数理解析研究所講究録
第1814巻 2012年 36-42

置換群の共役群計算の高速化

宮本 泉*
IZUMI MIYAMOTO
山梨大学
UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 正規化群と部分群の共役

G：集合 Ω 上の置換群、　H, K：G の部分群

- H の G における正規化群　　$\mathrm{Norm}(G,H) = \{g \in G | g^{-1}Hg = H\}$
- H と K は G において共役　　$g^{-1}Hg = K$ for some $g \in G$

Cannon-Holt: "The transitive groups of degree 32" (2008.12)　にある記述

> Computing normalisers and testing conjugacy of subgroups are notoriously difficult problems even in permutation groups of small degree.

GAP システムによる計算実験 (G =Sym(n) のとき)
$n = 31$ 次まで。GAP-ライブラリの可移置換群リストを使う。
H ：可移置換群

- 正規化群計算：少ないが無視できない個数の H で困難
- 部分群の共役計算：困難な H と g はほとんど無い

可移置換群 (の同型類) の個数　31次まで：　40 238 個
32次　：　2 801 324 個

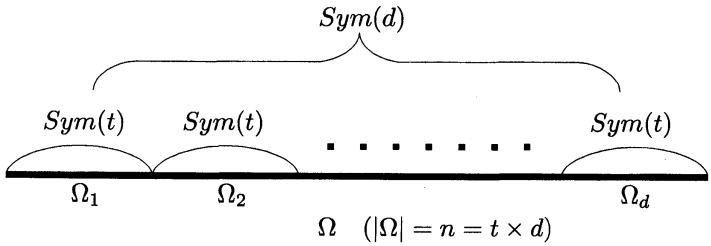
32次の場合すべての可移群のリストは利用できていない。

- 部分群の共役計算で困難な場合が、少なからず出てくる。

*imiyamoto@yamanashi.ac.jp

2 Block System の利用

Block System と WreathProduct



$Sym(t) \wr Sym(d) = \mathsf{WreathProduct}(Sym(t), Sym(d))$

$\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots \Omega_d\}$ ：ブロックシステム

$H \subseteq W = Sym(\Omega_1) \wr Sym(d)$, $K \subseteq W' = Sym(\Omega_1') \wr Sym(d)$ のとき

Step 1. $g^{-1}Wg = W' \Longleftrightarrow \{\Omega_1^g, \Omega_2^g, \cdots \Omega_d^g\} = \{\Omega_1', \Omega_2', \cdots \Omega_d'\}$

Step 2. $\exists?\ h \in W'$ such that $h^{-1}g^{-1}Hgh = K$

定義: H は非原始的 $\Longleftrightarrow$ H は可移、$H \subseteq Sym(t) \wr Sym(d)$

3 2次の可移群

原始的 7個

非原始的 2 801 317 個

ブロックシステムで作用を分解して共役をとった上で、特別な デザイン を利用する。(Cannon-Holt)

1. $Ker(H) = H \cap Sym(t)^d$ ・・・ブロックシステムの固定部分群
   固定点を使った "デザイン" の同型計算 (Leon) を利用

2. $Im(H) = HSym(t)^d/Sym(t)^d$ ・・・ブロックシステム上 d 次の置換群

3. $\exists?\ g \in$デザイン の自己同型群 $\cap$Preimage(Norm$(Sym(d), Im(H)))$ such that $g^{-1}Hg = K$

$|\Omega_1| = 2$ のとき使用。$H \subseteq W \cap W'$ のなる場合あり。Cannon-Holt は概説のみの論文で、デザイン の詳細も不明。

3 アソシエーションスキーム

可移置換群からつくるアソシエーションスキーム $(\Omega, \{R_i\}_{i=0,1,2,\cdots,d})$

R_i = 群 H の $\Omega \times \Omega$ への作用の orbit

【例】$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, H =Group$((1,5,4)(2,6,3),(1,6,3,2,5,4))$

$$\left.\begin{array}{l} R_0 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}, \\ R_1 = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(5,6),(6,5)\}, \\ R_2 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),\cdots,(6,1),(6,2)\}, \\ R_3 = {}^tR_2 = \{(3,1),(4,1),(3,2),\cdots,(1,6),(2,6)\} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\Omega\times\Omega \text{ 上の orbit} \\ 4 \text{ 個}\end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

アソシエーションスキームの同型と共役計算

【例 (続き)】自己同型群

$$Aut(A) = \mathsf{Group}((3,5,4,6),(1,6,2,5)(3,4)) \supsetneq H$$

$$\begin{array}{c} Aut(A) \text{ の作用} \\ \circlearrowright \quad \circlearrowright \\ R_0, \quad R_1, \quad R_2 \quad \rightleftarrows \quad R_3 \end{array}$$

命題 3.1

$$\mathsf{Norm}(H) \subseteq Aut(A)$$

可移群 $H, K \subseteq Sym(n)$ の共役計算　へのアソシエーションスキームの利用

(これだけでは、あまり効果はない)

A, B：H, K が作るアソシエーションスキーム

- $\exists$? 同型 g such that $g^{-1}Ag = B$
- $\exists$? $h \in Aut(B)$ such that $h^{-1}g^{-1}Hgh = K$

4 アルゴリズム

H, K：可移群 $\subseteq Sym(n)$ 同じアソシエーションスキーム A を作る様に共役をとっておく。

$G = Aut(A) \subseteq Sym(n)$ で、$g \in G$ such that $g^{-1}Hg = K$ を探索するとき、

1. H は可移 $\Longrightarrow \exists h \in H$ such that $(1^h)^g = 1 \in \Omega$ より $g \in G_1 = \{x \in G | 1^x = 1\}$ (点 1 の固定部分群) としてよい。
   このとき、$g^{-1}H_1g = K_1$ も成立する。

2. さらに、G_1 と H_1 が同じ orbit O_1 をもつときは、 $\exists h_1 \in H_1$ such that $O_1 \ni (2^{h_1})^g = 2$ より、$g \in G_{1,2} = \{x \in G_1 | 2^x = 2\}$ としてよい。
   このとき、$g^{-1}H_{1,2}g = K_{1,2}$ も成立する。

3. 以下、可能ならば、同様に繰り返す。

   $G = Aut(A)$ と制限されているので、繰返せる可能性が高い。

このような条件を満たす g が無ければ、H と K は共役にならない。

簡単な例

H, K が2重可移の場合 ($\Longrightarrow$ ブロックシステムは存在しない)

(H が2重可移 $\Longleftrightarrow$ 可移、かつ、1点固定部分群 $H_1 = \{h \in H | 1^h = 1\}$ は $\Omega\backslash\{1\}$ 上可移)

【例】H =PrimitiveGroup$(31, 10) = L(5, 2)$

1. $H, Sym(n)$ は可移 $\Longrightarrow$ $g \in Sym(n)$ such that $H^g = K$ は、$g \in Sym(n-1)$ で探索してよい。
2. $g' \in Sym(n-1)$ such that $g'^{-1} H_1 g' = K_1$ を探索。(0.2 秒)
3. $H_1, Sym(n-1)$ は $\Omega\backslash\{1\}$ 上可移 $\Longrightarrow$ $g \in Sym(n-2)$ で探索してよい。
4. $g^{-1}(g'^{-1} H_1 g')_2 g = K_{1,2} \Longrightarrow$ $g \in$Norm$(Sym(n-2), K_{1,2})$ で探索。(Norm - 4.4 秒、g - 0.0 秒)

   $\Longrightarrow (g'g)^{-1} H (g'g) = K$

直接計算：RepresentativeAction$(Sym(31), H, K)$ (10 時間より大)

4.1 プログラム

2つのプログラムを作成した。

- ConjAS $\cdots$ H と K が同じアソシエーションスキームを作るように共役を計算。
  アソシエーションスキームの自己同型群 G で、前述のアルゴリズムによって、
  H を K に移す共役元を計算。
- ConjASB$\cdots$ ConjAB を使うときブロックシステムが利用できる場合は、ブロック上の作用
  $Im(H)$ と $Im(K)$ の共役を $Im(G)$ で計算。
  その後、$Ker(H)$ を $Ker(K)$ に移す操作は抜きで、
  PreIm(Norm$(Im(G), Im(H))) \subseteq G$ で H を K に移す共役元を計算。

5 実験結果

3 2次のアソシエーションスキームの分類リスト http://kissme.shinshu-u.ac.jp/as/ を使ってできる可移な置換群を利用する。

Example 5.1 *as32[38]* を作るいくつかの可移置換群

ブロックシステム $[[1,2,3,4],[5,6,7,8],\cdots,[29,30,31,32]]$

種類分け

ブロック上の作用 $Im(H)$(8次の群) ／ ブロックを固定する部分群 $Ker(H)$ } が同一な群： 309 種類 / 1109 個

$G = Aut$(as32[38])

N =Norm$(G, Ker(H))$∩PreIm(Norm$(Im(G), Im(H))$

as32[38] を作るいくつかの可移置換群 (続き)

$Im(H) = Im(K)$, $Ker(H) = Ker(K)$ となる H と K の共役計算

1. RepresentativeAction(N, H, K) $\cdots$ GAP の共役元計算の関数
2. ConjAS(G, H, K)
3. ConjASB(G, H, K)
4. RepresentativeAction(G, H, K)

計算時間 上の条件を満たす H,K, 2254 組すべての合計 (ミリ秒)

	共役計算時間	Nの計算時間	合計計算時間
1.	1079270	1986138	3065408
2.	8982993		8982993
3.	3189934		3189934

4. 30 分以上かかる場合が多くでてきて、計算を断念

共役計算時間の分布

1. 8.0 秒, 7.9 秒, 4.3 秒, 4.3 秒, $\cdots$, 4.0 秒 (4.0 秒以上、38 個)
2. 64 秒 (2 個), 49 秒 (2 個), 29 秒, 19 秒, $\cdots$ (10 秒以上、33 個)
3. 4.0 秒, 4.0 秒, 4.0 秒, 4.0 秒, $\cdots$, 3.8 秒 (3.8 秒以上、53 個)

Example 5.2 *as32*[3] を作る *2* 組 *4* 個の位数 *11010048* の可移置換群
$G = Aut(as32[3])$
ブロックシステム $[[1,2,3,4],[5,6,7,8],\cdots,[29,30,31,32]]$

$Im(H) = Im(K)$ (位数)	TransitiveGroup(8,36) 168	TransitiveGroup(8,37) 168
$Ker(H) = Ker(K)$	基本可換 2 群、位数 65536	
G の位数	4438236667576320	4438236667576320
N の位数	18492652781568	36985305563136
計算時間 (ミリ秒)	1. 65531 2. 14179 3. 2879	1. 165396 2. 13793 3. 2198

as32[3] を作る 2 組 4 個の位数 11010048 の可移置換群 (続き)
ConjAB におけるアルゴリズムの適用状況

1. H は可移 $\Longrightarrow \exists h \in H$ such that $(1^h)^g = 1 \in \Omega$ より $g \in G_1 = \{x \in G | 1^x = 1\}$ (点 1 の固定部分群) とできる。
   $|G : G_1| = 32$ このとき、$g^{-1}H_1g = K_1$ も成立する。
2. G_1 と H_1 が同じ orbit O_1 をもち、$|O_1| = 28$ で、 $\exists h_1 \in H_1$ such that $O_1 \ni (2^{h_1})^g = 2$ より、$g \in G_{1,2} = \{x \in G_1 | 2^x = 2\}$ とできる。
   $|G_1 : G_{1,2}| = 28$ このとき、$g^{-1}H_{1,2}g = K_{1,2}$ も成立する。

3. $G_{1,2}$ と $H_{1,2}$ が同じ orbit O_2 をもち、$|O_2| = 3$ で、$\exists h_2 \in H_{1,2}$ such that $O_2 \ni (3^{h_2})^g = 3$ より、$g \in G_{1,2,3} = \{x \in G_{1,2} | 3^x = 3\}$ とでき、ここで探索する。
$|G_{1,2} : G_{1,2,3}| = 3$ このとき、$g^{-1}H_{1,2,3}g = K_{1,2,3}$ も成立する。

$\Longrightarrow$ $G_{1,2,3}$の位数= 1651129712640 (G の位数の $32 \times 28 \times 3$ 分の 1)
(N の位数 =18492652781568)

計算時間の平均

GAP を使って生成できた 32 次の可移置換群：約 27 万個
$g \in$Random(G), $G = Aut(as(H))$ として、ConjAS($G, H, g^{-1}Hg$) を計算

assoc. scheme	群の個数	総計算時間	平均計算時間	
全体 3920 個	270995	364979 秒	1.35 秒	
as32[4182]	118	39499 秒	335 秒	*

*：平均計算時間で最も困難だった場合

as[4182] からできる 24 番目の群の共役計算 15817 秒　平均計算時間が予想外に速い

- 同様なアルゴリズムによる正規化群計算時間 2 秒程度以上が多い
- Index $|G :$Norm(G, H)$| \leq 5000$ のときは、このコセットの代表から共役元を直接計算している (ただの逐次探索)
- 27 万個：32 次の可移群訳 280 万個の 1/10 程度の個数
  $\longrightarrow$ 作れたのは (共役計算が) 簡単な群ばかりかも知れない。

6 問題点

RepresentativeAction(G, H, K) は、ほとんどの場合、1 秒以内で計算できる。一方で、10 時間でも計算できない場合もある。ブロックシステムを利用しないで、G を使うと、
Example ?? では、30 分以上かかる場合も多い。
Example ?? では、10 時間かけても計算できなかった。
RepresentativeAction(N, H, K) と RepresentativeAction(G, H, K) の違い
(Cannon-Holt の論文と比較のため) ブロックシステムを利用して、G で $Ker(H)$ と $Ker(K)$ の共役の計算、その後 $N =$Norm(PreImage(Norm($Im(G), Im(H)$)), $Ker(H)$) の計算 (手間が面倒、また、計算時間がかかることも多い) $\longrightarrow$ 実験対象の準備が困難 (紹介できる実験結果が少ない)

紹介しているアルゴリズムの特徴

- ブロックシステムが利用できない場合でも利用可能な場合がある。
- ブロックシステムのアルゴリズムと併用も可能。(実現できていない)
- 使える条件が複数あり、使うと高速化できることもあるが、逆効果になることもある。

1. H は可移 $\Longrightarrow \exists h \in H$ such that $(1^h)^g = 1 \in \Omega$ より $g \in G_1 = \{x \in G | 1^x = 1\}$ (点 1 の固定部分群) としてよい。
このとき、$g^{-1}H_1g = K_1$ も成立する。

2. さらに、G_1 と H_1 が同じ orbit O_1 をもつときは、 $\exists h_1 \in H_1$ such that $O_1 \ni (2^{h_1})^g = 2$ より、$g \in G_{1,2} = \{x \in G_1 | 2^x = 2\}$ としてよい。
このとき、$g^{-1}H_{1,2}g = K_{1,2}$ も成立する。
3. 以下、可能ならば、同様に繰り返す。

$G = Aut(A)$ と制限して、繰返せる可能性を高くしている。