数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 109-115

Relative projective cover について

千葉大学理学研究科・日本学術振興会特別研究員ＤＣ２

Graduate School of Science, Chiba University /
J S P S Research Fellow

高橋 萌子 (Moeko Takahashi)*1

1 はじめに

現在，直既約加群の relative projective cover を研究しているが，その発端となったのが Scott 加群の存在である．Scott 加群は自明な加群に対する relative projective cover と思え，特殊な性質をもつ加群である．

これまで有限群の Scott 加群を求めるためには，p-局所部分群の Scott 加群を求め，対応する通常指標を用いて Green 対応子を計算しなければならなかった．群の位数が大きい場合には，GAP と呼ばれる計算システムが必要になることも多かった．本稿では，有限群の Sylow p-部分群が巡回群である場合に，Brauer tree と通常指標の非自明な p-元上での値のみから Scott 加群を与える方法を紹介する．巡回 Sylow p-部分群をもつ有限群の Scott 加群は，主ブロックの Brauer tree における自明な指標に対応する頂点から例外頂点までの道の長さと密接に関係している．この道の長さの偶奇によって，Scott 加群の構造を分類し，対応する通常指標を与える．

Scott 加群に関する研究の動機となったのは，越谷-功刀 [8] 系 1.8 である．そこでは，自明な source をもつ加群であって，その vertex が，属するブロックの巡回不足群 D と一致するようなものを，$N_G(D)$ のブロック B とその Brauer 対応子である $N_G(D_1)$ のブロック B_1 が Puig 同値である場合に与えている (ここで，D_1 は D の位数 p の部分群)．そこで，一般に，巡回不足群をもつブロックに属する自明な source をもつ加群を知りたいと考え，その中でも特殊な加群である Scott 加群に限定して構造を与えたのが，4 章で紹介する結果である．

また，巡回不足群をもつ主ブロックに属する Scott 加群と，単純加群の relative projective cover には密接な関係があると予想しており，6 章ではその根拠となっている部分的な結果を紹介する．

2 Relative projective cover，Scott 加群

p を素数，k を標数 p の代数的閉体，G を有限群とする．加群は全て有限生成右側加群を考えるものとする．また，自明な kG-加群を k_G で表す．

H を G の部分群とするとき，kG-加群 M が (relatively) H-projective であるとは，ある kH-加群 N に対して，M が $N{\uparrow}^G = N \otimes_{kH} kG$ の直和因子と同型になることをいう．

*1 E-mail address:08sm1113@graduate.chiba-u.jp

定義 2.1 (Relative projective cover). H を G の部分群とする. kG-加群 M に対して次のような性質 (1), (2) をもつ H-split 短完全列が同型を除いて一意的に定まる.

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(1) X は H-projective.

(2) Y は ゼロでない H-projective 直和因子をもたない.

この短完全列, または, X を M の (relatively) H-projective cover とよび, X を $P_H(M)$, Y を $\Omega_H(M)$ で表す.

注意 1. (1) $P \in Syl_p(G)$ とする. 全ての kG-加群 M は P-projective である.

(2) M を直既約 kG-加群とする.

G の部分群 H が $H \geq Q$ ならば, M は H-projective になるような G の p-部分群 Q が G-共役を除いて一意的に定まる. Q を M の vertex とよび $\mathrm{vtx}(M)$ と表す.

M の vertex Q に対して, 直既約 kQ-加群 T で $M \mid T{\uparrow}^G$, $\mathrm{vtx}(T) = Q$ となるものが $N_G(Q)$-共役を除いて一意的に定まる. この T を M の source という.

命題 2.1 (Knörr [7], 6. Remarks). K, H を G の部分群, M を kG-加群とする.

(1) M が K-projective かつ H-projective ならば, $K^g \cap H$-projective $(g \in G)$.

(2) $K^g = H$ $(g \in G)$ ならば, $P_K(M) \cong P_H(M)$.

(3) M が H-projective ならば, $P_K(M) \cong P_{K^g \cap H}(M)$ $(g \in G)$.

したがって, G の p-部分群に関する relative projective cover を考えれば十分である.

その他, relative projective cover の性質は, Knörr [7], Thévenaz [9] を参照されたい.

定義 2.2 (Scott 加群). H を G の部分群とする.

次の 2 条件を満たす直既約 kG-加群が一意的に定まり, G の H に関する (Alperin) Scott 加群とばれる. また, この加群を $\mathrm{Scott}(G, H)$ で表す.

(1) $k_H \uparrow^G$ の直既約直和因子である. *2

(2) socle の直和因子に自明な加群 k_G をもつ.

($\Leftrightarrow$ radical quotient の直和因子に k_G をもつ.)

注意 2. $\mathrm{P}_H(k_G) \cong \mathrm{Scott}(G, H)$ である.

特に, 自明な群に関する Scott 加群 $\mathrm{Scott}(G, 1)$ は k_G の projective cover $P(k_G)$ である.

また, $P \in Syl_p(G)$ のとき, $\mathrm{Scott}(G, P) \cong k_G$.

Scott 加群については次が成り立つ.

注意 3. (1) H, H' を G の部分群, $Q \in Syl_p(H)$, $Q' \in Syl_p(H')$ とする.

$\mathrm{Scott}(G, H) \cong \mathrm{Scott}(G, H')$ であることは $Q^g = Q'$ $(g \in G)$ と同値である.

特に, $\mathrm{Scott}(G, H) \cong \mathrm{Scott}(G, Q)$.

---

*2 Scott 加群は自明な source をもつ加群である.

(1)′ $Q \in Syl_p(H)$ とすると，$\mathrm{vtx}\big(\mathrm{Scott}(G,H)\big) = Q$.
(2) Scott 加群は主ブロック (k_G が属するブロック) に属する.
(3) Scott 加群は自己双対性をもつ.

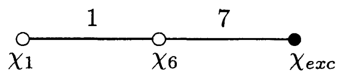
3，4，5 章では Scott 加群を扱うが，注意 2，3 より，自明な群でなく，Sylow 群でもない G の p-部分群を vertex にもつ Scott 加群のみを考えればよい.

3 Scott 加群の例

$G := \mathrm{SL}_2(8)$，$p = 3$ とする. G の Sylow 3-部分群を P とすると，$P \cong C_9$ であり，$N_G(P)$ は位数 18 の二面体群と同型である. $P_1 \cong C_3$ を P の部分群とし，$\mathrm{Scott}(G, P_1)$ を考える.

kG の主ブロック A の分解行列，Brauer tree は次の通りである. ここで 1，7 は次数を用いて既約 Brauer 指標を表している. 例外頂点の重複度 $m = 4$ である.

A	1	7
$1 = \chi_1$	1	·
$7_1 = \chi_2$	·	1
$7_2 = \chi_3$	·	1
$7_3 = \chi_4$	·	1
$7_4 = \chi_5$	·	1
$8 = \chi_6$	1	1



例外指標 χ_2，χ_3，χ_4，χ_5 はそれぞれ P の生成元 u 上で次のような値をとる. ただし，$E(9) := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{9})$ とする.

$$\chi_2(u) = -\{E(3) + E(3)^2\} = 1 \qquad \chi_3(u) = -\{E(9)^4 + E(9)^5\}$$
$$\chi_4(u) = -\{E(9)^2 + E(9)^7\} \qquad \chi_5(u) = -\{E(9) + E(9)^8\}.$$

このとき，$\mathrm{Scott}(G, P_1)$ に対応する通常指標 $\chi_{\widehat{\mathrm{Scott}(G,P_1)}}$ は

$$\chi_{\widehat{\mathrm{Scott}(G,P_1)}} = \chi_1 + \chi_6 + \underbrace{\chi_3 + \chi_4 + \chi_5}_{exc.}$$

であり，$\mathrm{Scott}(G, P_1)$ は次のような組成因子の構造をもつ加群である.

$$\mathrm{Scott}(G,P_1) \simeq \begin{array}{cccccc} & & & & 7 & \\ 1 & & & 7 & & \diagdown \\ & \diagdown & 7 & & & 1. \\ & 7 & & & & \end{array}$$

4 主結果

以下，P を G の巡回 Sylow p-部分群とする.

$|P| = p^n$ $(n > 1)$ とし，P_i を P の部分群で $|P_i| = p^i$ であるものとする. また，u を P の生成元，$E(p^i) = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p^i})$ とする.

kG の主ブロックを A で表し，その inertial index を e とする．巡回不足群をもつ主ブロックに対しては，$e = | N_G(P)/C_G(P) |$ である．また，

$$m = \frac{|P|-1}{e} = \frac{p^n-1}{e} \quad , \quad m_{n-i} = \frac{p^{n-i}-1}{e}$$

とする (ここで，$\frac{p-1}{e}$ は自然数).

Brauer tree の各頂点には，既約通常指標が，各辺には既約 Brauer 指標 (単純 kG-加群) が対応する．主ブロックの Brauer tree において，自明な通常指標に対応する頂点は端点であり，例外頂点 (exceptional vertex) と呼ばれる頂点が唯一つ存在する．例外頂点には，例外指標の和が対応し，その重複度は m である．

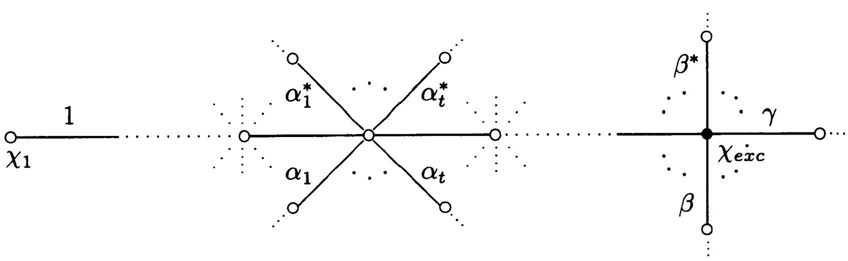
また，自明な通常指標に対応する頂点から例外頂点までの最短経路は一意的に決まるが，その経路の長さが「 (a) 奇数のとき，(b) 偶数のとき」で分類する．

$\mathrm{Irr}(P) \ni \lambda_j : u \mapsto E(p^n)^j$ と定める．$\{\lambda_{t_j}\}_{1\le j\le m}$ を $N_G(P)$ の作用に関する $\mathrm{Irr}(P) - \{1\}$ の軌道の代表元の集合とし，$\chi_{\lambda_{t_j}}$ を

$$\chi_{t_{\lambda_j}}(u) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{h\in N_G(P)} \lambda_{t_j}^h(u) & (\text{ (a) のとき })\\ \displaystyle -\sum_{h\in N_G(P)} \lambda_{t_j}^h(u) & (\text{ (b) のとき }) \end{cases}$$

となる G の例外指標とする．

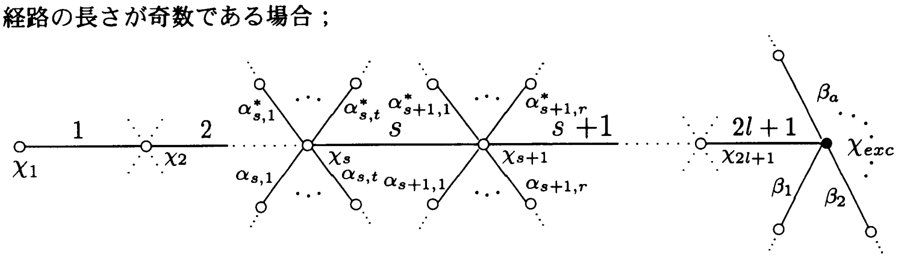
定理 4.1. (1) G の主ブロックの Brauer tree は，自明な通常指標 χ_1 に対応する頂点から例外頂点 χ_{exc} までの最短経路である直線に関して対称である．また，線対称な辺の組に対応する単純加群の組は，互いに k-双対である．



ここで，$\alpha_j{}^* := \mathrm{Hom}_k(\alpha, k)$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ である．

(2) $M_i = \mathrm{Scott}(G, P_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ とし，$\chi_{\hat{M}_i}$ を M_i に対応する G の通常指標[*3] とする．

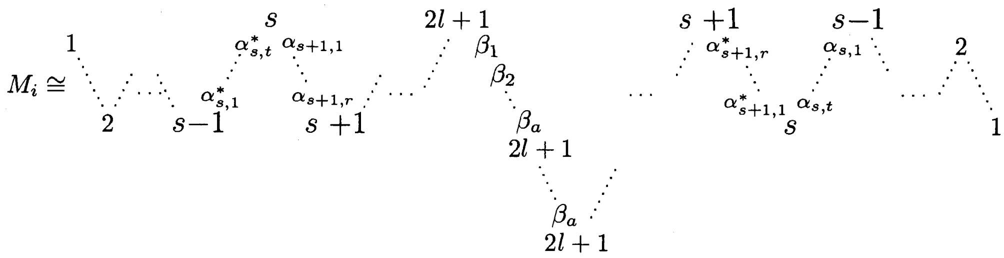
(a) A の Brauer tree が以下のように，自明な通常指標 χ_1 に対応する頂点から例外頂点 χ_{exc} までの最短経路の長さが奇数である場合；



[*3] $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ を splitting p-modular system，$\hat{M}_i$ を M_i の $\mathcal{O}$ への lift とするとき，$\hat{M}_i \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ の通常指標を指す．

ここで，$l \geq 0$，$2 \leq s \leq 2l$ である．また，例外頂点から伸びる辺に対して，反時計回りに番号付けしている．

このとき，M_i は次のような組成因子の構造をもつ直既約加群である (この図の詳細については Janusz [6]，または Feit [4] VII Section 12 を参照)．



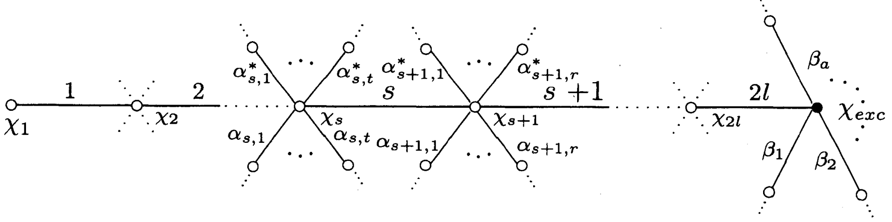
ただし，上図では s を奇数と仮定している．

M_i の組成因子における単純加群 $2l+1$ の重複度は $m_{n-i}+1$ であり，例外頂点から伸びるその他の辺に対応する単純加群 β_j $(j=1,2,\ldots,a)$ の重複度は m_{n-i} である．

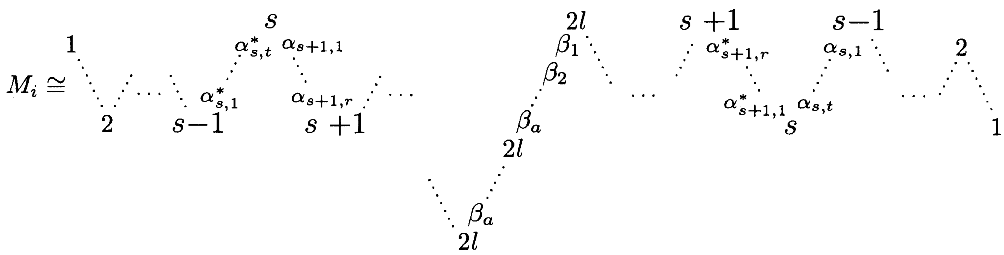
また，M_i に対応する通常指標は次の通りである．

$$\chi_{\hat{M}_i} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \cdots + \chi_{2l+1} + \sum_{p^i \mid t_j,\ 1 \leq j \leq m} \chi_{\lambda_{t_j}}.$$

(b) A の Brauer tree が以下のように，自明な通常指標 χ_1 に対応する頂点から例外頂点 χ_{exc} までの最短経路の長さが偶数である場合;



ここで，$l \geq 1$，$2 \leq s \leq 2l-1$ である．このとき，M_i は次のような構造をもつ直既約加群である．



ただし，上図では s を奇数と仮定している．

M_i の組成因子における単純加群 $2l$ の重複度は $m - m_{n-i} + 1$ であり，例外頂点から伸びるその他の辺に対応する単純加群 β_j $(j=1,2,\ldots,a)$ の重複度は $m - m_{n-i}$ である．

また，M_i に対応する通常指標は次の通りである．

$$\chi_{\hat{M}_i} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \cdots + \chi_{2l} + \sum_{p^i \nmid t_j,\ 1 \leq j \leq m} \chi_{\lambda_{t_j}}.$$

注意 4. $p=2$ のとき，G は 2-ベキ零群である．よって，kG の主ブロックは kP と同型である．したがって，$\mathrm{Scott}(G, P_i)$ が長さ p^{n-i} の単列加群になることは既に知られていた．

注意 5. 関連する結果としては，S. Koshitani - N. Kunugi [8] 以外に，G. Hiss - N. Naehrig [5] が挙げられる．[5] では，巡回不足群をもつブロックに属する持ち上げ可能な直既約加群に対して，その加群を引き起こす Brauer tree 上の道を決定し，対応する通常指標を与えている．

5 主結果の証明について

Janusz [6] Section 5 から，Brauer tree において Scott 加群を引き起こす道の選び方が決まる．それにより，Scott 加群に対応する通常指標における非例外指標の成分が決まる．残る例外指標成分を決定するために，指標の計算をする．具体的には，$N_G(P_1)$ の Scott 加群を求め，Green 対応や Alperin [1] Section 4, 19 の事実を用いて G の Scott 加群に対応する通常指標が p-元上でとり得る値を求める．主ブロックに属する通常指標に対しては殆ど p-元上での値を考えればよく (Feit [4] V 章 系 6.3, Brauer [2] 命題 2A 参照)，Dade [3] によって既約通常指標の p-元上での値の詳細が与えられているので，指標の計算で証明される．また，Scott 加群の構造も対応する通常指標から得られる．

6 関連する結果

現在の課題は，単純 A-加群の relative projective cover の決定であり，この研究は途上であるが，その過程で得られた Scott 加群と関連する結果や，p-局所部分群における relative projective cover の計算方法を紹介する．

記号は，4 章と同様のものを用いる．

命題 6.1. $1 \neq Q$ を P の部分群，S を通常非例外既約指標に対応する単純 A-加群とする．このとき

(1) $S \cong \Omega^i(k_G)$ となる自然数 i が存在する．

(2) (1) の i に対して
$P_Q(S) \cong \Omega^i(P_Q(k_G))$, $\quad \Omega_Q(S) \cong \Omega^i(\Omega_Q(k_G))$.

B, B_1 をそれぞれ A の Brauer 対応子である kN, kN_1 の主ブロックとすると，直既約 $B(B_1)$-加群の relative projectve cover は次のように得られる．

命題 6.2. $1 \neq Q$ を P の部分群で，$|\, Q \,| = p^i$ とする．

V を Q-projective でない直既約 $B(B_1)$-加群で，$\dim_k(V) = qp^{n-i} + r$ となるものとする ($0 \leq q < p^i$, $0 \leq r < p^{n-i}$)．このとき

$$P_Q(V) \cong \overline{U}_{(q+1)p^{n-i}}(\mathrm{top}(V)) \oplus \underline{U}_{qp^{n-i}}(\mathrm{soc}(V)).$$

ここで，自然数 l と 単純 $B(B_1)$-加群 T に対して，$\overline{U}_l(T)$ ($\underline{U}_l(T)$) は長さ l の単列加群で，top (socle) が T と同型なものを表す．

$\Omega_Q(V)$ は，長さ $(q+1)p^{n-i} - r$,

$$\mathrm{soc}(\Omega_Q(V)) \cong \mathrm{soc}\Big(\overline{U}_{(q+1)p^{n-i}}(\mathrm{top}(V))\Big), \quad \mathrm{top}(\Omega_Q(V)) \cong \mathrm{top}\Big(\underline{U}_{qp^{n-i}}(\mathrm{soc}(V))\Big)$$

となる単列加群である．

参考文献

[1] J. L. Alperin, Local Representation Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986).

[2] R. Brauer, On finite groups with cyclic Sylow subgroups: II, J. Algebra **58** (1979) 291-318.

[3] E. C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, Ann. of Math. (2) **84** (1966) 20-48.

[4] W. Feit, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, Amsterdam (1982).

[5] G. Hiss and N. Naehrig, The classification of the indecomposable liftable modules in blocks with cyclic defect groups, Bull. Lond. Math. Soc., to appear.

[6] G. J. Janusz, Indecomposable modules for finite groups, Ann. of Math. (2) **89** (1969) 209-241.

[7] R. Knörr, Relative projective covers, Proc. Symp. Mod. Repr. Finite Groups, Aarhus Univ. 1978, 28-32.

[8] S. Koshitani and N. Kunugi, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, Math. Z. **265** (2010) 161-172.

[9] J. Thévenaz, Relative projective covers and almost split sequences, Comm. Algebra, 13 (1985) 1535-1554.