数理解析研究所講究録
第 1814 巻 2012 年 54-60

ピタゴラス数のある一般化について
—計算機アルゴリズム—

神谷　徳昭, 平林翔太　　(公立大学法人会津大学)
Noriaki Kamiya,　Shota Hirabayashi,　Aizu Univ,

概要:　非結合的代数の４元数と８元数を用いた計算機アルゴリズムの研究結果です。つまり 2×2 行列によって複素数,　４元数を 導入し、三平方の定理（ピタゴラス）の拡張を自然数の範囲で求めることが目標です。これは筆者の一人 (kamiya) の研究分野である非結合的代数系の計算機への応用です。

§ 0. はじめに

筆者（神谷）の研究分野を概型的に表しますと次のようになります。

$$\mathbf{R} \to \mathbf{C} \to \mathbf{H} \to \mathbf{O} \to \mathbf{H_3(O)} \to \mathbf{M(H_3(O))}$$

ただし　$\mathbf{H_3(O)}$ は２７次元の例外ジョルダン代数です。そして $\mathbf{M(H_3(O))}$ は５６次元のフロイデンタールの幾何学に現れる空間です。

このカテゴリーが研究分野です。つまり、リー代数、ジョルダン代数を含む三項系と呼ばれる非結合的代数系が専門です。一方、筆者の一人（平林）が現在コンピュータ理工学部に所属していますので計算機を用いた学際的な分野を開拓中です。そこで超ピタゴラス数と呼ぶべきある考えにいたりました。ここに研究の一部分をご紹介させていただきます。

§ 1. 複素数の導入

基本的なことから筆者の専門の歴史的な導入部分です。

複素数, ４元数、合成数、１９世紀末の Hurwitz の定理がその歴史の始まりかと思います。その後、Zorn の複素数を２ｘ２行列とみなす考えを経て、その行列式はベクトルの内積であると考えることから始めます。

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{aligned}[t] &\simeq a+ib \ (a,b\in\mathbf{R}) \\ &= (a,\ b)\ (\text{座標表示}) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta) \end{aligned}$$

$det\ A=a^2+b^2=r^2$, ただし $r=$ 点 (a,b) と原点の距離、$\tan\theta=\frac{b}{a}$、.

簡単な事柄からコンピュータ計算へと結びつけるための準備です。

§ 2. 線形代数との関係

行列 (線形代数) の基本的な学習で次のことが知られています.

$A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とすると, $A^2-(tr\ A)A+(det\ A)E=0$ が成り立ちます.

従って, ２次の行列全体がある代数系 $1,x,x^2$ が１次従属である集合-(一般に２次代数と呼ばれる) の例であることが理解できます. これは線形代数の Cayley-Hamilton 定理の特別な場合です.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ac-bd) & -(ad+bc) \\ (ad+bc) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

これらの行列式を考えると

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

すなわち、$n = a^2+b^2 = c^2+d^2$, $ac-bd = x$,$y = ad+bc$ とおくと

$$n^2 = x^2 + y^2$$

が成り立ちます。これは行列式とピタゴラスの定理が関連することを示しています。

(n, x, y) が自然数のとき、**ピタゴラス数** と呼ばれています。

そして 4 元数, 8 元数の場合も行列式の拡張が考えられますので、これらはノルムの概念すなわち内積の関係式と見ることができます。これらについて後述します。

§ 3. 複素数と 2×2 行列の対応

複素数は 2 x 2 行列と対応します。

$$x + iy \to \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

(ただし $x, y \in \mathbf{R}$(実数)) によって複素数 $\mathbf{C}$ の同型対応 (この概念の導入は高校までの範囲では簡単ではないですが) を与えると, 複素数が四則演算で閉じているということと代数的に $x^2 = -1$ の解を含む体であるということを用いずに, 2 次方程式の解の解法が可能です. 以下このことについて簡単に述べます.

$x, y \in \mathbf{R}$ の時, $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ とすると, $A^2 - (tr\ A)A + (det\ A)E = 0$ の解を求めることが

$$z^2 + az + b = 0$$

なる 2 次方程式の解を求めることと同値です. つまり $z = x + iy$, $a = -trA$, $b = detA$ とおくことから導くことができます。。高校から大学そして少し高度な数学概念形成へと発展することが可能です。

結論: 2 次方程式の解法を行列と関係づけて研究・教育することが重要だということが認識されると考えます.

§ 4. 4 元数と 8 元数代数

4 元数の性質はノルムにより特徴づけられます。

$$||x||||y|| = ||xy||$$

ただし、$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x, x)$

ここで、１８^2 を　平方数の和で表すことを例示します

『解』$x = 1 + 4i + j$,$y = 1 + i + 4j$ のとき, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$ を用いて、

$||x||^2 = (x, x) = (1+4i+j)(1-4i-j) = 18$, $||y||^2 = (y, y) = (1+i+4j)(1-i-4j) = 18$,

$$||xy||^2 = ||(1+4i+j)(1+i+4j)||^2$$

$$= ||-7+5i+5j+15k||^2 = 18^2$$

したがって

$$18^2 = 7^2 + 5^2 + 5^2 + 15^2$$

が成り立ちます

非結合的代数の８元数も同様の結果が成り立ちます。

つまり次のような８元数のノルム (内積) の定理が存在します。

定理

$$
\begin{aligned}
&\forall p,q,r,s,t,u,v,w \in \mathbf{R},\\
&\forall P,Q,R,S,T,U,V,W \in \mathbf{R},\\
&(P^2+Q^2+R^2+S^2+T^2+U^2+V^2+W^2)(p^2+q^2+r^2+s^2+t^2+u^2+v^2+w^2)\\
= \quad &(Pp-Qq-Rr-Ss-Tt-Uu-Vv-Ww)^2\\
&+(Pq+Qp+Rs-Sr+Tu-Ut-Vw+Wv)^2\\
&+(Pr-Qs+Rp+Sq+Tv+Uw-Vt-Wu)^2\\
&+(Ps+Qr-Rq+Sp+Tw-Uv+Vu-Wt)^2\\
&+(Pt-Qu-Rv-Sw+Tp+Uq+Vr+Ws)^2\\
&+(Pu+Qt-Rw+Sv-Tq+Up-Vs+Wr)^2\\
&+(Pv+Qw+Rt-Su-Tr+Us+Vp-Wq)^2\\
&+(Pw-Qv+Ru+St-Ts-Ur+Vq+Wp)^2
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。

これらの概念は合成数という言葉で特徴できます。

§５　三平方の定理の拡張と具体例

４元数代数,　８元数代数において

$$||xy|| = ||x||||y|| \quad (that\ is,\ (xy,xy)=(x,x)(y,y)\ ) \quad (*)$$

が成り立ちます.（これは合成代数の定義でもあります）

合成代数は 1,2,4,8、次元が存在することが知られています。勿論これは複素数の数概念の一般化であり３平方の定理

$$c^2 = a^2 + b^2$$

の一般への拡張です. つまり、$n^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$, です。

４平方、８平方の定理にあたる概念です.

(*) を用いて具体的に以下の等式を満たす０以上の自然数の組（a、ｂ、ｃ、ｄ）を計算機のプログラムで求めてみます。$n = 100$　,$n = 30$　の場合です。

$$100^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

以下に表記します **(a,b,c,d)**

$n = 100$, (0,0,0,100),(0,0,28,96),(0,0,60,80), (0,36,48,80),(0,48,60,64),(2,2,34,94),
(2,10,50,86),(2,14,14,98),(2,14,70,70), (2,22,26,94),(2,22,46,86),(2,26,62,74),
(2,34,38,86),(2,34,46,82),(2,34,58,74), (6,6,18,98),(6,6,62,78),(6,10,42,90),
(6,18,54,82),(6,42,46,78),(6,42,62,66), (8,8,64,76),(8,12,24,96),(8,16,44,88),
(8,20,56,80),(8,24,48,84),(8,32,56,76), (8,40,44,80),(8,52,56,64),(10,10,14,98),
(10,10,70,70),(10,26,50,82),(10,30,30,90), (10,30,54,78),(10,34,62,70),(10,50,50,70),

(12,24,64,72),(14,22,22,94),(14,22,62,74), (14,46,62,62),(16,16,32,92),(16,20,40,88),
(16,32,64,68),(18,26,30,90),(18,26,54,78), (18,54,54,62),(20,40,40,80),(22,26,38,86),
(22,26,46,82),(22,26,58,74),(22,46,50,70), (24,44,48,72),(26,34,38,82),(26,46,58,62),
(28,32,64,64),(30,30,46,78),(30,30,62,66), (32,40,40,76),(32,52,56,56),(34,34,62,62),
(34,38,50,70),(34,46,58,58),(34,50,50,62), (36,48,48,64),(40,40,52,64),(42,42,46,66),
(50,50,50,50).
$n = 30$, (0,0,0,30),(0,0,18,24),(0,4,10,28), (0,4,20,22),(0,10,20,20),(1,1,13,27),
(1,3,7,29),(1,3,19,23),(1,7,11,27), (1,7,15,25),(1,9,17,23),(1,13,17,21),
(2,8,16,24),(3,3,21,21),(3,5,5,29), (3,9,9,27),(3,13,19,19),(3,15,15,21)
(4,6,8,28),(4,8,12,26),(4,12,16,22), (5,5,11,27),(5,5,15,25),(5,9,13,25),
(5,11,15,23),(5,15,17,19),(6,8,20,20), (6,12,12,24),(7,7,19,21),(7,11,17,21),
(8,8,14,24),(8,16,16,18),(9,11,13,23), (9,13,17,19),(10,12,16,20),(11,13,13,21),
(15,15,15,15)

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2,$$

この計算アルゴリズムは数が大きくなればなるほど計算機の必要が存在します。数を大きくしますと時間がかかりますので、 つまり、時間がかかる計算機のアルゴリズムなのでいろいろな数理代数学的な応用が今後考えられます。

§6 いろいろな一般化について (超ピタゴラス数の個数)

素数定理と同様に個数の問題への定式化を考えます。つまり

$$n^2 = a^2 + b^2,$$

$$n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + f^2$$

なる式の自然数　n を与えてそれぞれ、

(a, b), (a, b, c, d), (a, b, c, d, e, f, g, h), の組の自然数解 (**超ピタゴラス数**と呼ぶことにします) の個数はいくつ存在しますか.

$N_2(n)$, $N_4(n)$ は同様に定義できますので、$N_8(n)$　のみ　以下の様に定義します。

$$N_8(n) :=^{\sharp} \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \mid n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2,$$

$$0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6 \le a_7 \le a_8, for\ all\ a_i :\ integer\ \}$$

実例で示しますと

$n = 5, a = 3, b = 4$ のとき $N_2(5) = 2$, Also, we have $N_2(13) = 2, (13, 0, 13), (13, 5, 12)$, $N_4(2) = 2, (2, 0, 0, 0, 2), (2, 1, 1, 1, 1)$, $N_4(3) = 2, (3, 0, 0, 0, 3), (3, 0, 1, 2, 2)$, です。又、8元数については $n = 2$ のとき $N_8(2) = 2$,　$(2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2), (2, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ $n = 3$ のとき、$N_8(3) = 3$, $(3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3)$, $(3, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$, $(3, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2,)$ です。

更に、この前の章の結果から $n = 30$ のときは $N_4(30) = 37$, $n = 100$ のときは $N_4(100) = 67$　です。又、$n = 4$ のとき $N_8(4) = 5$, $N_8(5) = 8, \cdots$ です。

自明なことですが

定理 すべての自然数 n について

$$N_2(n) \le N_4(n) \le N_8(n)$$

が成り立ちます。

別の見方として n を与えたとき

$$N_8^{(p)}(n) :=^{\sharp} \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \mid$$

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq a_7 \leq a_8, for\ all\ a_i:\ prime\ number\ \}$$

のような素数の組の個数に関する定式化もできると考えます。

実例

$$N_4^{(p)}(30) = 2, \quad (30, 3, 5, 5, 29), (30, 3, 13, 19, 19).$$

$$N_8^{(p)}(30) = 1, \quad (30, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 29)$$

この章の最後にもう一つ定式化を試みます。($\tilde{N}_2$, $\tilde{N}_4$ に関しても同様に可能です。)

$$\tilde{N}_8^{(p)}(n) := \Sigma_{k=1}^{n}\ N_8^{(p)}(k)$$

と定義すれば、勿論

$$\tilde{N}_8^{(p)}(n) \geq \tilde{N}_8^{(p)}(n-1) \geq \cdots \geq \tilde{N}_8^{(p)}(1)$$

となります。これはｎ　以下の自然数において

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2,$$

の組

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$$

のすべてが素数である個数を求める式です。(素数定理の８元数２次形式版と考えることも可能だと思います。)

この小論の最後に、素数定理の類似的な次の予想が成り立つのではないかと考えます。

★★★★★★★★★★★★★★★

$$N_8^{(p)}(n) = [c_n \frac{n^2}{log_e n}]$$ と定義する。ただし [ ] はガウス記号です。

このとき、$n \leq 100$　ならば、n に依存する有理数 c_n　は $0 \leq c_n < \frac{1}{2}$　を満たす。

★★★★★★★★★★★★★★★

5. CONCLUDING REMARK.

$1 \leq n \leq 9$	$N_8^{(p)}(n) = 0$	$c_n = 0$	$N_8^{(p)}(20) = \left[\frac{1}{25} \cdot \frac{20^2}{\log 20}\right] = 5$	$N_8^{(p)}(64) = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{64^2}{\log 64}\right] = 246$
$n = 10$	$N_8^{(p)}(n) = 1$	$c_{10} = \frac{1}{43}$	$N_8^{(p)}(24) = \left[\frac{1}{22} \cdot \frac{24^2}{\log 24}\right] = 8$	$N_8^{(p)}(68) = \left[\frac{100}{377} \cdot \frac{68^2}{\log 68}\right] = 290$
$n = 11$	$N_8^{(p)}(n) = 1$	$c_{11} = \frac{1}{50}$	$N_8^{(p)}(28) = \left[\frac{1}{11} \cdot \frac{28^2}{\log 28}\right] = 21$	$N_8^{(p)}(72) = \left[\frac{3}{25} \cdot \frac{72^2}{\log 72}\right] = 145$
$n = 12$	$N_8^{(p)}(n) = 1$	$c_{12} = \frac{1}{57}$	$N_8^{(p)}(32) = \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{32^2}{\log 32}\right] = 32$	$N_8^{(p)}(76) = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{76^2}{\log 76}\right] = 444$
$n = 13$	$N_8^{(p)}(n) = 2$	$c_{13} = \frac{1}{65}$	$N_8^{(p)}(36) = \left[\frac{1}{13} \cdot \frac{36^2}{\log 36}\right] = 27$	$N_8^{(p)}(80) = \left[\frac{40}{125} \cdot \frac{80^2}{\log 80}\right] = 467$
$n = 14$	$N_8^{(p)}(n) = 1$	$c_{14} = \frac{1}{74}$	$N_8^{(p)}(40) = \left[\frac{5}{43} \cdot \frac{40^2}{\log 40}\right] = 50$	$N_8^{(p)}(84) = \left[\frac{4}{25} \cdot \frac{84^2}{\log 84}\right] = 254$
$n = 15$	$N_8^{(p)}(n) = 1$	$c_{15} = \frac{1}{83}$	$N_8^{(p)}(44) = \left[\frac{10}{69} \cdot \frac{44^2}{\log 44}\right] = 74$	$N_8^{(p)}(88) = \left[\frac{387}{1000} \cdot \frac{88^2}{\log 88}\right] = 669$
$n = 16$	$N_8^{(p)}(n) = 2$	$c_{16} = \frac{1}{45}$	$N_8^{(p)}(48) = \left[\frac{5}{51} \cdot \frac{48^2}{\log 48}\right] = 58$	$N_8^{(p)}(92) = \left[\frac{4225}{10000} \cdot \frac{92^2}{\log 92}\right] = 790$
$n = 17$	$N_8^{(p)}(n) = 2$	$c_{17} = \frac{1}{50}$	$N_8^{(p)}(52) = \left[\frac{25}{136} \cdot \frac{52^2}{\log 52}\right] = 125$	$N_8^{(p)}(96) = \left[\frac{37}{200} \cdot \frac{96^2}{\log 96}\right] = 373$
$n = 18$	$N_8^{(p)}(n) = 1$	$c_{18} = \frac{1}{112}$	$N_8^{(p)}(56) = \left[\frac{4}{19} \cdot \frac{56^2}{\log 56}\right] = 164$	$N_8^{(p)}(100) = \left[\frac{100}{211} \cdot \frac{100^2}{\log 100}\right] = 1029$
$n = 19$	$N_8^{(p)}(n) = 2$	$c_{19} = \frac{1}{60}$	$N_8^{(p)}(60) = \left[\frac{5}{54} \cdot \frac{60^2}{\log 60}\right] = 81$	

Table of $N_8^{(p)}(n)$											
n	n^2	$N_8^{(p)}(n)$	n	n^2	$N_8^{(p)}(n)$	n	n^2	$N_8^{(p)}(n)$	n	n^2	$N_8^{(p)}(n)$
1	1	0	51	2601	4	101	10201	43	151	22801	72
2	4	0	52	2704	125	102	10404	4	152	23104	3905
3	9	0	53	2809	16	103	10669	32	153	23409	9
4	16	0	54	2916	0	104	10816	1271	154	23716	7
5	25	0	55	3025	6	105	11025	1	155	24025	19
6	36	0	56	3136	164	106	11236	7	156	24336	1462
7	49	0	57	3249	6	107	11449	33	157	24649	62
8	64	0	58	3364	6	108	11664	424	158	24964	12
9	81	0	59	3481	15	109	11881	47	159	25281	7
10	100	1	60	3600	81	110	12100	2	160	25600	5612
11	121	1	61	3721	19	111	12321	7	161	25921	73
12	144	1	62	3844	7	112	12544	1469	162	26244	1
13	169	2	63	3969	6	113	12769	39	163	26569	69
14	196	1	64	4096	246	114	12996	1	164	26896	6147
15	225	1	65	4225	7	115	13225	21	165	27225	0
16	256	2	66	4356	1	116	13456	1893	166	27556	16
17	289	2	67	4489	18	117	13689	9	167	27889	70
18	324	1	68	4624	290	118	13924	7	168	28224	1380
19	361	2	69	4761	7	119	14161	65	169	28561	73
20	400	5	70	4900	2	120	14400	602	170	28900	1
21	441	2	71	5041	20	121	14641	58	171	29241	11
22	484	3	72	5184	145	122	14884	9	172	29584	5898
23	529	4	73	5329	20	123	15129	11	173	29929	65
24	576	8	74	5476	8	124	15376	2379	174	30276	0
25	625	3	75	5625	2	125	15625	11	175	30625	24
26	676	1	76	5776	444	126	15876	1	176	30976	7704
27	729	4	77	5929	31	127	16129	45	177	31329	7
28	784	21	78	6084	0	128	16384	2283	178	31684	13
29	841	5	79	6241	28	129	16641	12	179	32041	97
30	900	1	80	6400	467	130	16900	1	180	32400	1692
31	961	5	81	6561	8	131	17161	55	181	32761	90
32	1024	32	82	6724	9	132	17424	736	182	33124	18
33	1089	3	83	6889	27	133	17689	56	183	33489	18
34	1156	2	84	7056	254	134	17596	6	184	33856	9030
35	1225	7	85	7225	11	135	18225	0	185	34225	26
36	1296	27	86	7396	9	136	18496	3263	186	34596	0
37	1369	7	87	7569	9	137	18769	54	187	34969	80
38	1444	5	88	7744	669	138	19044	2	188	35344	7844
39	1521	3	89	7921	31	139	19321	54	189	35721	10
40	1600	50	90	8100	0	140	19600	3581	190	36100	0
41	1681	7	91	8281	35	141	19881	7	191	36481	98
42	1764	2	92	8464	790	142	20164	12	192	36864	1956
43	1849	9	93	8649	6	143	20449	54	193	37249	88
44	1936	74	94	8836	10	144	20736	1214	194	37636	11
45	2025	2	95	9025	15	145	21025	25	195	38025	0
46	2116	6	96	9216	373	146	21312	7	196	38416	11259
47	2209	10	97	9409	30	147	21609	11	197	38809	82
48	2304	58	98	9604	7	148	21904	3633	198	39204	1
49	2401	16	99	9801	5	149	22201	67	199	39601	105
50	2500	0	100	10000	1029	150	22500	0	200	40000	12382

Remark. This table is given by C++ programming language.

以上最近考えている計算機アルゴリズムと筆者の専門領域との学際的融合を求め、今後このような分野が発展することを望みながら研究の一端を紹介させていただきました。

References

1] A.Elduque,N.Kamiya and S.Okubo, $(-1,-1)$-Balanced Freudenthal-Kantor triple systems and noncommutative Jordan algebras, J.Alg.(2005),vol.294,19-40

2] エビングハウス, ケッヘル 「数」上, 下, スプリンガー

3] Schafer,Introduction to nonassociative algebras,Academic Press, New York, 1966.

4] 神谷, 「非結合的代数系概論」2002, 会津大学講義録

5] 神谷, 2×2 行列による複素数の一考察, (数学教育学会 2005 年 3 月) 日大理工, 数学教育学会春季年会論文集 208-210

6] N.Kamiya and S.Okubo, Composition, quadratic, and some triple systems, CRC press, A series of Lecture notes in Pure and App. Mathematics, vol.246,(2006) 205-231.

7] N.Kamiya and D.Mondoc, A new class of nonassociative algebras with involution, Proc.Japan Acad.Ser A,vol.84,no5,(2008) 68-72.