

共形ブロック束の Gauss-Manin 接続

河野俊丈 (東京大学大学院数理科学研究科)

1. はじめに

共形場理論における共形ブロック空間は点付き Riemann 面に対して定まる線形空間であり, [6] などでアフィン Lie 代数の表現を用いて構成された. これは, 点付き Riemann 面のモジュライ空間上のベクトル束を定義し, そこには射影的に平坦な接続が定まる. 種数 0 の場合, この接続は KZ 接続とよばれる平坦接続である. 本稿では, KZ 接続が, ある種の配置空間上の局所係数のホモロジー群を用いて記述されることを説明する. この方法により, KZ 接続を Gauss-Manin 接続とみなすことができる. 接続行列の表示を Drinfel'd 結合子を用いて対数微分形式の反復積分で表すと, 多重ゼータ値によって表示される. 一方, これを Gauss-Manin 接続として計算すると, 多変数超越幾何積分によって表現される. KZ 接続の Gauss-Manin 接続としての解釈は, 多重ゼータ値の線形結合と多変数超越幾何関数との間の関係を与える.

2. 共形ブロック空間

ここでは, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合を扱うが, 共形ブロック空間の定式化は一般の複素単純 Lie 環の場合も同様である. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の標準的な基底を H, E, F で表す. これらは関係式

$$[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H.$$

を満たす. アフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ をループ代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi))$ の中心拡大

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((\xi)) \oplus \mathbb{C}c$$

として, 交換関係

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg + \text{Res}_{\xi=0} df g \langle X, Y \rangle c$$

によって定義する. ここで, $\mathbb{C}((\xi))$ は Laurent 級数のなす代数であり, \langle, \rangle は Cartan-Killing 形式を表す.

Laurent 級数のべきの正の部分と負の部分を分解して Lie 環の直和分解 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_-$ が得られる. レベルとよばれる正の整数 K を固定する. 整数 λ は $0 \leq \lambda \leq K$ を満たすとする. \mathfrak{g} の最高ウェイトが λ の既約表現を V_λ で表す. これを用いて, 最高ウェイト λ で, 中心 c が $K \cdot \text{id}$ として作用するような $\hat{\mathfrak{g}}$ の既約表現 \mathcal{H}_λ が, 次のように構成される. まず, Verma 加群 \mathcal{M}_λ を $U(\mathcal{N}_-) \cdot V_\lambda$ として, $\mathcal{N}_+ V_\lambda = 0$ を満たすように定義し, \mathcal{H}_λ をその既約な商として定める.

$(\Sigma, p_1, \dots, p_n)$ を相異なる点 p_1, \dots, p_n が指定された Riemann 面とする. それぞれの点にレベル K の最高ウェイト $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を与える. \mathcal{M}_p を Σ 上の有理型関数で, 高々 p_1, \dots, p_n に極をもつもの全体とする. 共形ブロックの空間を

$$\mathcal{H}_\Sigma(p, \lambda) = \mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_n} / (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M}_p)$$

で定義する. ここで, \mathcal{M}_p は p_1, \dots, p_n における Laurent 展開によって対角的に作用する.

最高ウェイト $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を固定して, 点 p_1, \dots, p_n の位置と Riemann 面の複素構造を動かして和集合

$$\bigcup_{p_1, \dots, p_n} \mathcal{H}_\Sigma(p, \lambda)$$

をとる. Σ の種数を g とすると, 上の和集合は点付き Riemann 面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上のベクトル束の構造をもち, これを共形ブロック束とよぶ. 共形ブロック束には, Virasoro 代数の作用を用いて射影的平坦な接続が定義される.

3. KZ 接続

種数 0 の場合には共形ブロック束に定義される接続は KZ 方程式を用いて記述される. まず, 一般的な KZ 方程式について述べる. 複素平面上の互いに異なる順序のついた n 個の点の配置空間を

$$X_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; z_i \neq z_j, i \neq j\}$$

で表す. Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan-Killing 形式についての正規直交基底を $\{I_\mu\}$ として, $\Omega = \sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$ とおく. $r_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_i), 1 \leq i \leq n$ を Lie 環 \mathfrak{g} の表現とする. Ω_{ij} を Ω のテンソル積 $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ への i 番目と j 番目の成分への作用とする.

Casimir 元 $c = \sum_{\mu} I_{\mu} \cdot I_{\mu}$ が Lie 環の普遍展開環 $U\mathfrak{g}$ の中心に属することをを用いて、関係式

$$\begin{aligned} [\Omega_{ik}, \Omega_{ij} + \Omega_{jk}] &= 0, \quad i, j, k \text{ (は相異なる)}, \\ [\Omega_{ij}, \Omega_{kl}], \quad i, j, k, l \text{ (は相異なる)} \end{aligned}$$

が成り立つ。KZ 接続を $\text{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)$ に値をもつ 1 次微分形式

$$\omega = \frac{1}{\kappa} \sum_{i,j} \Omega_{ij} d \log(z_i - z_j)$$

によって定義する。ここで κ はパラメータで 0 でない複素数である。KZ 接続は X_n 上のファイバーが $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ であるような自明なベクトル束の接続形式を定め、この接続の水平切断の空間は、KZ 方程式を全微分方程式で表示した

$$d\varphi = \omega\varphi$$

の解全体である。

対数微分形式 $\omega_{ij} = d \log(z_i - z_j)$, $1 \leq i, j \leq n$ についての Arnold の関係式

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{kl} + \omega_{kl} \wedge \omega_{ij} = 0$$

と Ω_{ij} についての上の 2 次関係式から

$$\omega \wedge \omega = 0$$

がしたがう。これにより、 ω は平坦接続を定めることが分かる。

配置空間 X_n の基本群は n 本のひもからなる純粋組みひも群であり、これを P_n で表す。接続 ω の水平切断により、 P_n の線形表現の 1-パラメータ族

$$\theta_{\kappa} : P_n \rightarrow GL(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n).$$

が得られる。対称群 S_n は X_n に座標関数の置換によって作用する。この作用による商空間 X_n/S_n を Y_n で表す。 Y_n の基本群は n 本にひもからなる組みひも群 B_n である。 $V_1 = \cdots = V_n = V$ のとき、対称群 S_n は $X_n \times V^{\otimes n}$ に対角的に作用し、接続形式 ω は組みひも群の線形表現の 1-パラメータ族

$$\theta_{\kappa} : B_n \rightarrow GL(V^{\otimes n}).$$

を定める。

KZ 接続は種数 0 の共形ブロック空間を不変にする。このときパラメータは $\kappa = K + 2$ となる。このように共形場理論においてはパラメータが整数値をとるが、次節では、 κ が generic のときに KZ 方程式の解の空間の記述を与える。

4. 超幾何積分と Gauss-Manin 接続

Schechtman-Varchenko [5] にしたがって、パラメータ κ が generic のとき、KZ 方程式 $d\varphi = \omega\varphi$ の解を多変数超幾何関数を用いて表す。

$$\pi : X_{m+n} \longrightarrow X_n$$

を座標関数の最初の n 個の成分を対応させる写像

$$(z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_m) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$$

によって定義する。射影 π のファイバーを $X_{n,m}$ で表す。

複素数 λ に対して M_λ を最高ウェイト λ の $sl_2(\mathbb{C})$ の Verma 加群とする。つまり、最高ウェイトベクトルとよばれる 0 でないベクトル $v \in M_\lambda$ が存在して

$$Hv = \lambda v, \quad Ev = 0$$

が成立し、 M_λ は $F^j v$, $j \geq 0$ によって張られている。

ここで、テンソル積 $M_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes M_{\lambda_n}$ を考え、 $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ とおく。非負整数 ℓ に対して、ウェイト $\lambda - 2\ell$ のベクトルからなる空間を

$$W[\lambda - 2\ell] = \{x \in M_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes M_{\lambda_n}; Hx = (\lambda - 2\ell)x\}$$

で定める。さらに

$$N[\lambda - 2\ell] = W[\lambda - 2\ell]/F \cdot W[\lambda - 2\ell + 2]$$

とおく。

KZ 接続 ω は \mathfrak{g} の $V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$ への対角作用と可換であり、 $N[\lambda - 2\ell]$ を保つ。パラメータ κ, λ に対して、 X_{n+m} 上の多価関数

$$\Phi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j)^{\frac{\lambda_i \lambda_j}{\kappa}} \prod_{1 \leq i \leq m, 1 \leq \ell \leq n} (t_i - z_\ell)^{-\frac{\lambda_\ell}{\kappa}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^{\frac{2}{\kappa}}$$

を考える。 \mathcal{L} を多価関数 Φ に対応する局所系とする。

対称群 S_m の $X_{n,m}$ への (t_1, \dots, t_m) の置換による作用に関して, 関数 Φ は不変である. この作用による商空間を $Y_{n,m} = X_{n,m}/S_m$ とおく. 局所系 \mathcal{L} を $X_{n,m}$ に制限したものは $Y_{n,m}$ 上の局所系を定める. これを同じ記号 \mathcal{L} で表す. また, 双対局所系を \mathcal{L}^* で表す.

パラメータ $\kappa, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ を十分一般にとる, このとき局所系係数のホモロジー群の消滅定理

$$H_j(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \cong 0, \quad j \neq m$$

が成り立ち, 同型

$$H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \cong H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)$$

が成立する. ここで, 右辺は局所有限な無限和を許すチェインによるホモロジー群を表す.

振じれ de Rham 複体 $(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla)$ は共変微分 $\nabla : \Omega^j(Y_{n,m}) \rightarrow \Omega^{j+1}(Y_{n,m})$ を

$$\nabla\varphi = d\varphi + d \log \Phi \wedge \varphi, \quad \varphi \in \Omega^j(Y_{n,m})$$

と定義することにより定まる. 局所系係数のホモロジー群と振じれ de Rham コホモロジー群の間の非退化なペアリング

$$H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \times H^m(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla) \rightarrow \mathbf{C}$$

が, 対応

$$(c, w) \mapsto \int_c \Phi \omega.$$

によって与えられる.

写像

$$\rho : W[\lambda - 2m] \rightarrow \Omega^m(Y_{n,m})$$

を以下のように定義される有理関数 $R_w(t, z)$, $w \in W[\lambda - 2m]$ を用いて

$$\rho(w) = R_w(t, z) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_m$$

で定める.

まず, $v_k \in M_{\lambda_k}$, $1 \leq k \leq n$ を最高ウェイトベクトルとして $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ とおく. 整数の n 個の組 $J = (j_1, \dots, j_n)$ に対して,

$$F^J v = F^{j_1} v_1 \otimes \dots \otimes F^{j_n} v_n.$$

とおく, ウェイト空間 $W[\lambda - 2m]$ は $j_1 + \cdots + j_n = m$ を満たす J に対応して基底 $F^J v$ をもつ. 整数の列 $(i_1, \dots, i_m) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j_1}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{j_m})$

に対して

$$\eta_J(z, t) = \frac{1}{(t_1 - z_{i_1}) \cdots (t_m - z_{i_m})}.$$

とおき, 有理関数 $R_J(z, t)$ を

$$R_J(z, t) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\text{sgn } \sigma} \eta_J(z_1, \dots, z_n; t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)})$$

によって定める.

このとき ρ は振じれ de Rham コホモロジー群への写像

$$\rho: N[\lambda - 2m] \longrightarrow H^m(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla).$$

を誘導する. この構成により写像

$$\phi: H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \longrightarrow N[\lambda - 2m]^*$$

が積分により

$$\langle \phi(c), w \rangle = \int_c \Phi \rho(w).$$

で定義される. Schechtman, Varchenko [5] により積分

$$\int_c \Phi \rho(w)$$

は $N[\lambda - 2m]$ に値をとる KZ 方程式の解であることが知られている. さらに, 次が示される.

定理 ([5]) 局所系 \mathcal{L} を generic とする. このとき ϕ は同型写像

$$H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \cong N[\lambda - 2m]^*.$$

を与える. さらにこの同型は純粹組みひも群 P_n の作用について同変的である.

このようにして, 次の2通りの方法で純粹組みひも群の線形表現が導かれ, これらは表現として同値であることがわかる.

1. P_n の局所係数のホモロジー $H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)$ への作用.
2. $N[\lambda - 2m]$ に値をとる KZ 接続のモノドロミー表現.

とくに $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ で $m = 2$ のとき, 組みひも群の線形表現

$$B_n \rightarrow \text{Aut } H_2(Y_{n,2}, \mathcal{L}^*)$$

は, Lawrence, Krammer, Bigelow ([1]) による表現にほかならない. 上の考察から, この線形表現は KZ 接続のモノドロミー表現

$$B_n \rightarrow \text{Aut } N[\lambda - 4]^*.$$

と同型であることが分かる.

種数 0 の共形ブロック空間の定義において, Riemann 球面 CP^1 上に $n+1$ 個の点 p_1, \dots, p_{n+1} を与え, $p_{n+1} = \infty$ とする. また, これらの点にレベル K の最高ウェイト $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ を与える. 対応する共形ブロック空間 $\mathcal{H}(p, \lambda)$ は

$$(V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n} \otimes V_{\lambda_{n+1}}^*)/\mathfrak{g}$$

の商空間と同一視される. これは \mathcal{H}_λ を Verma 加群の商として表すときの代数関係式に由来する. Feigin, Schechtman, Varchenko [2] によってこの代数関係式は ρ と両立して写像

$$\rho: \mathcal{H}(p, \lambda) \rightarrow H^m(\Omega^*(Y_{n,m}), \nabla).$$

が得られることが示されている. この写像により

$$\phi: H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \rightarrow \mathcal{H}(p, \lambda)^*$$

が, 積分によって

$$\langle \phi(c), w \rangle = \int_c \rho(w).$$

で定義される.

共形ブロックの空間は KZ 接続で不変であり, そのモノドロミー表現として P_n は $\mathcal{H}(p, \lambda)^*$ に作用し, 写像 ϕ は P_n の作用について同変的である.

共形場理論においてパラメータ κ と最高ウェイトが特別な値をとるとき, 写像 $\phi: H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \rightarrow \mathcal{H}(p, \lambda)^*$ は必ずしも同型ではない.

自然な写像

$$\alpha : H_m(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*) \rightarrow H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)$$

を考え $\text{Im}(\alpha) = H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)_{reg}$ とおく. $H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)_{reg}$ は正規化可能なサイクルの空間とよばれる. 次の定理が成立する.

定理 ([4]) ϕ は同型写像

$$H_m^{lf}(Y_{n,m}, \mathcal{L}^*)_{reg} \cong \mathcal{H}(p, \lambda)^*.$$

を与え, これは P_n の作用について同変的である.

参考文献

- [1] S. Bigelow, The Lawrence-Krammer representation, *Topology and geometry of manifolds* (Athens, GA, 2001), 51–68, Proc. Sympos. Pure Math. **71**, Amer. Math. Soc., 2003.
- [2] B. Feigin, V. Schechtman and A. Varchenko, On algebraic equations satisfied by hypergeometric correlators in WZW models I, *Comm. Math. Phys.* **163** (1994), 173–184.
- [3] T. Kohno, *Conformal field theory and topology*, Translations of Mathematical Monographs **210**, American Mathematical Society, 2002.
- [4] T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, preprint 2010.
- [5] V. Schechtman and A. Varchenko, Hypergeometric solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov equation, *Lett. in Math. Phys.* **20** (1990), 93 – 102.
- [6] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, *Adv. Stud. Pure Math.* **19** (1990), 459–566.
- [7] A. Varchenko, *Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie algebras and quantum groups*, *Advances in Math. Phys.* **21**, World Scientific, 1995.