

# Support splitting and merging phenomena in some nonlinear diffusion

## ある非線形拡散現象におけるサポートの分離・併合について

大阪工業大学・工学部 友枝 謙二 (Kenji Tomoeda)  
Osaka Institute of Technology

**Abstract.** Numerical experiments suggest interesting properties in the several fields of fluid dynamics, plasma physics and population dynamics. Among such properties, there is a striking manifestation of *support splitting and merging phenomena* in the behaviour of non-stationary seepage. From numerical and mathematical points of view, such phenomena are realized and justified in an initial-boundary value problem for a porous media equation with absorption.

**Keywords:** nonlinear diffusion, free boundary, interface, support splitting, support merging, difference scheme.

### 1. はじめに

多孔性媒質流れにおける浸透流の変化について数値解析及び数学解析の観点から紹介する. 中でも 領域内での蒸発などによる吸収効果とその境界から流入してくる流れとのバランスによって浸透領域が分離したり併合したりする現象が生じる. 周りが海で囲まれた島ではその周囲から潮汐による影響を受け, 島全体が水没したりすることが考えられる. このような現象を再現する最も簡単な空間 1 次元のモデルは多孔性媒質流れを記述する方程式を用いることによって, 次の初期境界値問題として記述される [9], [11]. 浸透領域の変化は, この方程式の解のサポートの挙動としてとらえることができる.

$$(1) \quad \begin{cases} v_t(t, x) = (v^m)_{xx} - cv^p & \text{in } (0, \infty) \times (-L, L), \\ v(t, \pm L) = \psi_{\pm}(t) & \text{in } (0, \infty), \\ v(0, x) = v^0(x) & \text{in } (-L, L), \end{cases}$$

但し,  $v$  は流体の密度,  $v^0(x), \psi_{\pm}(t) \geq 0$  である. 本講究録では

$$(2) \quad m > 1, \quad 0 < p < 1, \quad c > 0, \quad m + p = 2$$

を仮定する. この方程式は プラズマ物理における熱の伝播を記述するのにも用いられている [10]. 数学解析の観点からは, (1) の弱解の存在と一意性及び比較定理が得られている [1], [3, 4], [6], [8].

初期値問題でのサポートの分離現象は Rosenau と Kamin によってその数値例が示されたが, 数学的証明は行われていない [10]. このことに動機付けられ, 著

者と中木はサポート分離を再現する数値計算法を構成し、更に、サポート分離・併合及びその繰り返しを現象を引き起こすための初期関数に対する十分条件を得た [7],[12].

初期境界値問題 (1) については Kersner がサポート分離を示したが、サポート分離後のその併合については考察していない [5].

このような現象の解析には収束性が保証された数値計算法を構築し、それを用いて (1) の解のサポートの挙動を調べることが大事である。更に次の方程式を満たす定常解  $w(x)$  とそのサポートのプロフィールを調べることも必要となる。

$$(3) \quad \begin{cases} (w^m)_{xx} - cw^p = 0 & \text{in } (-L, L), \\ w(-L) = \alpha', w(L) = \beta', & (\alpha' \text{ と } \beta' \text{ は正数}). \end{cases}$$

更に (1) の解  $v(t, x)$  の安定化 (stabilization) すなわち、 $t \rightarrow \infty$  時、 $v(t, x)$  が定常解  $w(x)$  に収束することを示す。

## 2. 差分法

$u = v^{m-1}$  と置いて (1) を以下のように書き直す。

$$(4) \quad \begin{cases} u_t = muu_{xx} + \frac{m}{m-1}(u_x)^2 - (m-1)c\chi_{u>0} & \text{in } (0, \infty) \times (-L, L), \\ u(t, \pm L) = (\psi_{\pm}(t))^{m-1} & \text{in } (0, \infty), \\ u(0, x) = u^0(x) \equiv (v^0(x))^{m-1} & \text{in } (-L, L), \end{cases}$$

ここで、吸収効果  $-cv^p$  は仮定  $m+p=2$  によって定数  $-(m-1)c\chi_{u>0}$  に書き直されている。我々の計算スキームは (1) の代わりに (4) を離散化することによって構成される。  $h$  を空間メッシュ幅、  $V_h$  を区分的に線形補間した非負の関数  $u_h = u_h(x)$  の集合とする。  $N$  を整数とし、  $h = \frac{L}{N}$  と置く。我々の差分法は以下の通りである。

各  $u_h^0 \in V_h$  に対して次の式を満たす列  $\{u_h^n\}_{n=1,2,\dots} \subset V_h$  を求める：

$$(5) \quad \begin{cases} u_h^{n+1} = P_{h,k} D_{h,k} H_{h,k} u_h^n & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \\ u_h^n(-L) = (\psi_-(t_n))^{m-1}, u_h^n(L) = (\psi_+(t_n))^{m-1} & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \\ u_h^0(ih) = u^0(ih) & \text{for } i = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \end{cases}$$

ここで、  $P_{h,k}$ ,  $D_{h,k}$  and  $H_{h,k}$  は  $u_t = muu_{xx}$ ,  $u_t = -(m-1)\chi_{u>0}$  と  $u_t = \frac{m}{m-1}(u_x)^2$  をそれぞれ近似する差分作用素である。これらの作用素は複雑なのでその記述は省略する ([7] 参照)。時間ステップ  $k = k_{n+1} \equiv t_{n+1} - t_n$  ( $t_0 = 0$ ) は可変であり、

$$(6) \quad k = \frac{(m-1)h}{4m\|(u_h)_x\|_{L^\infty}}$$

で定められる。

証明なしで定理 1 と 2 を述べる。定理 2 は定理 1 から得られる。

**定理 1** (Basic estimates [7]).  $u^0(x) \in C^2[-L, L]$  は非負の関数で

$$(7) \quad (u^0(x))_{xx} \geq 0,$$

$$(8) \quad \|(u^0(x))_x\|_{L^\infty} \leq (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}},$$

を満たし,

$$(9) \quad \psi_-(t) = \alpha', \quad \psi_+(t) = \beta',$$

とする. 但し,  $\alpha' = (u^0(-L))^{\frac{1}{m-1}}$  と  $\beta' = (u^0(L))^{\frac{1}{m-1}}$  は任意の正数とする. この時,

$$(10) \quad 0 \leq u_h^n(x) \leq \|u_h^0\|_{L^\infty},$$

$$(11) \quad \|(u_h^n)_x\|_{L^\infty} \leq (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$(12) \quad TV((u_h^n)_x) \leq 2(m-1)\sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$(13) \quad \|(u_h^{n+1} - u_h^n)/k_{n+1}\|_{L^1[-L, L]} \leq 2m\|u_h^0\|_{L^\infty}(m-1)\sqrt{\frac{c}{m}} + 4L(m-1)c$$

が成り立つ.

**定理 2** (Convergence of numerical solutions [7]). 定理 1 と同じ仮定もとで,  $\{h\}$  を零に収束する任意の列とする. この時, (1) の一意な弱解  $v$  が存在し, 且つ

$$(14) \quad \|v_h - v\|_{L^\infty(\mathcal{H})} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0,$$

が成り立つ. 但し,  $\mathcal{H} \subset [0, \infty) \times [-L, L]$  は任意に固定したコンパクト集合,

$$v_h = (u_h)^{1/(m-1)}, \quad u_h(t, x) = u_h^n(x) \text{ on } [t_n, t_{n+1}) \times [-L, L] \text{ for all } t_n \text{ and } h$$

である.

### 3. 定常解

$u(x) = (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}|x|$  が (4) の第 1 式の右边を零にした方程式を満たし且つ  $w(x) = u^{\frac{1}{m-1}}(x)$  は (3) の第 1 式を満たすことに着目して次の定理を述べる.

**定理 3.**  $\alpha \equiv (\alpha')^{m-1}$  と  $\beta \equiv (\beta')^{m-1}$  は任意の正定数で

$$(15) \quad \beta \leq \alpha + (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(2L),$$

$$(16) \quad \max \left\{ \alpha - (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(2L), 0 \right\} \leq \beta.$$

を満たしているとする. この時, (3) の解  $w(x) \geq 0$  が存在し一意である. 更に  $w^{m-1}(x)$  は (4) の第 1 式の右边を零にした方程式をも満たす.

更に, 次の定理が成り立つ.

**定理 4.**  $\alpha \equiv (\alpha')^{m-1}$  と  $\beta \equiv (\beta')^{m-1}$  は任意の正定数で

$$(17) \quad \beta \leq \alpha + (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(2L)$$

を満たしているとする.

1) もし

$$(18) \quad 0 \leq \alpha - (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(2L) \leq \beta$$

ならば,  $w(x) > 0 (x \in [-L, L])$  であり, サポートは分離しない.

2) もしある  $\ell (-L < \ell < L)$  が

$$(19) \quad \alpha - (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(\ell + L) = 0, \quad (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(L - \ell) < \beta$$

を満たすならば,  $w(x) > 0 (x \in [-L, L])$  であり, サポートは分離しない.

3) もしある  $\ell (-L < \ell < L)$  が

$$(20) \quad \alpha - (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(\ell + L) = 0, \quad \beta < (m-1)\sqrt{\frac{c}{m}}(L - \ell)$$

を満たすならば,  $w(x) = 0 (x \in [\ell, \ell^*])$  が成り立つような  $\ell^* (\ell < \ell^* < L)$  が存在する. この場合はサポートは分離する.

以下 定理に述べた  $w^{m-1}$  に関する図を示すが, 図に現れる直線部分は (4) の第 1 式の右辺を零にした方程式を満たしていることに注意.

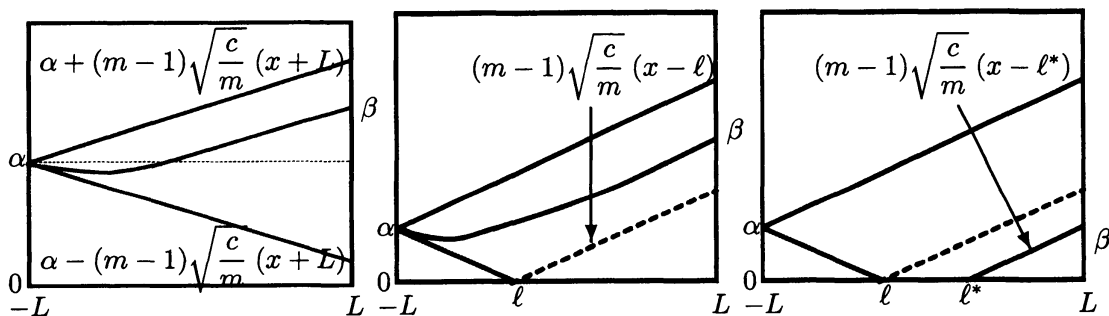


Figure 1: 1), 2), 3) の場合の定常解  $w^{m-1}(x)$ .

### 定理 3 と 4 の証明.

定理 3 の存在性は常微分方程式の理論を使えば容易に示される. 定理 4 は明らかである. 定理 3 の一意性を示そう. (3) を満たす 2 つの相異なる解  $\phi(x)$  と  $\psi(x)$  が存在したと仮定する. すなわち,  $\phi(-L) = \psi(-L) = \alpha'$  と  $\phi(L) = \psi(L) = \beta'$  が成り立ち, 且つ  $\phi(\xi_i) = \psi(\xi_i) (i = 1, 2)$  と  $\phi(x) > \psi(x) (x \in (\xi_1, \xi_2))$  を満たす

$\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) ( $-L \leq \xi_1 < \xi_2 \leq L$ ) が存在すると仮定する. すると,

$$\begin{aligned} \phi^m(\xi_2) - \psi^m(\xi_2) &= \phi^m(\xi_1) - \psi^m(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \{(\phi^m(\theta))_x - (\psi^m(\theta))_x\} d\theta \\ (21) \quad &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \{(\phi^m(\theta))_x - (\psi^m(\theta))_x\} d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi^m(\theta))_x - (\psi^m(\theta))_x &= (\phi^m(\xi_1))_x - (\psi^m(\xi_1))_x + \int_{\xi_1}^{\theta} \{(\phi^m(\eta))_{xx} - (\psi^m(\eta))_{xx}\} d\eta \\ (22) \quad &\geq \int_{\xi_1}^{\theta} (c\phi^p(\eta) - c\psi^p(\eta)) d\eta > 0 \text{ for } \theta \in (\xi_1, \xi_2] \end{aligned}$$

が成り立ち,  $\phi(\xi_2) - \psi(\xi_2) > 0$  が従う. これは  $\phi(\xi_2) = \psi(\xi_2)$  と矛盾する (証明終).

**定理 5 (Stabilization).** 定理 3 と同じ仮定の下で  $\psi_-(t) = \alpha'$  且つ  $\psi_+(t) = \beta'$  と置く. すると, (1) の解  $v(t, \cdot)$  は  $t \rightarrow \infty$  とした時, (3) の一意な解  $\tilde{w}(x)$  に  $C[-L', L']$  上で収束する. 但し,  $[-L', L'] \subset (-L, L)$  は任意に固定した区間である.

証明.  $v(t, \cdot)$  に対して  $C[-L', L']$  上の軌道  $\gamma = \{v(t, \cdot) : t \geq 0\}$  を考える.  $\omega$  を  $\gamma$  の  $\omega$ -limit set とする. 但し, それは

$$\begin{aligned} \omega &= \{w(x) \in C[-L', L'] : \exists \{t_n\}, \exists t_n \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty, \text{ such that} \\ &\quad v(t_n, \cdot) \rightarrow w(x) \text{ in } C[-L', L'] \text{ as } n \rightarrow \infty\} \end{aligned}$$

で定義される. DiBenedetto の示した結果から,  $\gamma$  は  $C[-L', L']$  で precompact である [2]. すなわち

$$\exists \{t_n\}, \exists \hat{v}(x) : v(t_n, \cdot) \rightarrow \hat{v}(x) \in \omega \text{ in } C[-L', L'] \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

一方, (1) の解  $v_1(t, \cdot)$  と  $v_2(t, \cdot)$  に対して次の不等式が Bertsch よって示されている [1].

$$(23) \quad \|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^1[-L, L]} \leq e^{Kt} \|v_1(0) - v_2(0)\|_{L^1[-L, L]} \text{ for } t \geq 0,$$

但し,  $K$  は

$$(24) \quad (-s^p) - (-r^p) \leq K(s - r) \text{ for any } (0 \leq r \leq s)$$

を満たす定数である. 一般には  $K = 0$  であるが, 個々の解の有界性から  $|K| \ll 1$  ( $K < 0$ ) と取ることができる. このことから  $t \geq 0$  に対して

$$(25) \quad \|v(t_n) - \tilde{w}\|_{L^1[-L', L']} \leq \|v(t_n) - \hat{v}\|_{L^1[-L, L]} \leq e^{Kt_n} \|v(0) - \tilde{w}\|_{L^1[-L, L]},$$

が成り立ち, これは  $n \rightarrow \infty$  とすると 0 に収束する. すなわち  $\hat{v}(x) = \tilde{w}(x)$  ( $x \in [-L', L']$ ) が得られる. 定常解の  $\tilde{w}(x)$  の一意性から定理が従う (証明終).

**定理 6.** 定理 4 の 3) において, サポートは有限時間内に分離する.

証明.  $m+p = 2$ ,  $m > 1$  と  $0 < p < 1$  が仮定されているので, 有限時間内にサポートが分離する Galaktionov-Vazquez の特殊解を構成することができる [12]. この

特殊解とサポート分離した (3) の解に十分収束している (1) の解に比較定理を適用するとサポートが有限時間内に分離することが導かれる (証明終).

注) 本稿では  $m+p=2$  ( $m>1$ ) の場合に限って考察した. その理由は  $m+p \neq 2$  の場合には計算スキーム (5) の収束性が証明できていないからである. しかし, 実際の計算は  $m+p \neq 2$  の場合にも可能である. また 定理 3-5 は  $m+p \geq 2$  ( $m>1, 0 < p < 1$ ) の場合にでも成り立つことが同様の論証で示される.

#### 4. 数値例

初期境界値問題 (1) について差分法 (5) による数値例を示そう. パラメータは以下  $m=1.5, p=0.5, c=6, L=1.5$  である. 図の中の曲線は  $u=v^{m-1}$  の数値解  $u_h$  を表し, 計算メッシュ幅は全て  $h=\frac{1}{512}$  である. 最初の 3 つの数値例は境界条件  $\psi_{\pm}(t)$  が  $t$  に無関係な定数の場合である.

例 1.  $u(t, \pm L) = 2$ , and  $u(0, x) = 2$  on  $[-L, L]$ .

例 2.  $u(t, \pm L) = 1.5$ , and  $u(0, x) = 1.5$  on  $[-L, L]$ .

例 3.  $u(t, \pm L) = 1$ , and  $u(0, x) = 1$  on  $[-L, L]$ .

各数値例は  $t \rightarrow \infty$  とした時, 数値解が定常解にそれぞれ収束していることを示している. 定理 3-5 に述べた性質が再現されている (Figures 2, 3, 4).

次に  $\varphi(t) \equiv \psi_{\pm}(t)^{m-1}$  と置き,  $\varphi(t)$  に周期性を課す. すると興味深い数値例が得られた.

例 4.  $u(t, \pm L) = \varphi(t) \equiv 1.5 + 0.5 \cos(2\pi t)$  and  $u(0, x) = 2$  on  $[-L, L]$ .

例 5.  $u(t, \pm L) = \varphi(t) \equiv 1.5 + 0.5 \cos(12\pi t)$  and  $u(0, x) = 2$  on  $[-L, L]$ .

例 6.  $u(t, \pm L) = \varphi(t) \equiv 1.375 + 0.375 \cos(32\pi t)$  and  $u(0, x) = 1.75$  on  $[-L, L]$ .

例 4 では数値サポートの分離・併合の繰り返し現象が得られた (Figure 5). 境界値  $\varphi(t)$  は周期 1 でその最大値 2.0 と最小値 1.0 を取っている. この現象は以下のように説明できる. 境界値 1.5 から 2.0 の状態を十分長く続けると定理 5 からサポートが併合される. その後, 境界値 1.5 から 1.0 の状態を更に十分長く続けると再び定理 5 から今度はサポートが分離する. このことから次の定理が得られる.

**定理 6.** 例 4 において周期を十分長くとれば, サポートはその分離と併合を繰り返す.

他方, 例 5 では周期は  $\frac{1}{6}$  であり例 4 に比べて短い. この時はサポートの分離・併合は発生しないで併合したままである (Figure 6). 例 6 では  $\varphi(t)$  は 1.375 を中心に最大値 1.75 と最小値 1.0 を取るようにしている. 更にその周期を  $\frac{1}{16}$  と十分短くしても, 数値サポートは併合しないで分離したままである (Figure 7). このことは, サポートの分離・併合は  $\varphi(t)$  周期と振幅に大きく依存していることを示唆している. 今後, この詳細な数学解析が望まれる.

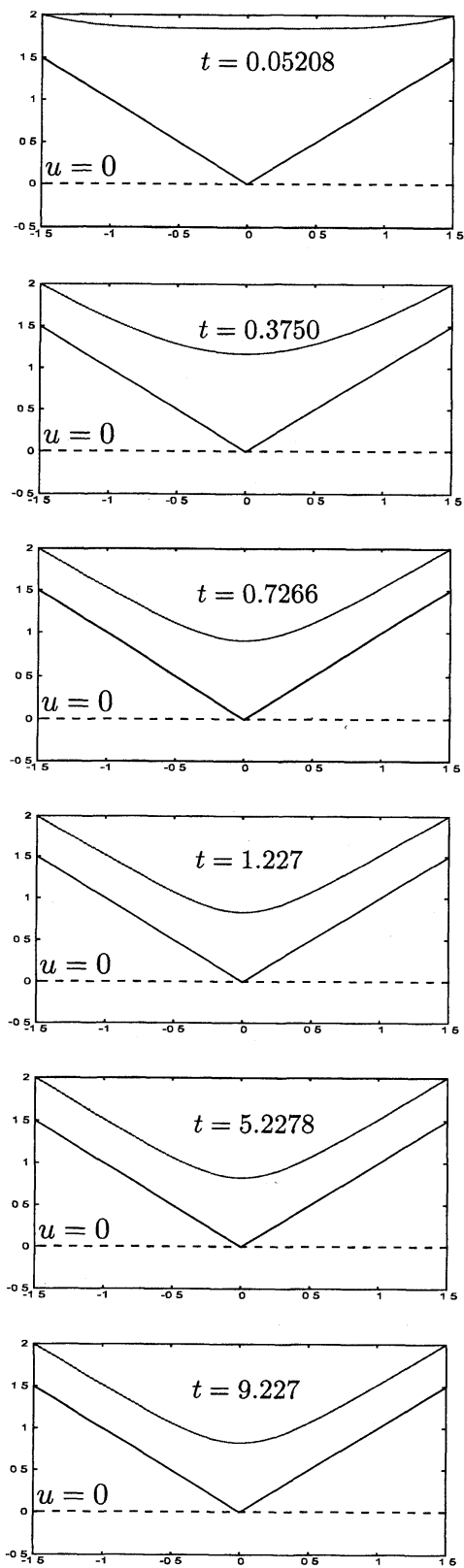


Figure 2: 例 1 の数値例. 数値解の定常解への収束性. 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ ,  $h = \frac{1}{512}$ .

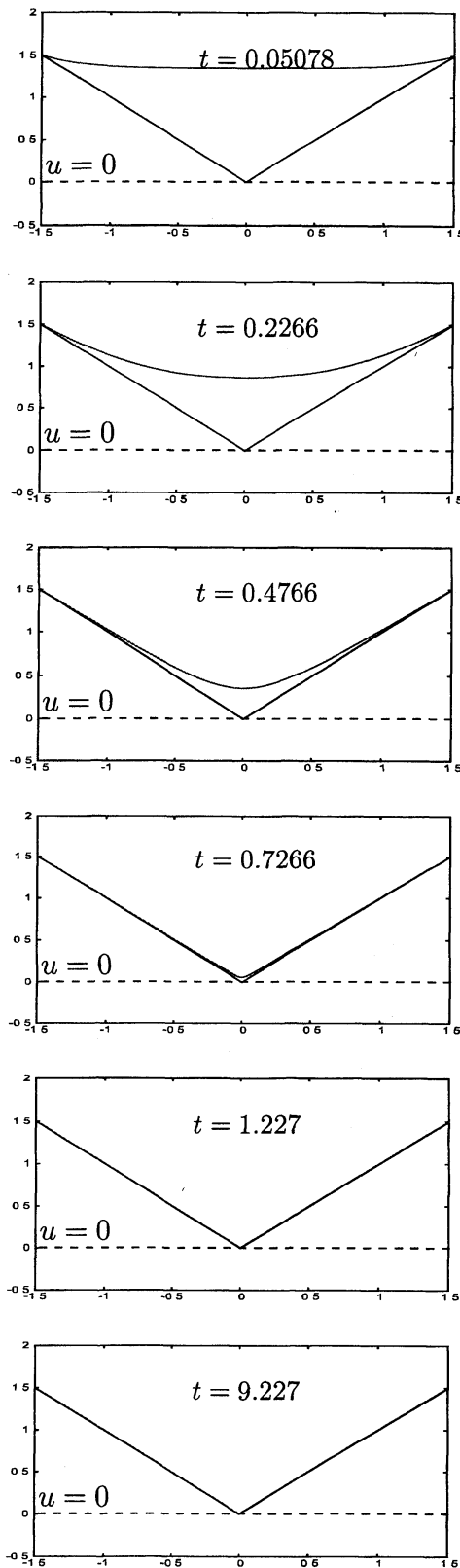


Figure 3: 例 2 の数値例. 数値解の定常解への収束性. 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ ,  $h = \frac{1}{512}$ .

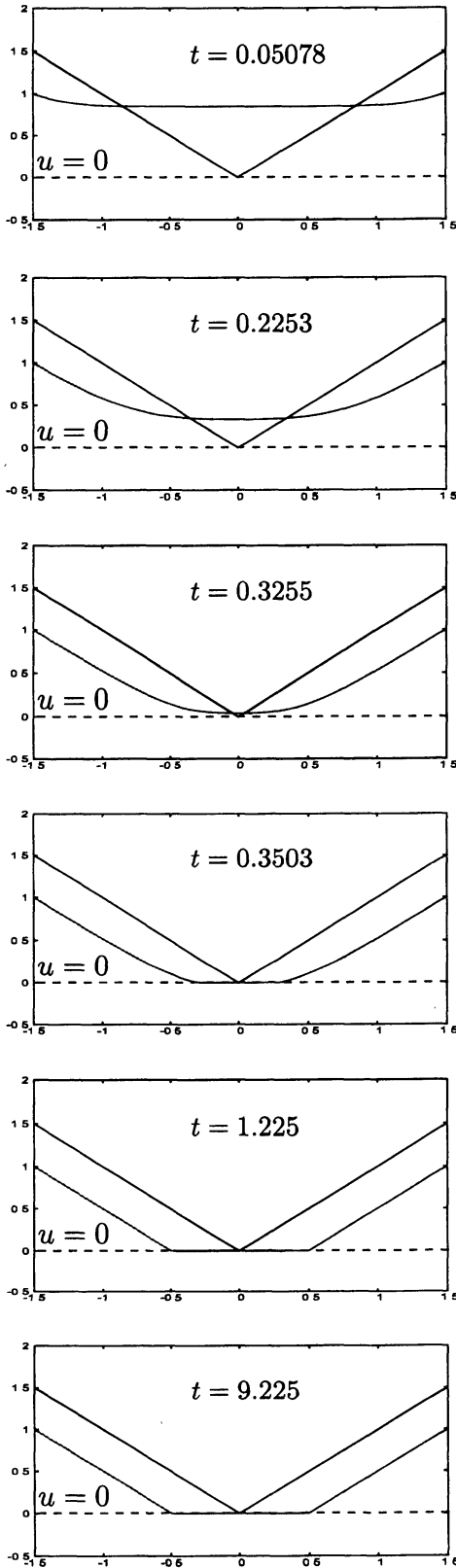


Figure 4: 例 3 の数値例. 数値解の定常解への収束性. 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ ,  $h = \frac{1}{512}$ .

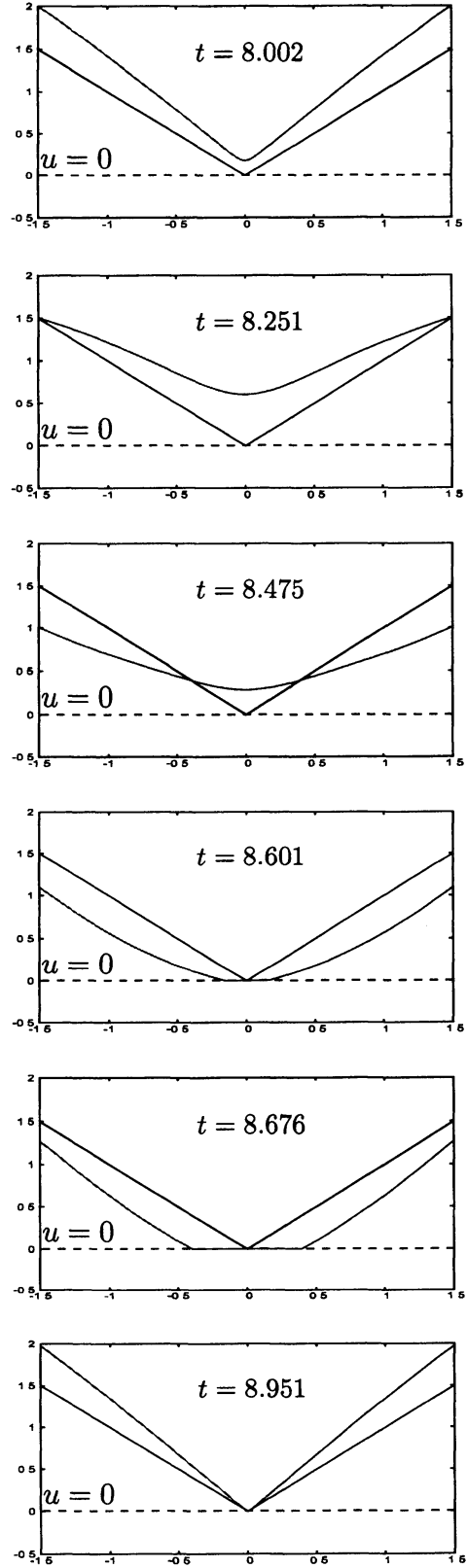


Figure 5: 例 4 の数値例. 数値サポートの分離・併合の繰り返し. 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ ,  $h = \frac{1}{512}$ .



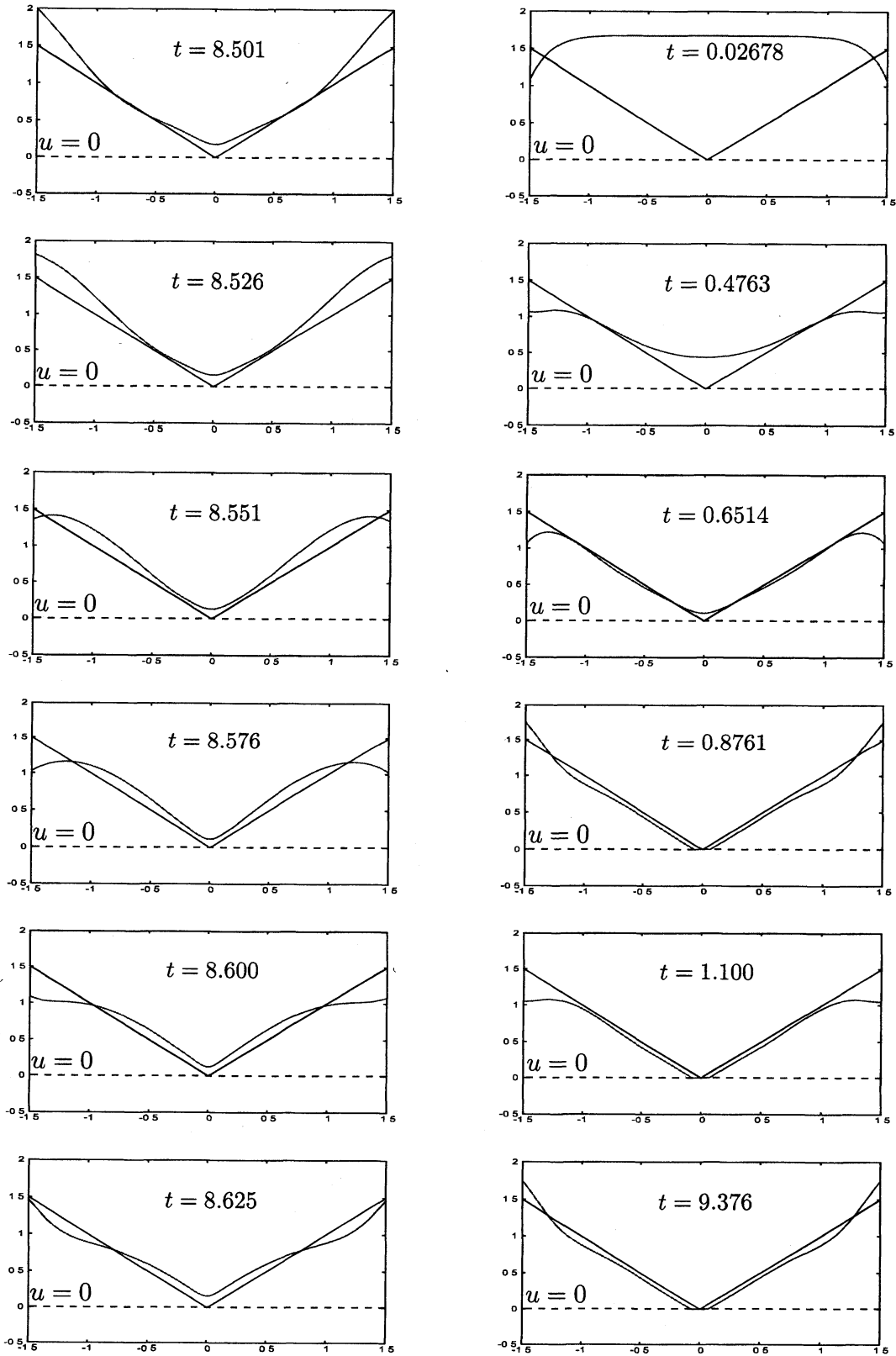


Figure 6: 例5の数値例. 分離しない数値サポートの挙動. 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ ,  $h = \frac{1}{512}$ .

Figure 7: 例6の数値例. 併合しない数値サポートの挙動, 但し  $m = 1.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 6$ ,  $h = \frac{1}{512}$ .

## 謝辞

この研究は日本学術振興会 平成 24 年度科学研究費助成事業 (科学研究費補助金) 基盤研究 (C)(No.23540171) の下で行われました。

## References

- [1] Bertsch, M.: A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term, *Nonlinear Anal.*, **7** (1983) 117–127.
- [2] DiBenedetto, E.: Continuity of weak solutions to a general porous medium equation, *Indiana Univ. Math. J.*, **32**(1983) 83-118.
- [3] Kalashnikov, A. S.: The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **14** (1974) 891–905.
- [4] Kalashnikov, A. S.: Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations, *Russian Math. Surveys*, **42** (1987) 169–222.
- [5] Kersner, R.: Degenerate parabolic equations with general nonlinearities, *Nonlinear Anal.*, **4** (1980) 1043–1062.
- [6] Knerr, B. F.: The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **249** (1979) 409–424.
- [7] Nakaki, T., and Tomoeda, K.: A finite difference scheme for some nonlinear diffusion equations in an absorbing medium: support splitting phenomena, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002) 945–964.
- [8] Oleinik, O.A., Kalashnikov A. S., and Chzou, Y.-L.: The Cauchy problem and boundary value problems for equations of the type of nonstationary filtration, *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22** (1958) 667–704.
- [9] Polubarinova-Kochina, P.Y.: *Theory of Ground Water Movement*, Princeton Univ. Press, 1962.
- [10] Rosenau, P. and Kamin S.: Thermal waves in an absorbing and convecting medium, *Physica*, **8D** (1983), 273–283.
- [11] Scheidegger, A.E.: *The Physics of Flow through Porous Media*, Third edition, University of Toronto Press, 1974.
- [12] Tomoeda, K.: Numerically repeated support splitting and merging phenomena in a porous media equation with strong absorption, *Journal Math-for-Industry of Kyushu*, **3** (2012) 61–68.