数理解析研究所講究録
第 1814 巻 2012 年 85-96

ベズー構成を用いた多変数近似GCD計算
～桁落ち誤差解析～

讃岐 勝

MASARU SANUKI

筑波大学 教育開発国際協力研究センター (CRICED)

CENTER FOR RESEARCH ON INTERNATIONAL COOPERATION IN EDUCATIONAL DEVELOPMENT,

UNIVERSITY OF TSUKUBA *

Abstract

本稿では，1 変数多項式の GCD 計算法である Barnett の方法 (定理) および Barnett の方法を多変数多項式の GCD を計算できるよう拡張したベズー構成について，悪条件の場合 (微小主係数 GCD 問題) の桁落ち誤差解析を行う．

1 はじめに

近似代数では，1980 年末に理論が提唱されてから現在に至るまで，**近似 GCD** (最大公約子)・**近似因数分解・近似グレブナー基底**の計算に関する研究は数多くされている (ISSAC, SNC などを参照)．近似因数分解・近似グレブナー基底の計算は工学などの問題を解く際に直接利用されるが，近似 GCD は上の計算を行うときの前処理として利用されることが多い．以上の理由から，前処理として利用される前提のもと近似 GCD の算法開発およびそれに関する研究を行うことが実用的かと思う．本稿では精度よく計算可能な数値計算および効率よく計算可能な数式処理の利点を活かした算法に関する算法 (Barnett の方法，ベズー構成) に関して議論を行う．[KYZ05, KYZ06, Terui09] のように，許容度 (誤差部) を如何に小さくするかという研究でないため，本稿ではこの話題には触れない．そのため，本稿では多項式に接動項をあえて与えていない．

互除法および QRGCD 法など多項式の主係数消去に基づく近似 GCD 算法は，与えられた多項式が微小主係数の GCD を持つ場合，1 回の主係数消去で微小主係数に依存した桁落ちが発生する (微小主係数 GCD 問題)[CWZ04, SS07]．いずれの方法もシルベルター行列の QR 分解を基にした方法である．

シルベスター行列を用いない方法として，コンパニオン行列 [Barnett70, Barnett71] およびベズー行列 [DG02] を用いる方法があり，これらの方法は，各 (部分) 行列の LU 分解を利用して近似 GCD を計算する (Barnett による方法：Barnett の定理)．コンパニオン行列を用いる方法とベズー行列を用いる方法は同じものとして扱えるので，本稿ではベズー行列を用いる方法にのみ注目して議論を進める．

ベズー行列とシルベスター行列は密接な関係があるので，**"シルベスター行列の LU 分解を基とする近似 GCD の悪条件問題は，ベズー行列の LU 分解を基とする近似 GCD の悪条件問題になるのではないか"** という疑問がでてくる．本稿では，この疑問に対する解析を行う．微小主係数 GCD を持つ多項式のベズー行列の条件数は，微小主係数 GCD の大きさに反比例した関係を持つため，悪条件問題であることは既知で

*sanuki@criced.tsukuba.ac.jp

あるが [Sanuki09]，本来は行列を前処理することによって悪条件問題が良条件問題に変換できることも考慮して悪条件性を議論しなければならない．本稿では，変換を行わなわず算法のそのものについて考えることにし，その場合には微小主係数 GCD の大きさに依存した大きな桁落ちが起きることを示す．

ベズー行列を基とした多変数 GCD 計算法としてベズー構成がある [Sanuki09]．この算法はベズー行列を利用したリフティングテクニック (ベズーリフティング) を用いた方法であり 1 変数 GCD 計算とは方法がまったく異なるため，改めて解析を行う必要がある．本稿では，微小主係数 GCD を持つ多項式の近似 GCD をベズー行列を用いた Barnett の方法とその拡張された方法で計算した場合に得られた近似 GCD の精度の解析を行う．計算で得られた近似 GCD をモニタリングするために，有効浮動小数を用いる [KS97]．

本稿では次の記号を用いる．主変数 x，従変数 $u_1,\cdots,u_\ell$ の数体 $\mathbb{K}$ 上の多項式 $F(x,\boldsymbol{u}) = \mathbb{K}[x,\boldsymbol{u}] = \mathbb{K}[x,u_1,\cdots,u_\ell]$ について，$\deg(F)$ は主変数 x に関する次数を表す．$||F||$ は多項式ノルムを表す；$||F|| = \max\{||\text{coefficient of } F||\}$．$\gcd(F,G)$ は多項式 F と G の GCD を表す．$\mathrm{appgcd}(F,G)$ は多項式 F と G の近似 GCD を表す．

2 ベズー行列を用いた GCD 計算

2.1 Barnett の定理

Barnett により提案されたコンパニオン行列の列の線形関係に基づく GCD 計算法は，Daiz-Tica & G.-Vega によりベズー行列の列の線形関係に基づく GCD 計算法へ改良された [DG02]．本稿では，Daiz-Tica & G.-Vega による方法を利用する．

定理 1 (Barnett の定理 [DG02])
$f(x)$ と $g(x)$ のベズー多項式 $\mathrm{Bpol}(f,g) = (f(x)g(y)-f(y)g(x))/(x-y) = \sum b_{i,j}x^iy^j \in \mathbb{K}[x,y]$ の係数からなるベズー行列 $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{0\le i,j\le n-1} = (\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ を構成する $(n=\max\{\deg(f),\deg(g)\})$．$k=\deg(\gcd(f,g))$ とするとき，$n-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{b}_k,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-1}$ は一次独立であり，かつ，$\boldsymbol{b}_i(0\le 0\le k-1)$ は $\boldsymbol{b}_k,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-1}$ によって張られ，さらに次の関係をみたす．

$$\boldsymbol{b}_i = c_{i,1}\boldsymbol{b}_k + \sum_{j=1}^{n-k-1} c_{i,1+j}\boldsymbol{b}_{k+j},\ for\ 0\le i\le k-1. \tag{1}$$

ここで，各 $c_{i,1}$ は $\gcd(f,g)$ の x^i の係数 c_i を主係数 c_k で割った値 c_i/c_k に対応する，すわなち，$c_{i,1}=c_i/c_k$．

上の定理から，モニックな GCD $\gcd(f,g) = x^k + c_{k-1}/c_kx^{k-1}+\cdots+c_0/c_k$ を計算できる．(1) は full rank の過剰決定系線形方程式なので，次のように書き直せる．

$$\begin{pmatrix} b_{i,k} \\ b_{i,k+1} \\ \vdots \\ b_{i,n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k,k} & b_{k,k+1} & \cdots & b_{k,n-1} \\ b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} & \cdots & b_{k+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,k} & b_{n-1,k+1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i,1} \\ c_{i,2} \\ \vdots \\ c_{i,n-k} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i = c_{i,1}\tilde{\boldsymbol{b}}_k + \sum_{j=1}^{n-k-1} c_{i,1+j}\tilde{\boldsymbol{b}}_{k+j} \tag{3}$$

$$= \tilde{\mathrm{B}}\boldsymbol{c}_i \quad for\ 0\le i\le k-1. \tag{4}$$

ここで，$\tilde{\mathrm{B}}$ は正則な数値正方行列である．以下では，Barnett の方法を用いて 1 変数近似 GCD を計算するために，(2) すなわち (4) の線形方程式を Gauss の消去法を用いて解く (LU 分解の利用);

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i = \tilde{\mathrm{B}}\boldsymbol{c}_i = \mathrm{PLU}\boldsymbol{c}_i. \tag{5}$$

ここで，各正方行列 P，L，U はそれぞれ置換行列，下三角行列，上三角行列である．

注意 1
Barnett の方法による計算量は $O(n^2)$ であり，*FFT* と *Displacement* のテクニックを利用する [BB07].

2.2 ベズー構成

Barnett の定理は $\mathbb{K}(\boldsymbol{u})$ を係数とする多項式環 $\mathbb{K}(\boldsymbol{u})[x]$ に拡張することによって，多変数多項式の GCD を求めることができる．[Sanuki09] では効率的に GCD を求めるため，打ち切りべき級数環上で計算を行う．多変数多項式 $F(x,\boldsymbol{u})$ と $G(x,\boldsymbol{u})$ からなるベズー多項式

$$\mathrm{Bpol}(F,G)=\frac{F(x,\boldsymbol{u})G(y,\boldsymbol{u})-F(y,\boldsymbol{u})G(x,\boldsymbol{u})}{x-y}=\sum_{0\le i,j\le n-1} b_{i,j}(\boldsymbol{u})x^iy^j\in\mathbb{K}[x,y,\boldsymbol{u}]$$

について ($n=\max\{\deg(F),\deg(G)\}$)，多項式の係数からなる行列 $\mathrm{B}(F,G)=(b_{i,j}(\boldsymbol{u}))_{i,j}\in\mathbb{K}[\boldsymbol{u}]^{n\times n}$ を多変数多項式 F と G の (主変数 x に関する) ベズー行列と定義する．ベズー行列の部分行列 $\tilde{\mathrm{B}}(F,G)=(b_{i,j}(\boldsymbol{u}))_{k\le i,j\le n-1}\in\mathbb{K}[\boldsymbol{u}]^{(n-k)\times(n-k)}$ を従変数 $\boldsymbol{u}$ に関する全次数 i の斉次多項式要素の行列 $\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(i)}(\boldsymbol{u})$ の和として表す．

$$\tilde{\mathrm{B}}(F,G)=\tilde{\mathrm{B}}^{(0)}+\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)}+\cdots+\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)}+\cdots. \tag{6}$$

$\boldsymbol{s}\in\mathbb{K}^\ell$ を $\mathrm{lc}(\gcd(F,G))\big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}}\neq 0$ をみたすように選んだ展開点，I を $I=\langle\boldsymbol{u}-\boldsymbol{s}\rangle=\langle u_1-s_1,\cdots,u_\ell-s_\ell\rangle$ からなるイデアルとするとき，次の数値線形方程式系を解くことにより $\gcd(F,G)\pmod I$ が計算できる (定理 1).

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_i\equiv\tilde{\mathrm{B}}(F,G)\boldsymbol{c}_i^{(0)}\pmod I\quad(i=0,\cdots,k-1).$$

また，次も成り立つ．

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\boldsymbol{u}) &\equiv c_{i,1}^{(w)}(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{b}}_k(\boldsymbol{u})+\sum_{j=1}^{n-k-1}c_{i,1+j}^{(w)}(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{b}}_{k+j}(\boldsymbol{u})\pmod{I^{w+1}} &(7)\\ &\equiv \tilde{\mathrm{B}}(F,G)\boldsymbol{c}_i^{(w)}(\boldsymbol{u})\pmod{I^{w+1}}. &(8)\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{c}_i^{(w)}(\boldsymbol{u})=(c_{i,1}^{(w)}(\boldsymbol{u}),\cdots,c_{i,n-k}^{(w)}(\boldsymbol{u}))^T\in\mathbb{K}[\boldsymbol{u}]^{n-k}$ は従変数 $\boldsymbol{u}$ に関して全次数 w の多項式を要素とするベクトルであり，第 1 要素は次をみたす ($c_k(\boldsymbol{u})$ は $\gcd(F,G)$ の主係数，$c_i\equiv c_i^{(w)}\pmod{I^{w+1}}$).

$$\gcd(F,G)\equiv x^k+c_{k-1,1}^{(w)}/c_k^{(w)}x^{k-1}+\cdots+c_{0,1}^{(w)}/c_k^{(w)}\pmod{I^{w+1}}. \tag{9}$$

(8) が成り立つと仮定するとき，$\boldsymbol{c}_i^{(w+1)}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{c}_i^{(w)}(\boldsymbol{u})+\delta\boldsymbol{c}_i^{(w+1)}(\boldsymbol{u})$ をみたす全次数 $w+1$ の斉次多項式を要素とするベクトル $\delta\boldsymbol{c}_i^{(w+1)}(\boldsymbol{u})$ は次のように構成する．(8) より，

$$\delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{c}_i^{(0)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w+1)}+\delta\boldsymbol{c}_i^{(1)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)}+\cdots+\delta\boldsymbol{c}_i^{(w)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)}+\delta\boldsymbol{c}_i^{(w+1)}\tilde{\mathrm{B}}^{(0)} \tag{10}$$

上式を整理することによって，$\delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(w+1)}(\boldsymbol{u})$ が得られる．

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{c}_i^{(w+1)} &= (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1}\{\delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{c}_i^{(0)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w+1)}-\delta\boldsymbol{c}_i^{(1)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)}-\cdots-\delta\boldsymbol{c}_i^{(w)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)}\}\\ &= (\mathrm{PLU})^{-1}\{\delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{c}_i^{(0)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w+1)}-\delta\boldsymbol{c}_i^{(1)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)}-\cdots-\delta\boldsymbol{c}_i^{(w)}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)}\}. \end{aligned}\tag{11}$$

注意 2
$\delta\boldsymbol{c}_i^{(w+1)}(\boldsymbol{u})$ ($w\ge 0$) を構成するためには $\tilde{\mathrm{B}}^{(0)}$ の LU 分解を行う必要があるが，$\boldsymbol{c}_i^{(0)}(\boldsymbol{u})$ を計算したときに LU 分解をすでに行っているので，実際には行列とベクトルの積の計算だけで GCD の次数をあげることができるため効率的な算法である．

3 ベズー行列の要素とGCDの関係

本章では，ベズー構成の桁落ち誤差解析を行うために $\boldsymbol{c}_i^{(w)}$ を $\tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(0)}, \delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(1)}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(w)}$ とベズー行列を用いて書き直す．前章より，

$$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(0)} \\ \delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \delta\tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(w)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} & & & & \\ \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} & & & \\ \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(2)} & \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)} & \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w-1)} & \cdots & \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_i^{(0)} \\ \delta\boldsymbol{c}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \delta\boldsymbol{c}_i^{(w)} \end{pmatrix} = \mathcal{B}_w \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_i^{(0)} \\ \delta\boldsymbol{c}_i^{(1)} \\ \vdots \\ \delta\boldsymbol{c}_i^{(w)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$\tilde{\mathrm{B}}^{(0)}$ は正則なので，正方行列 $\mathcal{B}_w$ は正則である．今，$\mathcal{B}_w^{-1}$ を求めるため $\mathcal{B}_w$ が次のように分解できることに注目する．

$$\mathcal{B}_w = \begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} & & & & \\ \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} & & & \\ \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(2)} & \mathbf{0}_{n-k} & \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)} & \mathbf{0}_{n-k} & \cdots & \mathbf{0}_{n-k} & \tilde{\mathrm{B}}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-k} & & & & \\ & \mathrm{I}_{n-k} & & & \\ & \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \ddots & & \\ & \vdots & & \mathrm{I}_{n-k} & \\ & \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w-1)} & & & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-k} & & & & \\ & \mathrm{I}_{n-k} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathrm{I}_{n-k} & \\ & & & \delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix}.$$

ただし，$\mathbf{0}_{n-k} \in \mathbb{K}^{(n-k)\times(n-k)}$ は零行列，$\mathrm{I}_{n-k} \in \mathbb{K}^{(n-k)\times(n-k)}$ は単位行列である．このとき，$\mathcal{B}_w^{-1}$ は次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-k} & & & & \\ & \mathrm{I}_{n-k} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathrm{I}_{n-k} & \\ & & & -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-k} & & & & \\ & \mathrm{I}_{n-k} & & & \\ & -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w-1)} & & & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & & & & \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & & & \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(2)} & \mathbf{0}_{n-k} & (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)} & \mathbf{0}_{n-k} & \cdots & \mathbf{0}_{n-k} & (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-k} & & & \\ & \mathrm{I}_{n-k} & & \\ & \mathcal{S}_1 & \ddots & \\ & \vdots & \ddots & \mathrm{I}_{n-k} & \\ & \mathcal{S}_{w-1} & \cdots & \mathcal{S}_1 & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & & & & \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & & & \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(2)} & \mathbf{0}_{n-k} & (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(w)} & \mathbf{0}_{n-k} & \cdots & \mathbf{0}_{n-k} & (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} \end{pmatrix}.$$

ただし，

$$\mathcal{S}_j = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{j-1} -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(j-p)}\mathcal{S}_p + \mathcal{S}_1 & j > 1 \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} & j = 1 \end{cases}. \tag{13}$$

以上から，次を得る．

$$\mathcal{B}_w^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_0 & & & & \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \mathcal{T}_{w-1} & \ddots & \ddots & \mathcal{T}_0 & \\ \mathcal{T}_w & \mathcal{T}_{w-1} & \cdots & \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

ここで，$\mathcal{T}_j$ は次のように表現される行列である．

$$\mathcal{T}_j = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{j-1} S_p \times \{-(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(j-p)}\} - (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(j)} & j > 1 \\ -(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-2}\delta\tilde{\mathrm{B}}^{(1)} = \mathcal{S}_1(\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & j = 1 \\ (\tilde{\mathrm{B}}^{(0)})^{-1} & j = 0 \end{cases} \tag{15}$$

4　悪条件問題：微小主係数問題

微小主係数 GCD を持つ場合に計算が不安定になることがある．この場合，Barnett の方法およびベズー構成もベズー行列の部分行列 $\tilde{\mathrm{B}}$ の条件数が大きくなるため計算が不安定になる [Sanuki09]．本節では条件数が大きくなる以外に桁落ち誤差が発生することを指摘する．

以下の計算例では桁落ち誤差をモニタリングするため，数を有効浮動小数を変換して数値実験を行っている [KS97]．この数は，実部 f と誤差部 e からなるリストにより構成される数 $\#\mathrm{E}[f,e]$ であり，e の初期値は $e = |f| \cdot e_{\mathrm{M}}$ より定める (e_{M} はマシンイプシロンであり，$e_{\mathrm{M}} = 10^{-10}$ と定めた)．2 項演算は次の規則によって行われる．

$$\begin{aligned} \#\mathrm{E}[f_1,e_2] + \#\mathrm{E}[f_2,e_2] &= \#\mathrm{E}[f_1+f_2, \max\{e_1,e_2\}], \\ \#\mathrm{E}[f_1,e_2] - \#\mathrm{E}[f_2,e_2] &= \#\mathrm{E}[f_1-f_2, \max\{e_1,e_2\}], \\ \#\mathrm{E}[f_1,e_2] \times \#\mathrm{E}[f_2,e_2] &= \#\mathrm{E}[f_1\times f_2, \max\{e_1|f_2|, e_2|f_1|\}], \\ \#\mathrm{E}[f_1,e_2] \div \#\mathrm{E}[f_2,e_2] &= \#\mathrm{E}[f_1\div f_2, \max\{e_1\left|f_2/f_1^2\right|, e_2/|f_1|\}]. \end{aligned}$$

$|f| < e$ のとき，0 に書き換えられる．この操作は，浮動小数係数の多項式演算を行う上で必要な操作である．

4.1　1 変数 GCD 計算

1 変数近似 GCD の桁落ち誤差を解析するため，1)．ベズー行列の構成のとき桁落ち誤差が発生しないか，2)．ベズー行列の部分行列 $\tilde{\mathrm{B}}$ の LU 分解における桁落ち誤差解析，を行う．

以下では，1 変数多項式 f と g の近似 GCD の主係数を $c_k = \gamma$ と表し，主係数は微小であると仮定する；

$$|\gamma| = |c_k| \ll \max_{0\le i\le k-1}\{|c_i|\}. \tag{16}$$

最初にベズー行列の要素ついて注目する (相対誤差の推移を観察する)．

補題 2 (消去)
微小主係数の共通因子を持つ多項式 f と g について，f の主係数以外の係数を g によって消去するとき桁落ち誤差は発生しない．

証明 $f_i, g_i \neq 0$ を仮定する．f の x^i の係数を g の x^i の係数によって消去する操作 $\check{h}_{i,j} = g_i f - f_i g$ は次のようになる．

$$\begin{vmatrix} f_n & f_i \\ g_n & g_i \end{vmatrix} x^n + \cdots + \begin{vmatrix} f_{i+1} & f_i \\ g_{i+1} & g_i \end{vmatrix} x^{i+1} + 0 \cdot x^i + \begin{vmatrix} f_{i-1} & f_i \\ g_{i-1} & g_i \end{vmatrix} x^{i-1} + \cdots .$$

$\begin{vmatrix} f_j & f_j \\ g_i & g_j \end{vmatrix}$, for $i \neq j < n$ は次の式の和で書ける．

$$\begin{vmatrix} \tilde{f}_{i'} & \tilde{f}_{j'} \\ \tilde{g}_{i'} & \tilde{g}_{j'} \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \tilde{f}_{i''} & \tilde{f}_{j''} \\ \tilde{g}_{i''} & \tilde{g}_{j''} \end{vmatrix} .$$

$\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ は互いに素なので，$\begin{vmatrix} \tilde{f}_p & \tilde{f}_q \\ \tilde{g}_p & \tilde{g}_q \end{vmatrix}$ の絶対値は $O(1)$ となる $(p \neq q)$．ゆえに，$\check{h}_{i,j}$ の計算において桁落ち誤差は発生しない． ∎

命題 3 (ベズー行列の構成)
微小主係数 GCD をもつ数値係数多項式 f と g のベズー行列を構成するとき，微小主係数 γ に依存した桁落ち誤差は発生しない．

証明 ベズー行列の各要素は $\check{h}_{i,j}$ の和でかけ，それぞれは互いに無関係なので和をとった場合にも桁落ち誤差は発生しない． ∎

補題 4 (LU 分解後の各要素の大きさ)
多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が k 次の微小主係数の近似 GCD を持つとする．部分ベズー行列を $\tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{PLU}$ と LU 分解するとき，行列 L と U の各要素の絶対値は次のように見積もられる．

$$(i,j)\text{-}element\ of\ \mathrm{L} = \begin{cases} O(1) & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases} \tag{17}$$

$$(i,j)\text{-}element\ of\ \mathrm{U} = \begin{cases} O(1) & (i,j) \neq (n-k, n-k) \\ O(1/\gamma^n) & (i,j) = (n-k, n-k) \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{18}$$

証明 $\tilde{\mathrm{B}}^{(0)}$ の第 i 行は $\mathrm{Bpol}(f,g)$ の $x^{i+k-1}y^k \sim x^{i+k-1}y^{n-1}$ の係数に対応する．$\tilde{\mathrm{B}}^{(0)}$ の行消去は，$\mathrm{Bpol}(f,g) \times x^{i_1}y^{j_1}$ と $\mathrm{Bpol}(f,g) \times x^{i_2}y^{j_2}$ の差に対応するので，数式の差として解析を行う．$\tilde{\mathrm{B}}(f,g)$ の行に次にように名前をつける．

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{B}}(f,g) &= (\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{b}_{n-1}) \\ &= \begin{pmatrix} b^{(0)}_{k,k} & b^{(0)}_{k,k+1} & \cdots & b^{(0)}_{k,n-1} \\ b^{(0)}_{k+1,k} & b^{(0)}_{k+1,k+1} & \cdots & b^{(0)}_{k+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{(0)}_{n-1,k} & b^{(0)}_{n-1,k+1} & \cdots & b^{(0)}_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow b^{(k,0)}\text{-row} \\ \longleftarrow b^{(k+1,0)}\text{-row} \\ \quad\vdots \\ \longleftarrow b^{(n-1,0)}\text{-row} \end{array} \end{aligned} \tag{19}$$

$|b_{p_1,k}| = \max_p\{|b_{p,k}|\}$ とする．$b^{(p_1,0)}$-row を軸とする行消去をするとき，次の計算が行われる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b^{(0)}_{k+i,1} & b^{(0)}_{p_1,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{(p_1,0)}\text{-row} \\ b^{(k+i,0)}\text{-row} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{(1)}_{p_1,k} & b^{(1)}_{p_1,k+1} & \cdots & b^{(1)}_{p_1,n-1} \\ 0 & b^{(1)}_{k+i,k+1} & \cdots & b^{(1)}_{k+i,n-1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow b^{(p_1,0)}\text{-row} \\ \longleftarrow b^{(k+i,1)}\text{-row} \end{array}$$

ただし，$i \in \{i \in \mathbb{N}_0 | 0 \le i \le n-k-1 \text{ and } n+i \ne p_1\}$．列消去後の行列は次のようになる (行の名前もアップデートされている)．

$$\begin{pmatrix} b^{(0)}_{p_1,k} & b^{(0)}_{p_1,k+1} & \cdots & b^{(0)}_{p_1,n-1} \\ 0 & b^{(1)}_{k+1,k+1} & \cdots & b^{(1)}_{k+1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b^{(1)}_{n-1,k+1} & \cdots & b^{(1)}_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow b^{(p_1,0)}\text{-row} \\ \longleftarrow b^{(k+1,1)}\text{-row} \\ \qquad \vdots \\ \longleftarrow b^{(n-1,1)}\text{-row} \end{array} \tag{20}$$

ベズー多項式は $\mathrm{Bpol}(f,g) = c(x)c(y)\tilde{D}(x,y)$ と分解できる．ここで，多項式 $\tilde{D}(x,y)$ は $\tilde{D}(x,y) = -\tilde{D}(y,x)$ をみたし，$c(x)$ とは互いに素である．補題 2 より，行消去の操作によって桁落ち誤差は発生しない．したがって，(20) の行列を γ に依存する桁落ち誤差を発生させることなく計算できる．それゆえ，

$$||b^{(1)}_{i,j}||/||b^{(0)}_{i,j}|| = O(1).$$

第 1 列の消去と同様，第 2 列 ∼ 第 $(n-k-2)$ 列の消去も同様に γ に依存する桁落ち誤差を発生させることなく計算できる;

$$||b^{(p+1)}_{i,j}||/||b^{(p)}_{i,j}|| = O(1) \ for \ 1 < p < n-k-1.$$

第 $(n-k-1)$ 列の消去を行ったとき，$(n-k, n-k)$ の要素の大きさは，[Sanuki09] より

$$\det \tilde{\mathrm{B}} = O(1/\gamma^n).$$

であることがわかっているので，$b^{(n-k)}_{n-1,n-1} = O(1/\gamma^n)$ となる．したがって，主張がみたされる． ∎

命題 5 (Barnett の方法における桁落ち誤差解析)
Barnett の方法を用いて，微小主係数 GCD をもつ数値係数多項式 f と g の近似 GCD を計算するとき，近似 GCD の微小主係数 $\gamma \ll 1$ に依存する桁落ち誤差が発生する；

$$\textit{relatively error of } (i,j)\textit{-element of } \mathrm{L} \ = \ O(1), \tag{21}$$

$$\textit{relatively error of } (i,j)\textit{-element of } \mathrm{U} \ = \ \begin{cases} O(1) & (i,j) \ne (n-k, n-k) \\ O(1/\gamma^{n-2}) & (i,j) = (n-k, n-k) \end{cases} \tag{22}$$

証明 [Sanuki09] より $\tilde{\mathrm{B}}$ の主係数 γ に関する要素の大きさは次のように見積もられる．

$$(i,j)\text{-element of } \tilde{\mathrm{B}} = \begin{cases} O(1) & i,j \ne n-k, \\ O(\gamma) & i = n-k \ or \ j = n-k, \\ O(\gamma^2) & i = j = n-k. \end{cases}$$

命題 3 と上の評価から，$\tilde{\mathrm{B}}$ の LU 分解によって行列 U の各要素に関する相対誤差は次のように評価できる．

$$(i,j)\text{-element} \ = \ \begin{cases} O(1)/O(1) = O(1) & i,j \ne n-1 \\ O(\gamma)/O(\gamma) = O(1) & i = n-k \ or \ j = n-k \\ O(\gamma^{-2})/O(\gamma^n) = O(1/\gamma^{n-2}) & i = j = n-k \end{cases}$$

∎

例 1 (微小主係数 GCD)
次の 1 変数多項式 $f(x)$ と $g(x)$ は，微小主係数の近似 GCD を持つ；$\|\mathrm{lc}(\mathrm{appgcd}(f,g))\|/\|\mathrm{appgcd}(f,g)\| = 0.2 \ll 1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+x+1)(x^2+5x+5), \\ g(x) &= (x^3+x^2-1)(x^2+5x+5). \end{aligned}$$

$k=2$ である．この多項式のベズー行列の部分行列 $\tilde{\mathrm{B}}$ の LU 分解をしたときの精度を見積もるため，多項式の係数を有効浮動小数に変換して計算を行っている．次の行列は $\tilde{\mathrm{B}}(f,g) \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ である．

$$\begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[-1.310\cdots, 1.3\cdots\times 10^{-10}] & \#\mathrm{E}[-0.310\cdots, 3.1\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[-0.0200\cdots, 2.0\cdots\times 10^{-12}] \\ \#\mathrm{E}[-0.310\cdots, 3.1\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[0.120\cdots, 1.2\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[0.0400\cdots, 4.0\cdots\times 10^{-12}] \\ \#\mathrm{E}[-0.0200\cdots, 2.0\cdots\times 10^{-12}] & \#\mathrm{E}[0.0400\cdots, 4.0\cdots\times 10^{-12}] & \#\mathrm{E}[0.0100\cdots, 1.0\cdots\times 10^{-12}] \end{pmatrix}$$

この行列の LU 分解 $\tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{PLU}$ をしたとき，各行列は次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{L} &= \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[1, 1.0\cdots\times 10^{-10}] & 0 & 0 \\ \#\mathrm{E}[0.236\cdots, 2.3\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[1, 1.0\cdots\times 10^{-10}] & 0 \\ \#\mathrm{E}[0.0152\cdots, 1.5\cdots\times 10^{-12}] & \#\mathrm{E}[0.231\cdots, 2.0\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[1, 1.0\cdots\times 10^{-10}], \end{pmatrix}, \\ \mathrm{U} &= \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[-1.310\cdots, 1.3\cdots\times 10^{-10}] & \#\mathrm{E}[-0.310\cdots, 3.1\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[-0.0200\cdots, 2.0\cdots\times 10^{-12}] \\ 0 & \#\mathrm{E}[0.193\cdots, 1.2\cdots\times 10^{-11}] & \#\mathrm{E}[0.0447\cdots, 4.0\cdots\times 10^{-12}] \\ 0 & 0 & \#\mathrm{E}[-0.0000434\cdots, 1.0\cdots\times 10^{-12}] \end{pmatrix}.$$

ここで，行列 P，L，U は置換行列，下三角行列，上三角行列である．この分解を利用して次の線形方程式を解くと次を得る．

- $\tilde{\mathrm{B}}\boldsymbol{c}_1 = \tilde{\boldsymbol{b}}_1$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[\ \ 4.999999773, 9.4\cdots\times 10^{-8}] \\ \#\mathrm{E}[-19.99999867,\ \ 3.9\cdots\times 10^{-7}] \\ \#\mathrm{E}[\ \ 74.99999425,\ \ 1.7\cdots\times 10^{-6}] \end{pmatrix}.$$

- $\tilde{\mathrm{B}}\boldsymbol{c}_0 = \tilde{\boldsymbol{b}}_0$

$$\boldsymbol{c}_0 = \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[\ \ 4.999999682, 1.2\cdots\times 10^{-7}] \\ \#\mathrm{E}[-24.99999814,\ \ 5.3\cdots\times 10^{-7}] \\ \#\mathrm{E}[\ \ 99.99999195,\ \ 2.3\cdots\times 10^{-6}] \end{pmatrix}.$$

故に，f と g の近似 GCD として次を得る．

$$\mathrm{appgcd}(f,g) = x^2 + \#\mathrm{E}[\underline{4.999999}773, 9.4\cdots\times 10^{-8}]\,x + \#\mathrm{E}[\underline{4.999999}682, 1.2\cdots\times 10^{-7}].$$

上から Barnett の方法を用いて近似 GCD を計算したとき，主係数に依存した桁落ち誤差 $O((10^2)\sim O(10^3)$ が発生したことが確認できた．

4.2 多変数GCD計算

ベズーリフティングにおける桁落ち解析を行う.

命題 6
選んだ展開点 s に対して，*1* 変数近似 *GCD* の主係数が微小であったと仮定する； $\gamma \ll 1$. このとき，ベズーリフティングによって w 次までの近似 *GCD* を計算するとき，得られた近似 *GCD modulo* I^{w+1} の桁落ち量は次のようになる.

$$O(1/\gamma^{(n-k)w}). \tag{23}$$

証明 $||F(x,u)||, ||G(x,u)|| = O(1)$ より，$||\mathrm{gcd}(F,G)|| = O(1)$ であり $\delta \boldsymbol{c}_i^{(w)}$ の第 1 要素の大きさもまた $O(1)$ である ($w \geq 0$ および $0 \leq i \leq k-1$). [Sanuki09] より次の関係式を得る.

$$O(1) = \delta c_{i,1}^{(w)} \approx \frac{1}{\gamma}\,\delta c_{i,2}^{(w)} \approx \frac{1}{\gamma^2}\,\delta c_{i,3}^{(w)} \approx \cdots \approx \frac{1}{\gamma^{n-k-1}}\,\delta c_{i,n-k}^{(w)}. \tag{24}$$

式 (15) および [Sanuki09] から $\mathcal{T}_p$ for $p > 0$ の各要素のノルムは次のようになる.

$$\begin{aligned} (i,j)\text{-element of } \mathcal{T}_0 &= O(1/\gamma^{i+j-2}), & (25)\\ (i,j)\text{-element of } \mathcal{T}_p &= O(1/\gamma^{p(i+j-2)}). & (26) \end{aligned}$$

$\delta \tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(w-p)}$ の要素，すなわち，$\tilde{\mathrm{B}}$ の要素のノルムは次のようになる.

$$(i,j)\text{-element of } \tilde{\mathrm{B}} = \begin{cases} O(1) & i,j \neq n-k, \\ O(\gamma) & i = n-k \ or \ j = n-k, \\ O(\gamma^2) & i = j = n-k. \end{cases}$$

したがって，積 $\mathcal{T}_p \cdot \delta \tilde{\boldsymbol{b}}_i^{(w-p)}$ の j 番目要素は大きさは $O(1/\gamma^{p(j-2)})$ となる. 故に，$\delta \boldsymbol{c}_i^{(w)}$ の桁落ち量は $O(1/\gamma^{w(n-k)})$ となる. ∎

例 2 (微小主係数 GCD)
微小主係数を持つ近似 GCD を持つ多変数多項式 $F(x,u,v)$ と $G(x,u,v)$ がある.

$$\begin{aligned} F(x,u,v) &= (x^2 - u^2x + v + 1)(0.05x^2 + (v^3-1)x + 1 + u^2 + u^4v), \\ G(x,u,v) &= (x^2 - (u^2+1)x + v + 1)(0.05x^2 + (v^3-1)x + 1 + u^2 + u^4v). \end{aligned}$$

ベズー構成によって計算された $\delta \boldsymbol{c}_1^{(6)}$ と $\delta \boldsymbol{c}_0^{(6)}$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{c}_1^{(4)} &= \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[-19.99999728, 1.5\cdots \times 10^{-5}] \\ \#\mathrm{E}[-379.9999457, 3.1\cdots \times 10^{-4}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \#\mathrm{E}[20.00000000, 1.6\cdots \times 10^{-5}]\, u^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[19.99999473, 1.2\cdots \times 10^{-2}]\, v^3 \\ \#\mathrm{E}[799.9998403, 2.5\cdots \times 10^{-1}]\, v^3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ \#\mathrm{E}[20.00000000, 1.6\cdots \times 10^{-5}]\, u^4v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \#\mathrm{E}[-400.0203490, 102.1\cdots]\, v^6 \end{pmatrix}, \\ \delta \boldsymbol{c}_0^{(4)} &= \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[19.99999732, 1.6\cdots \times 10^{-5}] \\ \#\mathrm{E}[399.9999465, 3.3\cdots \times 10^{-4}] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[19.99999732, 1.6\cdots \times 10^{-5}]\, u^2 \\ \#\mathrm{E}[399.9999465, 3.3\cdots \times 10^{-4}]\, u^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ \#\mathrm{E}[-400.0000000, 2.6\cdots \times 10^{-1}]\, v^3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \#\mathrm{E}[19.99999732, 1.6\cdots \times 10^{-5}]\, u^4v \\ \#\mathrm{E}[399.9999465, .33\cdots \times 10^{-4}]\, u^4v + \#\mathrm{E}[-400.0000000, 2.6\cdots \times 10^{-1}]\, v^3u^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故に，近似GCDが得られる．

$$x^2 + \#\mathrm{E}[-19.99999728, 1.5\cdots \times 10^{-5}]x + \#\mathrm{E}[19.99999473, 1.2\cdots \times 10^{-2}]xv^3$$
$$+\#\mathrm{E}[19.99999732, 1.6\cdots \times 10^{-5}] + \#\mathrm{E}[19.99999732, 1.6\cdots \times 10^{-5}]u^2$$
$$+\#\mathrm{E}[19.99999732, 1.6\cdots \times 10^{-5}]u^4v.$$

$\delta \boldsymbol{c}_1^{(6)}$ の相対誤差は次のように変化する．

$$O(10^{-7}) \Rightarrow O(10^{-7}) \Rightarrow O(10^{-5}) \Rightarrow \cdots \Rightarrow O(10^{-1}),$$

また，$\delta \boldsymbol{c}_0^{(6)}$ の相対誤差は次のように変化する．

$$O(10^{-7}) \Rightarrow O(10^{-7}) \Rightarrow O(10^{-4}) \Rightarrow \cdots \Rightarrow O(10^{-4}).$$

$\delta \boldsymbol{c}_1^{(6)}$ の相対誤差 *(*桁落ち量*)* は命題6の妥当であることを示している．しかし，$\delta \boldsymbol{c}_0^{(6)}$ の相対誤差 *(*桁落ち量*)* は命題6で見積もったものとは異なるように見える．しかし，これはexactな消去が計算中に起こっているためであり，実際には命題6で見積もったもの通りの挙動を示す．

5 まとめ

微小主係数GCDを持つ場合の桁落ちのメカニズムを解明することができたが，微小主係数GCD問題を解決することはできなかった．これまで多くの算法について考察を行ってきたが[ZN00, Sanuki05, SS07, Sanuki08]，微小主係数の多変数多項式GCDを精度よく計算するためには，GCDの余因子を利用するように算法を設計する以外には難しく，更なる算法の開発をする必要がある．それをこれからの課題としたい．

参 考 文 献

[Barnett70] S. Barnett. *Greatest common divisor of two polynomials.* Linear Algebra Appl., **3**, 1970, 7–9.

[Barnett71] S. Barnett. *Greatest common divisor of several polynomials.* Proc. Camb. Phil. Soc., **70**, 1971, 263–268.

[BB07] D. Bini and P. Boito. *Structured matrix-based methods for polynomial ϵ-gcd: analysis and comparisons. Proc. of ISSAC'07*, ACM Press, 2007, 9–16.

[BP94] D. Bini and V. Pan. *Polynomial and matrix computations: volume 1 fundamental algorithms.* Birkhäuser, 1994.

[CS98] S. Chandrasekaran and A. H. Sayed. *A fast stable for nonsymmetric Toeplitz and quasi-Toeplitz systems of linear equations. SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **19 (1)** (1998), 107–139.

[CWZ04] R. Corless, S. Watt and L. Zhi. *QR* factoring to compute the GCD of univariate approximate polynomials. *IEEE Trans. Signal Proces.*, **52(12)** (2004), 3394–3402.

[CZG02] E.-W. Chionh, M. Zhang and R. N. Goldman. *Fast computation of the Bezout and Dixon resultant matrices.* J. Symb. Compu., **33**(2202), 13–20.

[DG02] G. M. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega. *Barnett's theorems about the greatest common divisor of several univariate polynomials though Bezout-like matrices. J. Symb. Compu.*, **34**, (2002), 59–81.

[DG06] G. M. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega. *Computing greatest common divisors and squarefree decompositions through matrix methods: The parametric and approximate cases. Linear Algebra Appl.*, **412(2-3)**, (2006), 222–246.

[EGL97] I. Emiris, A. Galligo and H. Lombardi. *Certified approximate univariate GCDs.* J. Pure and Applied Alge., **117&118** (1997), 229–251.

[GKMYZ04] S. Gao, E. Kaltofen, J. P. May, Z. Yang and L. Zhi. *Approximate factorization of multivariate polynomials via differential equations.* Proc. of ISSAC'04, ACM, 2004, 167–174.

[KS97] F. Kako and T. Sasaki. Proposal of "effective floating-point number" for approximate algebraic computation. *Preprint of Tsukuba Univ.*, 1997.

[KL96] N. Karmarkar and Y. N. Lakshman. *Approximate polynomial greatest common divisors and nearest singular polynomials.* Proc. of ISSAC'96, ACM Press, 1996, 35–39.

[KYZ05] E. Kaltofen, Z. Yang and L. Zhi. *Structured low rank approximation of a Sylvester matrix.* International Workshop on Symbolic-Numeric Computation 2005 (SNC 2005), D. Wang & L. Zhi (Eds.), 2005, 188–201; full paper appear in Symbolic-Numeric Computation (Trends in Mathematics), D. Wang & L. Zhi (Eds.), Birkhäuser Verlag, 2007, 69–83.

[KYZ06] E. Kaltofen, Z. Yang and L. Zhi. *Approximate greatest common divisors of several polynomials with linearly constrained coefficients and singular polynomials.* Proc. of ISSAC'06, ACM, 2006, 169–176.

[LYZ05] B. Li, Z. Yang and L. Zhi. *Fast low rank approximation of a Sylvester matrix by structure total least norm.* J. JSSAC (Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation), **11 (3&4)** 2005, 165–174.

[MY73] J. Moses and D. Y. Y. Yun. *The EZGCD algorithm.* Proc. ACM National Conference, ACM, 1973, 159–166.

[Nag07] K. Nagasaka. Ruppert matrix as subresultant mapping. *Proc. of CASC 2007*, Springer Berlin. 2007, 316–327.

[ONS91] M. Ochi, M-T. Noda and T. Sasaki. *Approximate greatest common divisor of multivariate polynomials and its application to ill-conditioned systems of algebraic equations.* J. Inform. Proces., **14** (1991), 292–300.

[OST97] H. Ohsako, H. Sugiura and T. Torii. *A stable extended algorithm for generating polynomial remainder sequence (in Japanese).* Trans. of JSIAM (Japan Society for Indus. Appl. Math.) **7** (1997), 227–255.

[Pan01] V. Pan *Univariate polynomials: nearly optimal algorithms for factorization and rootfinding.* Proc. of ISSAC'01, ACM Press, 2001, 253–267.

[Sanuki05] M. Sanuki. *Computing approximate GCD of multivariate polynomials (Extended abstract)*, International Workshop on Symbolic-Numeric Computation 2005 (SNC 2005). D. Wang & L. Zhi (Eds.), 2005, 308–314; full paper appear in Symbolic-Numeric Computation (Trends in Mathematics), D. Wang & L. Zhi (Eds.), Birkhäuser Verlag, 2007, 55–68.

[Sanuki08] M. Sanuki. *A study on the approximate GCD*, Ph.D Theris, University of Tsukuba, 2008.

[Sanuki09] M. Sanuki. *Computing multivariate approximate GCD based on Barnett's theorem*, Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2009 (SNC 2009), H. Sekigawa & H. Kai (Eds.), 2009, 149-157, Kyoto, Japan, 3-5 August 2009.

[Schönhage85] A. Schönhage. *Quasi-GCD.* J. Complexity, **1**, 1985, 118–147.

[Suzuki93] M. Suzuki. *Improvements of the power-series coefficient polynomial remainder sequence GCD algorithm.* Japan J. Indust. Appl. Math. **10(1)** (1993), 41–67.

[SN89] T. Sasaki and M-T. Noda. *Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations.* J. Inform. Proces., **12** (1989), 159–168.

[SS89] T. Sasaki and M. Sasaki. *Analysis of accuracy decreasing in polynomial remainder sequence with floating-point number coefficients.* J. Infor. Proc., **12** (1989), 394–403.

[SS92] T. Sasaki and M. Suzuki. *Three new algorithms for multivariate polynomial GCD.* J. Symb. Compu., **13**(1992), 395–411.

[SS95] K. Shirayanagi and M. Sweedler. *A theory of stabilizing algebraic algorithms.* Technical report 95-28, Mathematical Sciences Institute, Cornell University, 1995, 1–92.

[SS07] M. Sanuki and T. Sasaki. *Computing approximate GCDs in ill-conditioned cases.* Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2007 (SNC 2007), J. Verschelde & S. M. Watt (Eds.), 2007, 170–179, London, Ontario, Canada, 25-27 July, 2007.

[SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi. An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic. *Proc. of ISSAC'98*, ACM Press, 1998, 1–8.

[SZ07] D. Sun and L. Zhi. *Structured low rank approximate of a Bezout matrix.* Math. Comput. Sci., **1**, 2007, 427–437.

[Terui09] A. Terui. *An iterative method for calculating approximate GCD of univariate polynomials.* Proc. of ISSAC '09, ACM Press, 2009, 351—358.

[Wang80] P. S. Wang. *The EEZ-GCD algorithm.* SIGSAM Bulletin **14** (1980), 50–60.

[YZ05] T. Y. Li and Z. Zeng. *A rank-revealing method with updating, downdating, and applications.* SIAM J. Matrix Anal. Appl., **26** (2005), no. 4, 918–946.

[Zeng04] Z. Zeng. *The approximate GCD of inexact polynomials part I: a univariate algorithm.* to appear, 2004.

[Zhi03] L. Zhi. *Displacement structure in computing the approximate GCD of univariate polynomials. Proc. of ASCM2003 (Asian Symposium on Computer Mathematics)*, World Scientific, 2003, 288–298.

[ZD04] Z. Zeng and B. H. Dayton. *The Approximate GCD of inexact polynomials part II: a multivariate algorithm.* Proc. of ISSAC'04, ACM, 2004, 320–327.

[ZMF00] C. J. Zarowski, X. Ma and F. W. Fairman. *QR-factorization method for computing the greatest common divisor of polynomials with inexact coefficients.* IEEE Trans. Signal Proces., **48(11)** (2000), 3042–3051.

[ZN00] L. Zhi and M-T. Noda. *Approximate GCD of multivariate polynomials.* Proc. of Asian Symposium on Computer Mathematics (ASCM2000), World Scientific, 2000, 9–18.