ (正定数) となるため, u_α, v_α はともに共存する. さらに, (3.4) をみたす非定数解 v^* の存在が示されれば, α が十分大きいときには u_α, v_α は棲み分け現象に対応する解となる.

極限問題については, (3.4) について $N = 1$ の場合に, 非常に詳細な結果が得られている：$\Omega = (0,1)$ とするとこのシステムは

$$\begin{cases} d_2 v_{xx} + v(a_2 - c_2 v) - b_2\tau = 0 & \text{in } (0,1), \\ v_x(0) = v_x(1) = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{v}\left(a_1 - \frac{b_1\tau}{v} - c_1 v\right) dx = 0, \end{cases}$$

となる. この極限問題は shadow system と呼ばれ, 非定数解 v の存在・非存在が Lou-Ni-Yotsutani [27, 48] によって詳しく調べられている. また, Wu-Xu [40] は shadow system の解と (3.2) の解との関係や安定性について詳細な結果を導いている.

定常問題に対する未解決問題.

ここで, 定常問題 (SPN) あるいは (3.2) についての未解決問題をまとめておこう.

1. $\alpha > 0$ のとき N に制約を置かないで (3.2) の正値解の一様有界性を示せ.
   (解のアプリオリ評価 $1 \le N \le 3$)
2. $N \ge 2$ の場合の極限問題 (3.4) の解構造を解明せよ.
3. 極限問題 (3.3) について非定数の正値解集合の構造を解明せよ.

4 SKT モデルに対する定常問題–Dirichlet 境界条件–

この節では同次 Dirichlet 境界条件の下での (SPD) の正値解集合の構造について調べよう. とくに交差拡散の影響を調べるため, 自己拡散については

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

とする．さらに次の様な変換を行う：

$$\tilde{u}=\frac{b_1}{d_1}u,\ \tilde{v}=\frac{c_2}{d_2}v,\ a=\frac{a_1}{d_1},\ b=\frac{a_2}{d_2},\ c=\frac{c_1d_2}{c_2d_1},\ d=\frac{b_2d_1}{b_1d_2},\tilde{\alpha}=\frac{d_2\alpha}{c_2d_1},\ \tilde{\beta}=\frac{d_1\beta}{b_1d_2}.$$

$\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ を改めて u,v,α,β と置き換えると，(SPD) は次の形に書き換えられる：

$$\begin{cases}\Delta\{(1+\alpha v)u\}+u(a-u-cv)=0 & \text{in }\ \Omega,\\ \Delta\{(1+\beta u)v\}+v(b-du-v)=0 & \text{in }\ \Omega,\\ u=v=0 & \text{on }\ \partial\Omega.\end{cases}\tag{4.1}$$

我々の課題は次のようになる．

問題

(4.1) の正値解集合の構造を明らかにせよ．

4.1 準備

(4.1) の解析に必要な結果・理論などを準備しておく．

(1) 主要固有値

$q\in C(\overline{\Omega})$ に対して次の固有値問題を考える：

$$\begin{cases}-\Delta w+q(x)w=\lambda w & \text{in }\ \Omega,\\ w=0 & \text{on }\ \partial\Omega.\end{cases}$$

対応する主要固有値を $\lambda_1(q)$ で表すと

$$\lambda_1(q)=\inf_{w\in H_0^1(\Omega),\|w\|_{L_2(\Omega)}=1}\int_\Omega\{|\nabla w|^2+q(x)w^2\}dx$$

が成り立つ．とくに，$\lambda_1(0)=:\lambda_1$ と表す．

(2) ロジスティック方程式の正値解

(4.1) の半自明解を議論するとき，次のロジスティック方程式に対する正値解が登場する：

$$\Delta w+w(a-w)=0\quad \text{in }\ \Omega,\quad w=0\quad \text{on }\ \partial\Omega.\tag{4.2}$$

このとき (4.2) が正値解 $w=\theta_a$ をただ一つ持つための必要十分条件は $a>\lambda_1$ であることが知られている．この結果より (4.1) は半自明解

$$(u,v)=(\theta_a,0)\quad \text{if }\ a>\lambda_1,\qquad \text{および}\qquad (u,v)=(0,\theta_b)\quad \text{if }\ b>\lambda_1\tag{4.3}$$

を持つことがわかる．(4.1) の正値解については，存在するのは

$$a>\lambda_1,\quad b>\lambda_1$$

のときに限ることが知られているので，今後はこの条件を常に仮定しよう．

(3) 半自明解の安定性

(4.3) で定義される半自明解の安定性を調べる．まず $(\theta_a, 0)$ について安定性が交代するのは a, b が

$$S_1(a,b;\beta) := \lambda_1\left(\frac{d\theta_a - b}{1+\beta\theta_a}\right) = 0$$

をみたす場合であることがわかる．この結果より ab 平面に次の曲線を定義する:

$$\begin{aligned} S_1(\beta): \ &= \{(a,b)\in R^2;\ S_1(a,b;\beta)=0,\ a>\lambda_1,\ b>\lambda_1\} \\ &= \{(a,b)\in R^2;\ b=f(a;\beta),\ a>\lambda_1\}. \end{aligned}$$

ただし，$f(a;\beta)$ は a について狭義単調増加な連続関数であり，$f(\lambda_1;\beta)=\lambda_1$ をみたす（図 1 参照）.

同様に $(0,\theta_b)$ が単調性を交代するのは

$$S_2(a,b;\alpha) := \lambda_1\left(\frac{c\theta_b - a}{1+\alpha\theta_b}\right) = 0$$

をみたすときである．ここで曲線 $S_1(\beta), S_2(\alpha)$ を与える関数 $f(a;\beta), g(a;\alpha)$ を利用し，ab 平面に次の曲線を定義する：

$$\begin{aligned} S_2(\alpha): &= \{(a,b)\in R^2;\ S_2(a,b;\alpha)=0,\ a>\lambda_1,\ b>\lambda_1\} \\ &= \{(a,b)\in R^2;\ b=g(a;\alpha),\ a>\lambda_1\}. \end{aligned}$$

ここで $g(a;\alpha)$ は a について狭義単調増加な連続関数で $g(\lambda_1;\alpha)=\lambda_1$ をみたす（図 1 参照）.

(4) 反応拡散方程式系の正値解

同次 Dirichlet 境界条件の下で，解の存在を示すために，写像度理論や分岐理論が有用である．例えば，Blatt-Brown [2], Cantrell-Cosner [3], Dancer [7, 8, 9], Yamada [46] などの論文を参照してほしい．

ab 平面に次の集合を定義する：

$$\begin{aligned} \Sigma^+(\alpha,\beta) \ &= \{(a,b)\in R^2; f(a;\beta)<b<g(a;\alpha),\ a>\lambda_1\} \\ \Sigma^-(\alpha,\beta) \ &= \{(a,b)\in R^2; g(a;\alpha)<b<f(a;\beta),\ a>\lambda_1\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

このとき，半自明解の安定性について次の事実が知られている（[46]）：

(i) $(a,b)\in\Sigma^+(\alpha,\beta)$ ならば，$(\theta_a,0)$ および $(0,\theta_b)$ はとも不安定である．

(ii) $(a,b)\in\Sigma^-(\alpha,\beta)$ ならば，$(\theta_a,0)$ および $(0,\theta_b)$ はともに漸近安定である．

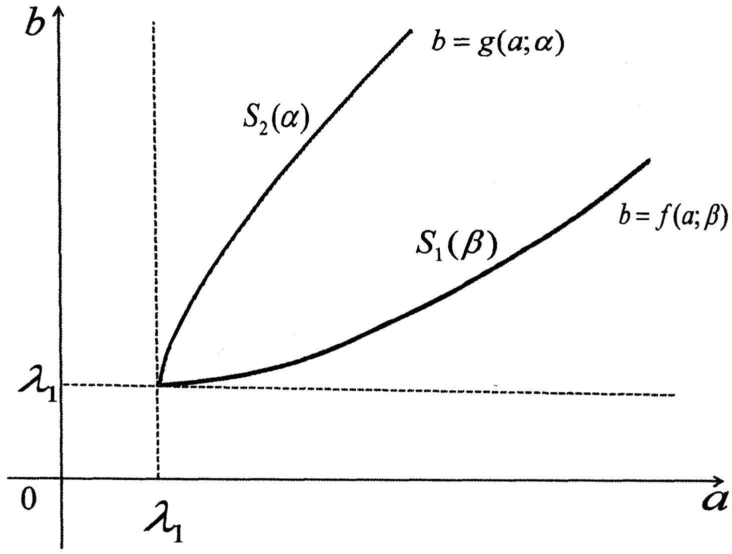

図 1　曲線 $S_1(\beta)$ と $S_2(\alpha)$

4.2　正値解の存在と有界性

(4.1) の正値解の存在について次の結果が成立する.

定理 4.1 (Yamada [45]; 正値解の存在定理). $(a,b) \in \Sigma(\alpha,\beta) := \Sigma^+(\alpha,\beta) \cup \Sigma^-(\alpha,\beta)$ ならば (4.1) は正値解を少なくとも一つもつ. ここで $\Sigma^+(\alpha,\beta), \Sigma^-(\alpha,\beta)$ は (4.4) により定義される集合である.

さらに正値解について, α,β と無関係に一様有界であることが示される.

定理 4.2 (Kuto-Yamada [17, 18]; 正値解の有界性定理). (u,v) を (4.1) の正値解とする. このとき α,β に無関係な正数 C_1, C_2 が存在し

$$0 \le u(x) \le C_1, \qquad 0 \le v(x) \le C_2, \qquad x \in \Omega$$

が成り立つ.

注意 4.1. Neumann 条件の場合と同様に

$$U := (d_1 + \alpha v)u, \quad V := (d_2 + \beta u)v$$

とおくことにより, U, V に対する $W_p^2(\Omega)$ 評価を導くことができる. しかし Neumann 条件と大きく異なり, 定理 4.2 では空間次元の制約が不要である.

4.3 正値解の漸近挙動

定理 4.2 により，(4.1) の正値解の一様有界性が示されたので，交差拡散係数を無限大とするときの漸近挙動を調べることができる．以下では，$\alpha = 0$ と固定し，$\beta \to \infty$ として考える．(4.1) $(\alpha = 0)$ の正値解を (u_β, v_β) として，$\beta \to \infty$ での挙動はどうであろうか？また正値解の存在領域 $\Sigma(0,\beta)$ の挙動はどうであろうか？

次のような流れで議論する：

$$(u_\beta, v_\beta) \to (u_\infty, v_\infty) \qquad (\beta \to \infty)$$
$$\Sigma(0,\beta) \to \Sigma^\infty \qquad (\beta \to \infty)$$
$$\Downarrow$$
(u_∞, v_∞) のみたす極限問題
$$\Downarrow$$
極限問題の解析
$$\Downarrow$$
(4.1) $(\alpha = 0, \beta$: 非常に大きい）の正値解集合の構造

まず，共存領域 $\Sigma(0,\beta)$ の挙動については各 $b > \lambda_1$ に対して $b = f(a;\beta)$ の逆関数を $a = f^{-1}(b;\beta)$ と表わすとき次の結果が成立する：

$$\lim_{\beta\to\infty} f^{-1}(b;\beta) = \lambda_1.$$

この結果，共存領域 $\Sigma(0,\beta)$ は β が大きくなるとともに拡大し，

$$\Sigma^\infty = \{(a,b) \in R^2; \lambda_1 < a < \lambda_1(c\theta_b), \quad b > \lambda_1\}$$

に近づく．

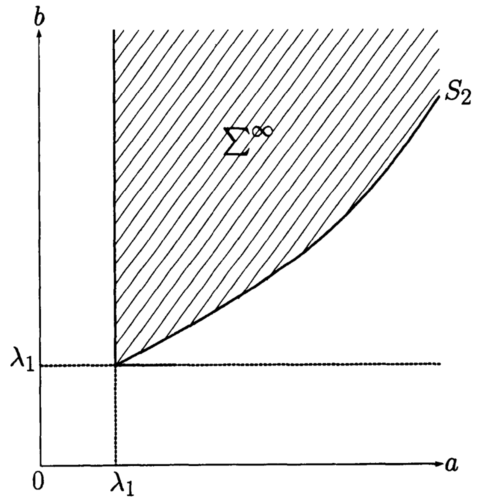

図 2　共存領域の極限

ここで $(a,b) \in \Sigma^\infty$ を固定し, $\beta \to \infty$ とすることにより正値解の極限関数がみたす極限問題を導こう.

定理 4.3 (Kuto-Yamada [17, 18]; 正値解の極限定理). (u_n, v_n) は (4.1) $(\beta = \beta_n)$ の正値解で, $\beta_n \to \infty$ とする. このとき $\{\beta_n \|u_n\|_\infty\}$ は有界となり, $\{(u_n, v_n)\}$ の部分列を適当に選べば (同じ $\{(u_n, v_n)\}$ で表す), 次の収束が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty} (\beta_n u_n, v_n) = (w_*, v_*), \quad \Omega\text{で一様収束}.$$

ここで (w_*, v_*) は

$$\begin{cases} \Delta w_* + w_*(a - cv_*) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\{(1+w_*)v_*\} + v_*(b - v_*) = 0 & \text{in } \Omega, \\ w_* = v_* = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

をみたす正値解である.

注意 4.2. Neumann 条件の場合と異なり, 正値解のみたすべき極限問題は (4.5) とただ一つに定まる.

極限問題 (4.5) の正値解の存在など, 解構造については Kuto-Yamada [17] を参照してほしい. これにより β が大きいときの (4.1) の正値解の情報が得られる. とくに非常に大きな交差拡散係数 β に対しては, (4.1) の正値解 (u, v) で

$$\|u\|_\infty = O(1/\beta) \quad \text{and} \quad \|v\|_\infty = O(1) \quad \text{as} \quad \beta \to \infty$$

をみたすものが存在するが, この解は半自明解 $(0, \theta_b)$ とは本質的に異なる.

しかし, Neumann 条件下と異なり, 同次 Dirichlet 条件の下では, 棲み分け現象に対応するような多様な正値解集合は期待できない.

4.4 未解決問題

ここで, 定常問題 (SPD) あるいは (4.1) についての未解決問題をまとめておこう.

1. $\alpha > 0$, $\beta \to \infty$ のときの正値解の漸近挙動を調べ, 極限関数のみたすべき方程式系を導け.
2. 極限問題 (4.5) の解構造を詳しく調べよ.

参考文献

[1] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II. Reaction-diffusion systems, Differential Integral Equations, **3** (1990), 13–75.

[2] J. Blatt and K. J. Brown, Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **97A** (1984), 21–34.

[3] R. S. Cantrell and C. Cosner, On the steady-state problem for the Volterra- Lotka competition model with diffusion, Houston J. Math., **13** (1987), 337-352.

[4] Y. S. Choi, R. Lui and Y. Yamada, Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with weak cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst., **9** (2003), 1193–1200.

[5] Y. S. Choi, R. Lui and Y. Yamada, Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with strongly coupled cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst., **10** (2004), 719–730.

[6] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. Anal., **8** (1971), 321–340.

[7] E. N. Dancer, On the indices of fixed points of mappings on cones and applications, J. Math. Anal. Appl., **91** (1983), 131–151.

[8] E. N. Dancer, On positive solutions of some pairs of differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **284** (1984), 729–743.

[9] E. N. Dancer, On positive solutions of some pairs differential equations, II, J. Differential Equations, **60** (1985), 236–258.

[10] P. Deuring, An initial-boundary-value problem for a certain density-dependent diffusion system, Math. Z., **194** (1987), 375–396.

[11] M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction, J. Math. Biology, **53** (2006), 617–641.

[12] T. Ichikawa and Y. Yamada, Some remarks on global solutions to quasilinear parabolic system with cross-diffusion, Funkcial. Ekvac., **43** (2000), 285–301.

[13] Y. Kan-on, Stability of singularly perturbed solutions to nonlinear diffusion systems arising in population dynamics, Hiroshima Math. J., **23** (1993), 509–536.

[14] J. U. Kim, Smooth solutions to a quasilinear system of diffusion equations for a certain population model, Nonlinear Anal. **8** (1984), 1121–1144.

[15] K. Kishimoto and H. F. Weinberger, The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction diffusion systems on convex domains, J. Differential Equations, **58** (1985), 15–21.

[16] H. Kuiper and Le Dung, Global attractors for cross-diffusion systems on domains of arbitrary dimension, Rocky Mountain J. Math., **37** (2007), 1645–1668.

[17] K. Kuto and Y. Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra competition systems with cross-diffusion, Applicable Anal. **89** (2010), 1037–1066.

[18] K. Kuto and Y. Yamada, On limit systems for some population models with cross-diffusion, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.

[19] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic type, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1988.

[20] D. Le, Cross-diffusion systems on n spatial dimensional domains, Indiana Univ. Math. J, **51** (2002), 625–643.

[21] D. Le, Global existence for a class of strongly coupled parabolic systems, Ann. Mat. Pura Appl., **185** (2006), 133–154.

[22] D. Le, L. V. Nguyen, T. T. Nguyen, Shigesada-Kawasaki-Teramoto model on higher dimensional domains, Electron J. Differential Equations **2003**, No. 72, 12pp.

[23] D. Le and T. T. Nguyen, Global existence for a class of triangular parabolic systems on domains of arbitrary dimension, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 1985–1992.

[24] Y. Lou and W. -M. Ni, Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion, J. differential Equations, **131** (1996), 79–131.

[25] Y. Lou and W. -M. Ni, Diffusion vs cross-diffusion: an elliptic approach, J. differential Equations, **154** (1999), 157–190.

[26] Y. Lou, W. -M. Ni and Y. Wu, On the global existence of a cross-diffusion system, Discrete Contin. Dynam. Systems, **4** (1998), 193–203.

[27] Y. Lou, W. -M. Ni and S. Yotsutani, On a limiting system in the Lotka -Volterra competition with cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst., **10** (2004), 435-458.

[28] M. Mimura, Stationary pattern of some density-dependent diffusion system with competitive dynamics, Hiroshima Math. J., **11** (1981), 621–635.

[29] M. Mimura and K. Kawasaki, Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations, J. Math. Biology, **9** (1980), 49–64.

[30] M. Mimura, Y. Nishiura, A. Tesei and T. Tsujikawa, Coexistence problem for two competing species models with density-dependent diffusion, Hiroshima Math. J. **14** (1984), 425–449.

[31] 村川秀樹, 反応拡散系近似：理論と応用, 日本数学会 2011 年度年会, 応用数学・特別講演, 2011 年.

[32] H. Murakawa, A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **5** (2012), 147–158.

[33] A. Okubo, L. A. Levin, Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives, Second edition, Interdisciplinary Applied Mathematics, **14**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[34] N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto, Spatial segregation of interacting species, J. Theor. Biol., **79** (1979), 83–99.

[35] S. -A. Shim, Uniform boundedness and convergence of solutions to the systems with a single nonzero cross-diffusion, J. Math, Anal. Appl., **279** (2003), 1–21.

[36] P. V. Tuộc, Global existence of solutions to Shigesada-Kawasaki-Teramoto cross-diffusion systems on domains of arbitrary dimensions, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 3933–3941.

[37] P. V. Tuộc, On global existence of solutions to a cross-diffusion system, J. Math. Anal. Appl., **343** (2008), 826–834.

[38] Y. Wu, Existence of stationary solutions with transition layers for a class of cross-diffusion systems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect A, **132** (2002), 1493–1511.

[39] Y. Wu, The instability of spiky steady states for a competing species model with cross-diffusion, J. Differential Equations, **213** (2005), 289–340.

[40] Y. Wu and Q. Xu, The existence and structure of large spiky steady states for S-K-T competition systems with cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst., **29** (2011), 367–385.

[41] A. Yagi, Global solution to some quasilinear parabolic system in population dynamics, Nonlinear Anal., **21** (1993), 603–630.

[42] A. Yagi, A priori estimates for some quasilinear parabolic system in population dynamics, Kobe J. Math., **14** (1997), 91–108.

[43] A. Yagi, Exponential attractors for competing species model with cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst. **22** (2008), 1091–1120.

[44] 八木厚志, 指数アトラクタ, 数学, **61** (2009), 187-208.

[45] Y. Yamada, Coexistence states for Lotka-Volterra systems with cross-diffusion, Fields Institute Communications. **25** (2000), 551–564.

[46] Y. Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra systems with cross-diffusion, Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol. **6** (ed. M. Chipot), Elsevier, Amsterdam (2008), 411–501.

[47] 山田義雄, 交差拡散を伴う非線形拡散方程式系–数理生態学に現れる反応拡散方程式系–, 数学, **64** (2012), 発表予定.

[48] 四ツ谷晶二, Multiplicity of solutions to a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion, RIMS 研究集会「散逸系の数理–解構造と大域挙動–」, 2010 年.