

# 等号付き多重ゼータ値の様相といくつかの予想<sup>1</sup>

大野 泰生 (近畿大学 理工学部)

講演では 3 つの予想を軸にお話した。これらの予想はその後 1 年余りの間に飛躍的な研究成果をもたらした。うち 2 つについては現時点において満足すべきレベルまでの解決をみた。ここでは、“MZSV に関する双対的性質” と、未解決の “2-1 関係式” の 2 予想について記す。

## 1 次元予想と直和予想

最初に多重ゼータ値のいくつかの基本事項を復習しておく。

収束インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  すなわち  $k_1 \geq 2, k_j \in \mathbb{N} (j = 1, 2, \dots, n)$  を満たす多重インデックス  $\mathbf{k}$  に対して、

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で多重ゼータ値 (MZV) を、

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で等号付き多重ゼータ値 (MZSV) を定義する。また、 $\mathbf{k}$  の weight  $\text{wt}(\mathbf{k})$ , depth  $\text{dep}(\mathbf{k})$ , height  $\text{ht}(\mathbf{k})$  とは、それぞれ、 $k_1 + k_2 + \dots + k_n, n, \#\{j \mid k_j \geq 2\}$  の値とする。同じ weight をもつ MZV と MZSV は、互いに他の一次結合で表せる。

多重ゼータ値について

$$\zeta(2, 1) = \zeta(3), \quad \zeta(2, 1, 1) = \zeta(4), \quad \zeta(3, 1) = \frac{1}{4}\zeta(4) \quad \zeta(2, 2) = \frac{3}{4}\zeta(4),$$

$$\zeta(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}, \quad \zeta(\underbrace{3, 1, 3, 1, \dots, 3, 1}_{2n}) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!},$$

などを始めとして、たくさんの関係式が知られている。

<sup>1</sup>RIMS 研究集会 多重ゼータ値の諸相 (2010 年 9 月 6~9 日・於 京都大学 数理解析研究所)

各 weight の多重ゼータ値の張る  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間については、次のようなことが予想されている。  $\mathcal{Z}_k$  を、  $\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$ ,  $k \geq 2$  については  $\mathcal{Z}_k = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k)} \mathbb{Q}\zeta(\mathbf{k})$  とし、  $\mathcal{Z} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k$  で定義する。ここで  $I_0(k)$  は、weight が  $k$  の収束インデックスの全体を表している。一般に  $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_{k'} \subset \mathcal{Z}_{k+k'}$  が成り立つ。一方、数列  $\{d_k\}$  を、  $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, k \geq 3$  については  $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$  で定義する。このとき、多重ゼータ値に関する次元予想と直和予想とは次のものである。

**予想 1** (次元予想). 任意の整数  $k \geq 0$  に対して

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k.$$

**予想 2** (直和予想).

$$\mathcal{Z} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{Z}_k.$$

予想次元を表にすると以下のようにになっている。

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\#I_0(k)$			1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$d_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

次元予想に関する著しい結果は以下のものである。

**定理 1** (Terasoma [11], Deligne-Goncharov [2]). 任意の整数  $k \geq 0$  に対して

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k.$$

## 2 MZSV の双対的性質

収束インデックス  $\mathbf{k}$  ( $\text{ht}(\mathbf{k}) = s$ ) から、自然数の組  $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s\}$  を次のように決める:

$$\mathbf{k} = (a_1 + 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b_1-1}, a_2 + 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b_2-1}, \dots, a_s + 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{b_s-1}).$$

このとき、 $\mathbf{k}$  の双対インデックス  $\mathbf{k}'$  を次で定める:

$$\mathbf{k}' = (b_s + 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_s-1}, b_{s-1} + 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_{s-1}-1}, \dots, b_1 + 1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_1-1}).$$

このとき、多重ゼータ値 (MZV) の双対関係式とは次のものである。

**定理 2** (双対関係式 (known)).

$$\zeta(\mathbf{k}') = \zeta(\mathbf{k}).$$

証明は多重ゼータ値の反復積分表示における変数変換による。

双対関係式は長らく MZV 固有のものと考えられていた。しかし, Kaneko は Hoffman の行った研究, すなわち有限和に制限した多重ゼータ値の観察から着想を得て, そのひとつの帰結として, 高さ 1 の MZSV の双対的性質に関する予想を定式化した。この予想はその後, 筆者との共同研究の中で一般の高さにおける予想に拡張されるとともに, 高さ 1 に関しての証明が与えられた。これを述べるにあたって,  $\mathcal{R} = \mathbb{Q}\{\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \dots\}$  とし,  $\mathcal{R}_k$  は  $\mathcal{R}$  の weight  $k$  部分ベクトル空間とする。つまり,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \mathbb{Q}\zeta(2), & \mathcal{R}_3 &= \mathbb{Q}\zeta(3), & \mathcal{R}_4 &= \mathbb{Q}\zeta(2)^2, \\ \mathcal{R}_5 &= \mathbb{Q}\zeta(5) + \mathbb{Q}\zeta(2)\zeta(3), & \mathcal{R}_6 &= \mathbb{Q}\zeta(3)^2 + \mathbb{Q}\zeta(2)^3, \\ \mathcal{R}_7 &= \mathbb{Q}\zeta(7) + \mathbb{Q}\zeta(2)\zeta(5) + \mathbb{Q}\zeta(2)^2\zeta(3), & \dots & \end{aligned}$$

である。また,  $I_0(k, n, s) = \{\mathbf{k} \mid \text{wt}(\mathbf{k}) = k, \text{dep}(\mathbf{k}) = n, \text{ht}(\mathbf{k}) = s\}$  とする。

**予想 3** (MZSV の双対的性質の予想 (Kaneko-O. [5])).  $m, n \geq s \geq 1$  に対して, 次が成立する:

$$(-1)^n \sum_{\mathbf{k} \in I_0(m+n+1, m+1, s)} \zeta^*(\mathbf{k}) - (-1)^m \sum_{\mathbf{k} \in I_0(m+n+1, n+1, s)} \zeta^*(\mathbf{k}) \in \mathcal{R}_{m+n+1}.$$

**定理 3** (height 1 の双対的公式 (Kaneko-O. [5], Yamazaki [12])). 上の予想は,  $s = 1$  のとき正しく, さらに次が成立する:

$$\begin{aligned} \sum_{n, m \geq 1} \left\{ (-1)^m \zeta^*(m+1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n) - (-1)^n \zeta^*(n+1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_m) \right\} x^m y^n \\ = \psi(x) - \psi(y) + \pi (\cot(\pi x) - \cot(\pi y)) \frac{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)}{\Gamma(1-x-y)}. \end{aligned}$$

**注意** 一般の高さに関する MZSV の双対的性質の予想は, 2012 年の Li の論文 ([6]) で肯定的に解決された。Li の証明は C. Yamazaki による高さ 1 の場合の証明を一般化したものと言え, 一般超幾何関数の接続公式を巧みに用いている。

### 3 2-1 予想

次に、今のところ MZSV 固有の予想関係式（つまり MZV では類似の関係式が発見されていない）を述べる.

**予想 4** (2-1 予想 (O.-Zudilin [10])).

$$\zeta^*(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{s_1}, 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{s_2}, 1, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{s_\ell}, 1)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} (-1)^{\ell - \text{dep}(\mathbf{k})} 2^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta^*(\mathbf{k}) \left( = \sum_{\mathbf{k}} 2^{\text{dep}(\mathbf{k})} \zeta(\mathbf{k}) \right).$$

ここで、和は  $\mathbf{k} = (2s_1 + 1 \square 2s_2 + 1 \square \dots \square 2s_\ell + 1)$  の形、ただし各々の  $\square$  には “,” が “+” のどちらかが入る、 $2^{\ell-1}$  個のインデックスを走るものとする.

以下、解決している場合のいくつかについて述べる. まず、 $\ell = 1$  の場合については先人の結果

$$\zeta^*(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_n, 1) = 2\zeta(2n + 1)$$

がある. これは巡回和公式 ([9]) の特別な場合と見ることもできる. つぎに、 $\ell = 2$  の場合については、巡回和公式の証明に登場するような部分分数の計算操作を駆使することで示され次を得る.

**定理 4** (O.-Zudilin [10]).  $n \geq j \geq 1$  に対して

$$\zeta^*(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_j, 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-j}, 1) = 4\zeta^*(2j + 1, 2n - 2j + 1) - 2\zeta^*(2n + 2).$$

また、ダブルシャッフル関係式を応用する証明手法により、 $\ell = k - 2$ ,  $s_1 = 1, s_2 = s_3 = \dots = s_{k-2} = 0$  の場合も証明できるのだが、この証明の途上で自然につぎの関係式が導かれる.

**定理 5** (Weighted sum formula (O.-Zudilin [10])).  $n \geq 3$  に対して

$$\sum_{j=2}^{n-1} 2^j \zeta(j, n-j) = (n+1)\zeta(n).$$

Weighted sum formula の類似や一般 depth への拡張の研究<sup>2</sup>は内外で行われており、いくつかの進んだ成果が知られている.

<sup>2</sup>T. Nakamura [8], L. Guo and B. Xie [4], M. Eie, W.-C. Liaw and Y.-L. Ong [3] など.

## 参考文献

- [1] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 41 (2005), 329-337.
- [2] P. Deligne and A. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 38 (2005), 1-56.
- [3] M. Eie, W.-C. Liaw and Y.-L. Ong, Preprint.
- [4] L. Guo and B. Xie, Weighted sum formula for multiple zeta values, *J. Number Theory* 129 (2009), 2747-2765.
- [5] M. Kaneko and Y. Ohno, On a kind of duality of multiple zeta-star values, *Int. J. Number Theory* 6 (2010), 1927-1932.
- [6] Z.-h. Li, On a conjecture of Kaneko and Ohno, *Pacific Journal of Math.* 257 (2012), 419-430.
- [7] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, *J. Number Theory* 128 (2008), 2538-2548.
- [8] T. Nakamura, Restricted and weighted sum formulas for double zeta values of even weight, *Šiauliai Math. Semin.* 4 (2009), 151-155.
- [9] Y. Ohno and N. Wakabayashi, Cyclic sum of multiple zeta values, *Acta Arith.* 123 (2006), 289-295.
- [10] Y. Ohno and W. Zudilin, Zeta stars, *Commun. Number Theory Phys.* 2 (2008), 325-347.
- [11] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.* 149 (2002), 339-369.
- [12] C. Yamazaki, On the duality for multiple zeta-star values of height one, *Kyushu J. Math.* 64 (2010), 145-152.
- [13] S. Zlobin, Generating functions for the values of multiple zeta function, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* 73 (2005), 55-59.