数理解析研究所講究録
第1816巻 2012年 13-35



# A topologist's introduction to the motivic homotopy theory for transformation group theorists - 2

Norihiko Minami
Nagoya Institute of Technology

変換群の幾何の展開
京都大学数理解析研究所1階111号室，2012-5-29

§0. 背景

本稿は，数理研での研究集会の折に用いたスライドを整理した物である．研究集会ではVoevodskyのslice filtrationに関する簡単な紹介もしたが，本稿では，(Motivicな)安定ホモトピー論の紹介に特化することとした．必然的な理由はページ数の制限で有ったが，Motivicでない通常のホモトピー論の場合であっても，現代的なスペクトラムについては日本のホモトピー論研究者の中にも知らない人が結構多い現状なので，この機会に(Motivicな)現代的なさまざまなスペクトラムの定義を，一挙に行うこととした．

なお，本稿は元々のスライドを小小整理しただけなので，説明の詳細が省略されている箇所が多々ある．しかしながら，却ってそのために冗長にならず，要点が素早く鳥瞰図的に見取れることも有ると思う．それを期待する次第である．．

## 0-2. Contents of the presentation

0-3. References


- Fabien Morel and Vladimir Voevodsky, A1-homotopy theory of schemes. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 90 (1999), 45–143 (2001).

- Fabien Morel, An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, In Contemporary Developments in Algebraic K-theory, ICTP Lecture notes, 15 (2003), pp. 357-441, M. Karoubi, A.O. Kuku , C. Pedrini (ed.)

- Thomsason and Trobaugh, Higher algebraic K-theory of schemes and derived categories, Grothendieck Fest, Birkhauser.

- Norihiko Minami, A topologist's introduction to the motivic homotopy theory for transformation group theorists - 1, "may" *may* appear in the surikokyuroku bessatsu?

- M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede and B. Shipley, Model Categories of Diagram Spectra, Proc. London Math. Soc. (2001) 82 (2): 441-512.

- Stefan Schwede and Brooke E. Shipley, Algebras and Modules in Monoidal Model Categories, Proc. London Math. Soc. (2000) 80 (2): 491-511.

- J. F. Jardine, Motivic Symmetric Spectra, Documenta Math. 5 (2000) 553-594.

- Mark Hovey, Spectra and symmetric spectra in general model categories, J. Pure Appl. Algebra, 165(1):63-127, 2001.
- Bjorn Ian Dundas, Prerequisites in algebraic topology the Nordfjordeid Summer School on motivic homotopy theory, Motivic homotopy theory, 1-67, Universitext, Springer, Berlin, 2007
- Bjorn Ian Dundas, Oliver Rondigs, Paul Arne Ostvar, Motivic Functors, Documenta Math 8 (2003) 489-525.
- Bjorn Ian Dundas, Oliver Rondigs, Paul Arne Ostvar, Enriched Functors and Stable Homotopy Theory, Documenta Math 8 (2003) 409-488.


§1. *Unstable* **homotopy theory of** *motivic spaces* **review of Part 1**

**1-1. Nisnevich topology** - *locally originates in M. Nagata*

$\boxed{\text{Zariski topology} \preceq \text{Nisnevich topology} \preceq \text{étale topology}}$

In fact, the "local ring" at $x \in X$ is:
Zariski topology case: ordinary local ring $\mathcal{O}_{X,x}$
Nisnevich topology case: the henselization $\mathcal{O}^h_{X,x}$ of $\mathcal{O}_{X,x}$
étale topology case: (the) strict henselization $\mathcal{O}^{sh}_{X,x}$ of $\mathcal{O}_{X,x}$

- A local ring $(A, \mathfrak{m})$ is called Henselian , if

$$^{\forall}P(X) \in A[X], \text{ monic, s.t. } ^{\exists}a_0 \in A,\ P(a_0) \in \mathfrak{m}, P'(a_0) \notin \mathfrak{m}$$
$$^{\exists}a \in A, \text{ s.t. } P(a) = 0$$

- A Henselian local ring $(A, \mathfrak{m})$ is called strict Henselian , if the residue field $A/\mathfrak{m}$ is separably closed.
- henselization is determined, unique up to unique isomorphism.
- strict henselization is determined, unique, but only up to non-unique isomorphism.

## 1-2. Simplicial (Pre)sheaf and model structures

$T$ : site (example : $(Sm/S)_{Nis}$)

$Preshv(T) := (Set)^{T^{op}}$, the category of presheaves of sets on $T$.

$Shv(T)$ : the full subcategory of $Preshv(T)$, consisting of sheaves of sets.

$$\text{example: } Sm/S \overset{\text{fully faithful}}{\hookrightarrow} Shv(Sm/S)_{Nis}$$

$\Delta^{op}Preshv(T) \cong (SSet)^{T^{op}}$ : the category of simplicial objects of $Preshv(T) \cong$ the category of presheaves of simplicial sets on $T$.

$\Delta^{op}Shv(T)$ : the category of simplicial objects of $Shv(T)$

### (Joyal, Jardine)

Both $\Delta^{op}Preshv(T)$ and $\Delta^{op}Shv(T)$ are model categories w/

Weak equivalences: $\pi_0$ equivalence and the stalkwise weak equivalences of simplicial sets

Cofibrations: monomorphisms

Fibrations: RLP w.r.t. trivial cofibrations

They are Quillen equivalent by the sheafication and the inclusion.

## 1-3, The category of *Motivic spaces*-1

$\mathcal{H}_s(Sm/S)_{Nis}$ : the homotopy category of $\Delta^{op}Shv(Sm/S)_{Nis}$ w.r.t. the Jardine model structure

But, this is not what we really want!

To formulate what we really want, define:

### Morel, An introduction, Definition 3.1.1

- $\mathcal{Z} \in \Delta^{op}Shv(Sm/S)_{Nis}$ is $\mathbb{A}^1$-local , if $^{\forall}\mathcal{Y} \in \Delta^{op}Shv(Sm/S)_{Nis}$, the projection $\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1 \to \mathcal{Y}$ induces a bijection:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_s(Sm/S)_{Nis}}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_s(Sm/S)_{Nis}}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^1, \mathcal{Z})$$

- $(f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}) \in \Delta^{op}Shv(Sm/S)_{Nis}$ is called an $\mathbb{A}^1$-weak equivalence , if for any $\mathbb{A}^1$-local $\mathcal{Z}$, the induced map

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_s(Sm/S)_{Nis}}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_s(Sm/S)_{Nis}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$$

is a bijection.

## 1-3, The category of *Motivic spaces*-2

What we really want is the following:

**Morel-Voevodsky, Theorem 2.3.2**

$\Delta^{op}Shv(Sm/S)_{Nis}$ is a model category with:
Weak equivalences: $\mathbb{A}^1$-weak equivalence
Cofibrations: monomorphisms
Fibrations: RLP w.r.t. trivial cofibrations

$\mathcal{H}(S)$ : the homotopy category of $\Delta^{op}Shv(Sm/S)_{Nis}$ w.r.t. the above model structure

$*$ : the simplicial sheaf (associated to) $\Delta^0$, which is the final object in $\Delta^{op}Shv(T)$ and is called the point

$\Delta^{op}Shv_\bullet(T)$ : the pointed analogue of $\Delta^{op}Shv(T)$.

example: $\Delta^{op}Shv_\bullet(Sm/S)_{Nis}$ This is the category of the "*based motivic spaces* " for Morel-Voevodsky!

$\mathcal{H}_\bullet(S)$: the pointed analogue of $\mathcal{H}(S)$.

## 1-4, $K$-theory representability - a good news of $\mathcal{H}_\bullet(S)$

**Morel, An intoroduction, Example 2.4.8**

Let $X \mapsto K(X)$ be the Thomason-Trobaugh pointed simplicial presheaf such that

$$\pi_n(K(X)) = K_n^Q(X), \text{ the Quillen } n\text{-th higher } K\text{-group.}$$

Then, $^\forall n \geqq 0$ and $^\forall X \in Sm/S$, the following is a bijection:

$$K_n^Q(X) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{H}_{s,\bullet}(Sm/S)_{Nis}}\big((X_+) \wedge S^n, a_{Nis}(K)\big)$$

- The analogue holds in Zariski topology (Brown-Gersten),
- but not in the étale topology $\Longrightarrow$
  must invert Bott element, or apply $L_{K(1)}$ (Thomason).
- If $S$ is regular, $K^Q$ becomes homotopy invariant, and so :

**Morel-Voevodsky, Theorem 4.3.13, Morel, Example 3.1.11**

If $S$ is also regular , $^\forall n \geqq 0$, $^\forall X \in Sm/S$,

$$K_n^Q(X) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{H}_\bullet(S)}\big((X_+) \wedge S^n, \mathbb{Z} \times Gr\big)$$

**1-5, Homotopy purity - another good news of $\mathcal{H}_{\bullet}(S)$**

**Morel-Voevodsky, Definition 3.2.16**

Let $X$ be a smooth scheme over $S$ and $\mathcal{E}$ be a vector bundle over $X$. The Thom space of $\mathcal{E}$ is the pointed sheaf

$$Th(\mathcal{E}) = Th(\mathcal{E}/X) := \mathcal{E}/\left(\mathcal{E} \setminus i(X)\right)$$

where $i : X \to \mathcal{E}$ is the zero section of $\mathcal{E}$.

**Morel-Voevodsky, Theorem 3.2.23**

Let $i : Z \to X$ be a closed embedding of smooth schemes over $S$. Denote by $\mathcal{N}_{X,Z} \to Z$ the normal vector bundle to $i$. Then there is a canonical isomorphism in $\mathcal{H}_{\bullet}(S)$ of the form

$$X\Big/\left(X \setminus i(Z)\right) \cong Th(\mathcal{N}_{X,Z}).$$

## §2 Review of the classical stable homotopy category of spaces

**2-1, Diagram spectra of Mandell-May-Schwede-Shipley-1**

$\mathcal{D}$: 同型類のなすクラスが集合をなすような，基点付き位相圏.

$\mathcal{DT}$: 基点を保つ連続関手 $\mathcal{D} \to \mathcal{T}$(これを$\mathcal{D}$-空間と呼ぶ) を対象として，射の集まりを二つの対象間の自然変換全体を位相空間の圏における同化射で表して位相圏としたもの.

- $\mathcal{DT}$に関して以下の注意をしよう：
  - $\mathcal{DT}$はレベル毎に余極限，極限を取ることにより，余完備かつ完備となる.
  - $T \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{DT}$に対して，$X \wedge T$, $F(T, X) \in \mathcal{DT}$が，レベル毎にスマッシュ積と関数空間を取ることにより定義される：

$$(X \wedge T)(d) = X(d) \wedge T, \quad \left(F(T, X)\right)(d) = F(T, X(d)) \quad (1)$$

**2-1, Diagram spectra of Mandell-May-Schwede-Shipley-2**

$Ev_d^{\mathcal{D}} : \mathcal{DT} \to \mathcal{T}$ $(d \in \mathcal{D})$: **評価関手** と呼ばれる連続関手で，$X \in \mathcal{DT}$に対し，

$$Ev_d^{\mathcal{D}} X = X(d) \tag{2}$$

$F_d^{\mathcal{D}} : \mathcal{T} \to \mathcal{DT}$ $(d \in \mathcal{D})$: **シフト懸垂関手** という連続関手で，$T \in \mathcal{T}$に対し，

$$(F_d^{\mathcal{D}} T)(e) = \mathcal{D}(d, e) \wedge T \ (e \in \mathcal{D}) \tag{3}$$

評価関手とシフト懸垂関手とは，互いに随伴関手をなす：

$$\mathcal{DT}(F_d^{\mathcal{D}} T, X) \cong \mathcal{T}(T, Ev_d^{\mathcal{D}} X) \tag{4}$$

$()^* : \mathcal{D} \to (\mathcal{DT})^{op}$: $d \in \mathcal{D}$ に対して，以下のように定まる$d^* \in (\mathcal{DT})^{op}$ を対応させる関手：

$$d^*(e) = \mathcal{D}(d, e) \in \mathcal{T} \qquad (e \in \mathcal{D}) \tag{5}$$

**2-1, Diagram spectra of Mandell-May-Schwede-Shipley-3**

ホモトピーコファイバー： $f \in \mathcal{DT}(X, Y)$ のホモトピーコファイバー$Cf \in \mathcal{DT}$を，次の押し出し図式によって（よって余極限として）定義する，

$$\begin{tikzcd} X = X \wedge S^0 \arrow[r, "\mathrm{id}_X \wedge i"'] \arrow[d, "f"'] & X \wedge I = CX \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Cf \end{tikzcd} \qquad (1 \in I\text{が基点}) \tag{6}$$

ホモトピーファイバー： $f \in \mathcal{DT}(X, Y)$ のホモトピーファイバー$Ff \in \mathcal{DT}$を，次の引き戻し図式によって（よって極限として）定義する.

$$\begin{tikzcd} Ff \arrow[r] \arrow[d] & PY = F(I, Y) \arrow[d, "F(j, \mathrm{id}_Y)"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y = F(S^0, Y) \end{tikzcd} \qquad (0 \in I\text{が基点}) \tag{7}$$

**Proposition.** $\mathcal{DT}$は，各部分圏$\mathcal{C} \subseteqq \mathcal{D}$に対して，以下で射$f : X \to Y$が特徴されるモデル構造を持つ：

**弱同値＝$\mathcal{C}$-レベル同値**： $^\forall c \in \mathcal{C}$, $f(c) : X(c) \to Y(c)$は弱ホモトピー同値.

**ファイブレーション＝$\mathcal{C}$-レベルファイブレーシェン**： 各$c \in \mathcal{C}$に対し，$f(c) : X(c) \to Y(c)$はセールファイブレーション.

**コファイブレーション＝ $\mathcal{C}$-$q$-コファイブレーシェン** ： すべてのレベル同値なレベルファイブレーシェンに対して，左持ち上げ性質を持つ.

このモデル構造は，**$\mathcal{C}$-(projective) レベルモデル構造** と呼ばれる.

## 2-1, Diagram spectra of Mandell-May-Schwede-Shipley-4

- 更に，$\mathcal{D}$が 単位元を$u$ 積を□とするモノイダル圏をなすとすると，
  - $X, Y \in \mathcal{DT}$に対して積$X \wedge Y$を位相的左カン拡大
$$(X \wedge Y)(d) = \mathrm{colim}_{e \square f \to d} X(e) \wedge Y(f) \tag{8}$$
    によって定義することにより，$\mathcal{DT}$もモノイダル圏となる．
  - このとき，モノイダル圏$\mathcal{DT}$のモノイド$R$は，ラックスモノイダル関手$R; \mathcal{D} \to \mathcal{T}$ を呼ばれるものに一致する．

$\mathcal{DT}_R$: モノイド$R$に対して，モノイダル圏$\mathcal{DT}$の右$R$加群を対象として，それらの間の右$R$加群準同型を射とする位相圏．モノイダル圏$\mathcal{DT}$の右$R$加群は$R$上の$\mathcal{D}$-スペクトラムとも呼ばれる．

$\mathcal{D}_R$: 対象は$\mathcal{D}$の対象と一致; $\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_R = \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$，射は$d, e \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_R = \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$に対して次で与えられる位相圏：
$$\begin{aligned}\mathcal{D}_R(d, e) &= \mathcal{DT}_R(e^* \wedge R, d^* \wedge R) = \mathcal{DT}(e^*, d^* \wedge R) \\ &\overset{(5)}{=} (d^* \wedge R)(e) \overset{(8)(5)}{=} \mathrm{colim}_{f \square g \to e} \mathcal{D}(d, f) \wedge R(g)\end{aligned} \tag{9}$$

## 2-1, Diagram spectra of Mandell-May-Schwede-Shipley-5

- 引き続き，$\mathcal{D}$がモノイダルという仮定の下で，
  - 右$R$加群$=R$上の$\mathcal{D}$-スペクトラム，$\mathcal{D}_R$-空間は，すべて同値の概念：
$$\mathcal{DT}_R \cong \mathcal{D}_R\mathcal{T} \tag{10}$$
  - モノイド$R$に対して，$X, Y \in \mathcal{DT}$を各々，$\lambda_X^r : X \wedge R \to X, \lambda_Y^l : R \wedge Y \to Y$によって与えられる，右$R$加群，左$R$加群とすると，$X \wedge_R Y \in \mathcal{DT}$が次の余同化射図式によって定義される：
$$X \wedge R \wedge Y \underset{\mathrm{id}_X \wedge \lambda_Y^l}{\overset{\lambda_X^r \wedge \mathrm{id}_Y}{\rightrightarrows}} X \wedge Y \longrightarrow X \wedge_R Y \tag{11}$$

$F_d^{\mathcal{D}_R} : \mathcal{T} \to \mathcal{D}_R\mathcal{T} \overset{(10)}{\cong} \mathcal{DT}_R$ $(d \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_R = \mathrm{Ob}\,\mathcal{D})$: この場合のシフト懸垂関手は，$T \in \mathcal{T}$に対して次で定義される連続関手となる：
$$(F_d^{\mathcal{D}_R} T)(e) \overset{(3)}{=} \mathcal{D}_R(d, e) \wedge T \overset{(9)}{=} \mathrm{colim}_{f \square g \to e} \mathcal{D}(d, f) \wedge R(g) \wedge T$$
$$(e \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_R = \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}) \tag{12}$$

$\Sigma_{\mathcal{D}_R}^\infty := F_u^{\mathcal{D}_R}$: ここで$u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_R = \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$はモノイダル単位元で$\Sigma_{\mathcal{D}_R}^\infty$を単に懸垂関手と呼ぶ．

## 2-1, Diagram spectra of Mandell-May-Schwede-Shipley-6

- ここで更に，モノイダル圏$\mathcal{D}$が対称的とすると，
  - (8)によって与えられる$\mathcal{D}\mathcal{T}$のモノイダル構造は，対称的となる．
- このとき，$R$を対称的モノイダル圏$\mathcal{D}\mathcal{T}$の可換モノイドとすると，
  - $\mathcal{D}_R$の対称的モノイダル積$\square_R$を，対象$\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}_R = \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$においては$\mathcal{D}$のモノイダル積$\square$，射 $f : e^* \wedge R \to d^* \wedge R$, $f' : e'^* \wedge R \to d'^* \wedge R$に対しては，$f \square_R f'$を以下の可換図式で定義する：

$$\begin{tikzcd}
(e\square_R e')^* \wedge R \arrow[r, "f\square_R f'"] \arrow[d, equal] & (d\square_R d')^* \wedge R \arrow[d, equal] \\
(e\square e')^* \wedge R \arrow[d, equal] & (d\square d')^* \wedge R \arrow[d, equal] \\
(e^* \wedge R) \wedge_R (e'^* \wedge R) \arrow[r, "f\wedge_R f'"'] & (d^* \wedge R) \wedge_R (d'^* \wedge R)
\end{tikzcd} \tag{13}$$

  これより，$\mathcal{D}_R$は対称的モノイダル圏となる．
  - よって，$\mathcal{D}_R\mathcal{T}$も対称的モノイダル圏となる．
  - $\mathcal{D}\mathcal{T}$の右$R$加群のなす圏$\mathcal{D}\mathcal{T}_R$は，(11)より対称的モノイダル圏となる．
  - 同値(10)
$$\mathcal{D}\mathcal{T}_R \cong \mathcal{D}_R\mathcal{T} \tag{14}$$
  は，対称的モノイダル圏の同型となる．

## 2-2, Prespectra-1

- $\mathcal{D} = \mathcal{N} := \mathbb{Z}_{\geqq 0}$，射は恒等射のみ，加法を用いて対称的モノイダル圏．
- $R = S_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \ni n \mapsto S^n \in \mathcal{T}$は，モノイダル関手だが対称的ではない．よって$S_{\mathcal{N}}$は，$\mathcal{N}\mathcal{T}$のモノイドとはなるが<u>可換モノイドではない</u>．
- $\mathcal{N}\mathcal{T}_{S_{\mathcal{N}}}$の対象をプレスペクトラムと呼ぶ．
- $$\begin{cases} \mathcal{N}\mathcal{T}_{S_{\mathcal{N}}} & \overset{(10)}{\cong} \ \mathcal{N}_{S_{\mathcal{N}}}\mathcal{T} \\ \mathcal{N}_{S_{\mathcal{N}}}(m,n) & \overset{(9)}{=} \begin{cases} S^{n-m} & \textbf{if } n \geqq m \\ \emptyset & \textbf{if } n < m \end{cases} \end{cases} \tag{15}$$
  から，プレスペクトラムは基点を保つ連続写像列 $\{\Sigma T_n \to T_{n+1}\}_{n\geqq 0}$ (これらは構造射と呼ばれる)からなることがわかる．
- 基点付き位相空間$T$に対しては，それらのシフト懸垂スペクトラム$F_m^{S_{\mathcal{N}}}T$と懸垂スペクトラム $\Sigma^\infty_{\mathcal{N}_{S_{\mathcal{N}}}} T := F_0^{S_{\mathcal{N}}}T$ は，次で与えられる：

$$F_m^{S_{\mathcal{N}}}T(n) \overset{(12)}{=} S^{n-m} \wedge T \tag{16a}$$
$$\Sigma^\infty_{\mathcal{N}_{S_{\mathcal{N}}}} T(n) = S^n \wedge T \tag{16b}$$

## 2-2, Prespectra-2

- プレスペクトラムの概念は直観的にわかりやすく歴史的にも最初に現れた.
- ホモトピー群： プレスペクトラム$X = \{\Sigma T_n \to T_{n+1}\}_{n \geqq 0}$のホモトピー群$\pi_q X$ $(q \in \mathbb{Z})$は $\pi_q X := \mathrm{colim}_n \, \pi_{q+n}(T_n)$ (17)
- $\pi_*$-同型： プレスペクトラムの射で，すべてのホモトピー群の同型を誘導.
- $\Omega$-プレスペクトラム：各構造射の随伴$T_n \to \Omega T_{n+1}$ が弱ホモトピー同値となるプレスペクトラム$\{\Sigma T_n \to T_{n+1}\}_{n \geqq 0}$. 実際，基点付き位相空間$T$に対して，$\Omega$-プレスペクトラム $\widetilde{\Sigma}^{\infty}_{\mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}} T$を
$$\widetilde{\Sigma}^{\infty}_{\mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}} T(n) = Q\left(S^n \wedge T\right) := \mathrm{colim}_p \, \Omega^p \Sigma^p \left(S^n \wedge T\right) \tag{18}$$
のように定めると，次の同型が得られる：
$$\pi_q^s T \xrightarrow{\cong} \pi_q \widetilde{\Sigma}^{\infty}_{\mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}} T \overset{\cong}{\to} \pi_q \Sigma^{\infty}_{\mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}} T \xleftarrow{\cong} \pi_q Q T \tag{19}$$
ここで，第１項は基点付き空間の安定ホモトピー群，第２項と第３項はプレスペクトラムのホモトピー群，第４項は基点付き空間のホモトピー群である.
- しかしながら，$S_\mathcal{N}$ が可換でないため，プレスペクトラムの圏 $\mathcal{N}\mathcal{T}_{S_\mathcal{N}} \cong \mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}\mathcal{T}$ は，(対称的) モノイダル圏とはならない.
- **motivic homotopy theory** でもプレスペクトラム類似が最初に出現.

## 2-3, Symmetric spectra-1

- $\mathcal{D} = \Sigma$ を，対象は$\mathcal{N}$と同様に非負数全体，しかし射は $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geqq 1)$，$\mathbf{0} = \emptyset$，$\Sigma_0 = \mathrm{id}_\emptyset$として，以下のように$\mathcal{N}$よりも膨らませて定める：
$$\Sigma(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \begin{cases} \Sigma_n & \textbf{if } m = n \\ \emptyset & \textbf{if } m \neq n \end{cases} \tag{20}$$
- $\Sigma$は集合の分離和集合をモノイダル積として対称的モノイダル圏となる.
- $R = S_\Sigma : \Sigma \ni \mathbf{n} \mapsto S^n \in \mathcal{T}$は，対称的モノイダル関手となるので，$S_\Sigma$は$S_\mathcal{N}$の場合と異なり，$\Sigma\mathcal{T}$の<u>可換モノイドとなる</u>.
- このとき，$\Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma}$の対象を対称スペクトラムと呼ぶ.

$$\begin{cases} \Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma} & \overset{(10)}{\cong} \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T} \\ \Sigma_{S_\Sigma}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) & \overset{(9)}{\cong} \begin{cases} \Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_{n-m}} S^{n-m} & \textbf{if } n \geqq m \\ \emptyset & \textbf{if } n < m \end{cases} \end{cases} \tag{21}$$

## 2-3, Symmetric spectra-2

- 基点付き位相空間$T$に対しては，それらのシフト懸垂スペクトラム$F_{\mathbf{m}}^{S_\Sigma}T$と懸垂スペクトラム $\Sigma_{\Sigma S_\Sigma}^\infty T := F_{\mathbf{0}}^{S_\Sigma}T$ は，次で与えられる：

$$F_{\mathbf{m}}^{S_\Sigma}T(n) \overset{(12)}{=} \Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_{n-m}} \left(S^{n-m} \wedge T\right) \tag{22a}$$

$$\Sigma_{\Sigma S_\Sigma}^\infty T(n) = S^n \wedge T \tag{22b}$$

- $S_\Sigma$ は $\Sigma\mathcal{T}$ の可換モノイドでとなるので，対称スペクトラムの圏 $\Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma} \cong \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$ は，対称的モノイダル圏となる．
- 実際，対称スペトラム$X, Y \in \Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma} \cong \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$に対して，(11)(8)および$S^n = (S^1)^{\wedge^n}$より，$\left(X \wedge_{S_\Sigma} Y\right)(\mathbf{n})$は次の図式の余同化対象として与えられる：

$$\coprod_{p+1+q=n} \Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_p \times \Sigma_1 \times \Sigma_q} X(\mathbf{p}) \wedge S^1 \wedge Y(\mathbf{q}) \tag{23}$$

$$\underset{\mathrm{id}_X \wedge \lambda_Y^l}{\overset{\lambda_X^r \wedge \mathrm{id}_Y}{\rightrightarrows}} \coprod_{p+q=n} \Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_p \times \Sigma_q} X(\mathbf{p}) \wedge Y(\mathbf{q})$$

- 対称スペクトラムの motivic homotopy theory 版は，Jardine や Hovey によって考えられている．

## 2-4, Orthogonal spectra-1

- $\mathcal{D} = \mathcal{I}$ を，対象は有限次元実内積付きベクトル空間全体，射は実線形等長同型写像全体からなる，位相圏とする．
- $\mathcal{I}$は，$\{0\}$を単位元，実ベクトル空間の直和をモノイダル積として，対称的モノイダル圏とみなす．
- $R = S_\mathcal{I} : \mathcal{I} \ni V \mapsto S^V$ ($V$の一点コンパクト化) $\in \mathcal{T}$ は対称的モノイダル関手となるので，$S_\mathcal{I}$は$S_\mathcal{N}$の場合と異なり$S_\Sigma$の場合と同様に，$\mathcal{I}\mathcal{T}$の可換モノイドとなる．
- このとき，$\mathcal{I}\mathcal{T}_{S_\mathcal{I}}$の対象を直交スペクトラムと呼ぶ．
- 有限次元実内積付きベクトル空間の間の入射$V \subsetneqq W$が与えられたとき，$W - V$によって$W$における$V$の直交補空間を表すと，

$$\begin{cases} \mathcal{I}\mathcal{T}_{S_\mathcal{I}} & \overset{(10)}{\cong} \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T} \\ \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}(V, W) & \overset{(9)}{=} \begin{cases} O(W)_+ \wedge_{O(W-V)} S^{W-V} & \text{if } V \subseteqq W \\ \emptyset & \text{if } V \not\subseteqq W \end{cases} \end{cases} \tag{24}$$

## 2-4, Orthogonal spectra-2

- 基点付き位相空間$T$に対しては，それらのシフト懸垂スペクトラム$F_V^{S_\mathcal{I}}T$と懸垂スペクトラム $\Sigma^\infty_{\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}} T := F^{S_\mathcal{I}}_{\{0\}} T$ は，次で与えられる：

$$F_V^{S_\mathcal{I}}T(W) \overset{(12)}{=} O(W)_+ \wedge_{O(W-V)} \left(S^{W-V} \wedge T\right) \qquad (25a)$$
$$\Sigma^\infty_{\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}} T(W) = S^W \wedge T \qquad (25b)$$

- $S_\mathcal{I}$は$\mathcal{IT}$の可換モノイドでとなるので，直交スペクトラムの圏$\mathcal{IT}_{S_\mathcal{I}} \cong \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$は，対称的モノイダル圏となる．
- 直交スペトラム $X, Y \in \mathcal{IT}_{S_\mathcal{I}} \cong \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$ に対しても，(23) と同様な，$\left(X \wedge_{S_\mathcal{I}} Y\right)(V)$の余同化対象としての表示が得られる．
- 直交スペクトラムの同変版は，同変コボルディズムとも相性が良く，Hill-Hopkins-Ravenelに於いては縦横無尽に用いられている．

## 2-5, $\mathcal{W}$-spece-1

- $\mathcal{D} = \mathcal{W}$ を，対象は基点付き有限次元CW複体と同相な位相空間全体，射は連続写像全体からなる，位相圏とする．
- $\mathcal{W}$は，$S^0$を単位元，基点付き位相空間のスマッシュ積をモノイダル積として，対称的モノイダル圏とみなす．
- $R = S_\mathcal{W} : \mathcal{W} \to \mathcal{T}$ を自然な入射とすれば，
これは対称的モノイダル関手となるので，$S_\mathcal{T}$は$S_\mathcal{N}$の場合と異なり
$S_\Sigma$や$S_\mathcal{I}$の場合と同様に，$\mathcal{WT}$の<u>可換モノイドとなる</u>．
- このとき，$\mathcal{WT}_{S_\mathcal{W}}$の対象を$\mathcal{W}$-空間と呼ぶ．
- 基点付き有限次元CW複体と同相な位相空間$X, Y$が与えられたとき，

$$\begin{cases} \mathcal{WT}_{S_\mathcal{W}} \overset{(10)}{\cong} \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} \overset{(9)}{=} \mathcal{WT} \\ \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}(X,Y) \overset{(9)}{=} \mathcal{W}(X,Y) =: F(X,Y) \end{cases} \qquad (26)$$

- $\mathcal{W}$-空間 $A \in \mathcal{WT}_{S_\mathcal{W}} \cong \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} \overset{(26)}{=} \mathcal{WT}$ は，任意の基点付き有限次元CW複体と同相な位相空間$X, Y$に対して，自然な基点を保つ連続写像

$$A(X) \wedge Y \to A(X \wedge Y) \qquad (27)$$

を定める．$Y = [0,1]$の場合から，任意の $\mathcal{W}$-空間は<u>ホモトピー関手</u>(i.e. ホモトピー同値(弱同値)を保つ)となる．

## 2-5, $\mathcal{W}$-spece-2

- (26)が，$\mathcal{W}$-スペクトラムよりも$\mathcal{W}$-空間と呼ばれる所以である.
- 基点付き位相空間$T$に対しては，それらのシフト懸垂スペクトラム$F_X^{S_{\mathcal{W}}}T$と懸垂スペクトラム $\Sigma^{\infty}_{\mathcal{I}_{S_{\mathcal{W}}}}T := F_{S^0}^{S_{\mathcal{W}}}T$ は，次で与えられる：

$$F_X^{S_{\mathcal{W}}}T(Y) \overset{(12)}{=} F(X,Y)\wedge T \tag{28a}$$
$$\Sigma^{\infty}_{\mathcal{I}_{S_{\mathcal{W}}}}T(Y) = Y \wedge T \tag{28b}$$

- $S_{\mathcal{W}}$は$\mathcal{WT}$の可換モノイドでとなるので，$\mathcal{W}$-空間の圏$\mathcal{WT}_{S_{\mathcal{W}}} \cong \mathcal{W}_{S_{\mathcal{W}}}\mathcal{T} \overset{(26)}{=} \mathcal{WT}$ は，対称的モノイダル圏となる.
- $\mathcal{W}$-空間$A,B\in \mathcal{WT}_{S_{\mathcal{W}}} \cong \mathcal{W}_{S_{\mathcal{W}}}\mathcal{T} \overset{(26)}{=} \mathcal{WT}$に対しては，$\left(A\wedge_{S_{\mathcal{W}}} B\right)(X)$の位相左カン拡大を用いた表示が得られる.

$$\left(A\wedge_{S_{\mathcal{W}}} B\right)(X) \overset{(26),(8)}{=} \operatorname{colim}_{Y\square Z\to X} A(Y)\wedge B(Z) \tag{29}$$

- $\mathcal{W}$-空間のmotivic homotopy theory版は，Dundas-Rondigs-Ostvarによって考えられている.

## 2-6，安定モデル構造-1

“スペクトラム”の圏$\mathcal{DT}_S = \mathcal{D}_S\mathcal{T} = \mathcal{N}_{S_{\mathcal{N}}}\mathcal{T}, \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}, \mathcal{I}_{S_{\mathcal{I}}}\mathcal{T}, \mathcal{W}_{S_{\mathcal{W}}}\mathcal{T} = \mathcal{WT}$に対して，忘却関手 $\mathbb{U}:\mathcal{D}_S\mathcal{T}\to\mathcal{N}_{S_{\mathcal{N}}}\mathcal{T}$と部分圏$\mathcal{N}\subsetneqq\mathcal{D}_S$ を用いて，幾つかの定義を与える：

- $(\mathcal{D}-)\pi_*$-同型 ： $f\in \mathrm{Mor}\,\mathcal{DT}_S$で，プレスペクトラムの射$\mathbb{U}f$が$\pi_*$-同型となるもの.
- $\mathcal{D}-\Omega$-スペクトラム ： $E\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{DT}_S$で，プレスペクトラム$\mathbb{U}E$が$\Omega$-プレスペクトラムなもの.
- $(\mathcal{N}-)$安定同値 ： $f\in\mathcal{D}_S\mathcal{T}(X,Y)$で，すべての$\mathcal{D}-\Omega$-スペクトラム$E$に対して同型

$$f^*:[Y,E]_{\mathcal{D}_S-\mathcal{N}-\mathrm{level}}\to[X,E]_{\mathcal{D}_S-\mathcal{N}-\mathrm{level}}$$

  を誘導するもの．ここで $[-,-]_{\mathcal{D}_S-\mathcal{N}-\mathrm{level}}$は，$\mathcal{DT}_S\cong\mathcal{D}_S\mathcal{T}$の$\mathcal{N}-$レベルモデル構造に関するホモトピー圏での射集合を表す.
- $(\mathcal{N}-)q$-ファイブレーシェン ： $(\mathcal{N}-)$安定同値かつ，$\mathcal{DT}_S\cong\mathcal{D}_S\mathcal{T}$の$\mathcal{N}-$レベルモデル構造に関する$(\mathcal{N}-)q$-コファイブレーションに対して，右持ち上げ性質を持つもの.

## 2-6, 安定モデル構造-2

**Theorem.** "スペクトラム" の圏たち $\mathcal{D}_S\mathcal{T} = \mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}\mathcal{T}$, $\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$, $\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$, $\mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ はすべて, 以下で特徴づけられるモデル圏となる：

- 弱同値＝$(\mathcal{N}-)$安定同値：
- コファイブレーション＝$(\mathcal{N}-)q$-コファイブレーシェン：
- ファイブレーション＝$(\mathcal{N}-)q$-ファイブレーシェン：

このモデル構造は, **安定モデル構造** と呼ばれる,

**Theorem.** 各$\mathbb{U}$に対してその左随伴$\mathbb{P}$を位相的左カン拡大で与えよう：

$$\mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}\mathcal{T} \underset{\mathbb{U}}{\overset{\mathbb{P}}{\rightleftarrows}} \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T} \underset{\mathbb{U}}{\overset{\mathbb{P}}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T} \underset{\mathbb{U}}{\overset{\mathbb{P}}{\rightleftarrows}} \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T} \tag{30}$$

- $\mathbb{U} : \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T} \to \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$, $\mathbb{U} : \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T} \to \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$ はラックス対称モノイダル関手でしかなかったが, $\mathbb{P} : \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T} \to \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$, $\mathbb{P} : \mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T} \to \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ は強対称モノイダル関手となっている.
- (30)は, 各々の安定モデル構造の間の, クイレン同値（の合成）である.
- (30)の右側のクイレン同値は, ホモトピー圏において各々のモノイダル構造から誘導される**スマッシュ積**を保つ.

## 2-6, 安定モデル構造-3

- **この定理のQuillen同値(の合成)から定まる同値なホモトピー圏が, 空間の安定ホモトピー圏である.**
- **ファイブラント：$\mathcal{D}-\Omega$-スペクトラム, 特に$\mathcal{D}_S\mathcal{T} = \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$の場合は, 線形関手（i.e. homotopy cocartesian square を homotopy cartesian square に移す）ならファイブラントとなるが, 逆は言えない.**
- **"スペクトラム" の圏たち$\mathcal{D}_S\mathcal{T} = \mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}\mathcal{T}$, $\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$, $\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$, $\mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ において,**

$$\mathcal{N}-\text{レベル同値} \Longrightarrow (\mathcal{D}-)\pi_*\text{-同型} \Longrightarrow \text{安定同値} \tag{31}$$

- **$\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$ 以外の "スペクトラム" の圏たち $\mathcal{D}_S\mathcal{T} = \mathcal{N}_{S_\mathcal{N}}\mathcal{T}$, $\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$, $\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$, $\mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ においては,**

$$(\mathcal{D}-)\pi_*\text{-同型} = \text{安定同値} \tag{32}$$

- **除外された圏$\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$においては,**

$$f \in \mathrm{Mor}\,\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}\text{は安定同値} \iff \mathbb{P}f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}\text{は}(\mathcal{I}-)\pi_*\text{-同型} \tag{33}$$

## 2-7, Schwede-Shipley pushout-product and monoidal axioms-1

一般にモデル圏が対称モノイダル圏でもあるとき，これらの出生の異なる概念を融合する概念として，次の自然な概念が良く知られている

**モノイダルモデル圏**

圏$\mathcal{C}$がモノイダルモデル圏とは，次の条件が満たされるときを言う：

- 圏$\mathcal{C}$はモデル圏，
- 圏$\mathcal{C}$は閉対称モノイダル圏，
- 圏$\mathcal{C}$は次のpushout-product axiomを満たす：
  - $A \to B, K \to L$ がcofibrationなら，次もcofibration：

$$A \wedge L \cup_{A \wedge K} B \wedge K \to B \wedge L$$

  - 更に，前者の射のうち一つでも弱同値なら，後者の射も弱同値となる．

しかしながら，Schwede-Shipleyは，多くのモノイダル構造のモデル理論的応用のためには，融合的な条件としてはもう一つ，monoidal axiom，を付加することが必要であることを指摘した...

## 2-7, Schwede-Shipley pushout-product and monoidal axioms-2

**monoidal axiom**

モノイダルモデル圏$\mathcal{C}$がmonoidal axiomを満たすとは，次が成立する時：

$$\begin{aligned} &(\{\text{acyc. cofibrations}\} \wedge \mathcal{C})\text{-cof}_{\text{reg}} \\ := &\{f \wedge Z \mid f \in \{\text{acyc. cofibrations}\}, Z \in \mathcal{C}\}\text{-cof}_{\text{reg}} \\ \subsetneqq &\{\text{weak equvalences}\} \end{aligned}$$

**Schwede-Shipley Theorem**

$\mathcal{C}$： cofibrantly生成な，モノイダル公理を満たすモノイダルモデル圏で，有る正則基数$\kappa$が存在して，任意の正則基数$\lambda \geqq \kappa$と関手$V : \lambda \to \mathcal{C}$で任意の極限順序数$\beta < \lambda$に対して$\mathrm{colim} V|_\beta \to V(\beta)$が同型な物が与えられたならば，$\mathrm{colim}_\lambda \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathrm{colim}_\lambda V)$ は常に同型とする．

- $R$を$\mathcal{C}$のモノイドとすると，左$R$加群の圏もcofibrantly生成モデル圏．
- $R$を$\mathcal{C}$の可換モノイドとすると，$R$加群の圏もcofibrantly生成な，モノイダル公理を満たすモノイダルモデル圏．
- $R$を$\mathcal{C}$の可換モノイドとすると，$R$代数の圏もcofibrantly生成モデル圏．もしモノイダル積の単位元$I$がcofibrantならば，sourceがcofibrantな$R$代数のcofibrationは，$R$加群の射としてもcofibrationとなる．

## 2-7, Schwede-Shipley pushout-product and monoidal axioms-3

- Schwede-Shipley Theoremに現れる，モノイド$R$の左$R$加群のモデル圏，可換モノイド$R$の$R$代数のモデル圏，はすべて，それらの weak equivalenceとfibration は，もともとのモデル圏$\mathcal{C}$への忘却関手を施した時にそうなっていることによって特徴づけられる．
- $\Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$，$\mathcal{I}_{S_\mathcal{I}}\mathcal{T}$，$\mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ はすべて各々の安定モデル構造に関して，Schwede-Shipley Theorem が適当可能．
- ただし，これらの圏の可換モノイドのなす圏に対してモデル構造を導入するには，Schwede-Shipley Theorem は適応出来ないので工夫が必要...
(${\mathcal{N}}$-レベルではなく$\mathcal{N}\setminus\{0\}$-レベルを出発点とした，正安定モデル構造…)

## 2-8, $\mathcal{W}$-space 再訪-1

**Theorem.** $\mathcal{W}$-空間の圏 $\mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ は，以下で特徴づけられるモデル構造も持つ：

- 弱同値$=(\mathcal{W}-)\pi_*-$同型：
- コファイブレーション$=(\mathcal{W}-)q$-コファイブレーシェン：
- ファイブレーション$=(\mathcal{W}-)q$-ファイブレーシェン：$(\mathcal{W}-)\pi_*-$同型かつ，$\mathcal{W}\mathcal{T}_{S_\mathcal{W}} \cong \mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$の$\mathcal{W}-$レベルモデル構造に関する$(\mathcal{W}-)q$-コファイブレーションに対して，右持ち上げ性質を持つもの．

このモデル構造は，**絶対安定モデル構造** と呼ばれる，

- 絶対安定モデル構造においては，ファイブラントのクラスは線形関手のクラスに一致する．
- 絶対安定モデル構造に対しても，Schwede-Shipleyの定理が適応可能．
- 絶対安定モデル構造のsimplicial類似が，M. Lydakis によって考察されている．

**Theorem.** $\mathcal{W}$-空間の圏 $\mathcal{W}_{S_\mathcal{W}}\mathcal{T} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ の恒等関手は，
その安定モデル構造と絶対安定モデル構造の間の *Quillen*同値を誘導する．

## 2-8, $\mathcal{W}$-space 再訪-2

位相空間で考えた$\mathcal{W}$-spaceを今度はsimplicialに考えるとき，$\mathcal{T}, \mathcal{W}, \mathcal{N}, \mathcal{WT}$に対応するのは，各々次の概念である：

- $\mathrm{S}$ : 基点付き単体集合のなす，基点付きsimplicial category.
- $\mathrm{S}^{fin}$ : 基点付き有限単体集合のなす，基点付きsimplicial category.
- $\mathrm{S}ph$ : 対象は$\{S^n\}_{n \in \geqq 0}$， 射は$\mathrm{S}ph(S^m, S^n) = \begin{cases} S^{n-m} & \text{if } n \geqq m \\ \emptyset & \text{if } n < m \end{cases}$
- $SF$ : Simplicial functor (= 基点を保つ単体的関手 $\mathrm{S}^{fin} \to \mathrm{S}$) のなす圏.

位相空間の場合と異なるのは，Simplicial functor は ホモトピー関手とは限らない ということである．そこで， associated homotopy functor

$$R : SF \to SF \tag{34}$$

を，$\mathrm{S}^{fin}$の各レベル毎に，幾何学的実現を施した後に特異単体集合関手を施したもの，として定義して用いるのである.

## 2-8, $\mathcal{W}$-space 再訪-3

**Lydakisの，単体的関手の圏における安定モデル構造**

**Theorem.** *Simplicial functor* のなす圏$SF$は，
以下で特徴づけられるモデル構造も持つ：

- 弱同値 = $(\mathrm{S}^{fin}-)\pi_* R-$同型：
- コファイブレーション = $(\mathrm{S}^{fin}-)q$-コファイブレーシェン： これは，$SF$の$\mathrm{S}^{fin}-$ レベルモデル構造に関するもの.
- ファイブレーション = $(\mathrm{S}^{fin}-)q$-ファイブレーシェン： $(\mathrm{S}^{fin}-)\pi_*-$同型かつ，$SF$の$\mathrm{S}^{fin}-$ レベルモデル構造に関する$(\mathrm{S}^{fin}-)q$-コファイブレーションに対して，右持ち上げ性質を持つもの.

このモデル構造は，**(Lydakis) 安定モデル構造** と呼ばれる，

- (Lydakis) 安定モデル構造においては，ファイブラントのクラスは，$\mathrm{S}^{fin}-$ レベル毎にfibrantかつ (simplicial) 線形関手 (i.e. 基点付き有限単体集合の列 $K_1 \to K_2 \to K_3$で $K_1 \to K_2$が単射で$K_2 \to K_3$がcofiber となるものを，常にfiber列に移すもの) のクラスに一致する.

2-9, Symmetric-spectra 再訪-1

位相空間の場合の Symmetric-spectra の圏 $\Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma} \cong \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$
をsimplicialにするには，基点付き位相空間の圏$\mathcal{T}$を基点付き単体集合の圏$\mathrm{S}$に置き換えて，$\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma} \cong \Sigma_{S_\Sigma}\mathrm{S}$とする．これが，Hovey-Shipley-Smithによって考えられた．
しかしながら，位相空間の場合の安定モデル構造の弱同値：

($\mathcal{N}-$) 安定同値 ： $f \in \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}(X,Y)$で，
すべての$\Sigma-\Omega$-スペクトラム$E$に対して同型

$$f^* : [Y,E]_{\Sigma_{S_\Sigma}-\mathcal{N}-\text{level}} \to [X,E]_{\Sigma_{S_\Sigma}-\mathcal{N}-\text{level}}$$

を誘導するもの．ここで $[-,-]_{\Sigma_{S_\Sigma}-\mathcal{N}-\text{level}}$は，$\Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma} \cong \Sigma_{S_\Sigma}\mathcal{T}$の
$\mathcal{N}-$ レベルモデル構造に関するホモトピー圏での射集合を表す．

の背景にある，

対応 $\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma} \ni X \mapsto \pi_0 \mathrm{Map}_{\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}}(X,E) \in Sets$ が
$\mathcal{N}-$ レベル同値を同型に移す

という事実は， simplicialな場合には成立しない． そこで…

2-9, Symmetric-spectra 再訪-2

Kan複体の類似としてのinjective spectrum

symmetric spectrum $E \in \Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}$ が injective spectrum とは，任意の単射かつ$\mathcal{N}$-レベル同値な射$f : X \to Y$に対して，次の形の拡張問題が常に解けるときを言う：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E \\ Y \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \qquad (35)$$

simplicialな場合の($\mathcal{N}$-)安定同値

$f \in \Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}(X,Y)$が， ($\mathcal{N}$-)安定同値 とは，任意のinjectiveな$\Sigma-\Omega$-スペクトラム$E$に対して，次の3つの同値(よってどれか一つ)の条件が成立する時をいう：

- $f^* : \pi_0 \mathrm{Map}_{\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}}(Y,E) \to \pi_0 \mathrm{Map}_{\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}}(X,E)$ は同型．
- $f^* : \mathrm{Map}_{\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}}(Y,E) \to Map_{\Sigma\mathrm{S}_{S_\Sigma}}(X,E)$ は，基点付き単体集合の弱同値．
- $f^* : \mathrm{Hom}_{S_\Sigma}(Y,E) \to \mathrm{Hom}_{S_\Sigma}(X,E)$ は，symmetric spectrum のlevel同値．

## 2-9, Symmetric-spectra 再訪-3

**simplicialなsymmetric spectrumの安定モデル構造**

**Theorem.** *simplicialなsymmetric spectrum*の圏$\Sigma\mathbf{S}_{S_\Sigma} \cong \Sigma_{S_\Sigma}\mathbf{S}$ は，以下で特徴づけられるモデル圏をなす：

- 弱同値$=(\mathcal{N}-)$安定同値：
- コファイブレーション$=(\mathcal{N}-)q$-コファイブレーシェン：
- ファイブレーション$=(\mathcal{N}-)q$-ファイブレーシェン：

このモデル構造は，**安定モデル構造** と呼ばれる，

**symmetric spectra の圏の間のQuillen同値**

**レベル毎の幾何学的実現関手$|-|$とレベル毎の特異単位集合関手$Sing$は，次のQuillen同値を誘導する：**

$$\Sigma\mathbf{S}_{S_\Sigma} \underset{Sing}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} \Sigma\mathcal{T}_{S_\Sigma} \qquad (36)$$

- **simplicialなsymmetric spectrumの安定モデル構造に対しても，Schwede-Shipleyの定理が適応可能.**

## §3, Stable motivic homotopy theory

### 3-1 Motivic spectra - a quick view

**基本的な方針は，以下の対応に従い，今まで見た古典的安定ホモトピー論の類似を行う：**

$\mathcal{T}$, S $\Longrightarrow$ $\mathcal{M} := \Delta^{op}Preshv(Sm/S)_{Nis}$, enriched over itself
ただし，$\mathcal{N}$のモデル構造としては，Morel-Voevodskyの
simplicial sheafの場合の構造の自然なsimplicial presheaf類似で，
JardineのMotivic symmetric spectraの論文で用いられた
(Goerss-)Jardineによるモデル構造$\mathcal{M}_{GJ}$と，Voevodsky
による構造で，Hoveyのモデル圏上でのsymmetric spectraの
一般論に関する論文で用いられたモデル構造$\mathcal{M}_{mo}$の，
2つの異なった互いにQuillen同値なものを考える.

$\mathcal{N}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{N}$

$\Sigma$ $\Longrightarrow$ $\Sigma$

$\mathcal{W}$, $\mathrm{S}^{fin}$ $\Longrightarrow$ $f\mathcal{M}$, the full $\mathcal{M}$-subcategory of $\mathcal{M}$,
consisting of finitely presented objects

$S^1$ $\Longrightarrow$ $S^1, T := \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}), \mathbb{P}^1$

Motivic $K$ spectrum ($K = S^1, T, \mathbb{P}$)
Sp$(\mathcal{M}_{GJ}, K) := \mathcal{N}_{K_{\mathcal{N}}}\mathcal{M}_{GJ}$, Sp$(\mathcal{M}_{mo}, K) := \mathcal{N}_{K_{\mathcal{N}}}\mathcal{M}_{mo}$,

Motivic $K$ symmetric spectrum ($K = S^1, T, \mathbb{P}$)
Sp$^{\Sigma}(\mathcal{M}_{GJ}, K) := \Sigma_{K_{\Sigma}}\mathcal{M}_{GJ}$, Sp$^{\Sigma}(\mathcal{M}_{mo}, K) := \Sigma_{K_{\Sigma}}\mathcal{M}_{mo}$,

Motivic functor とは $\mathcal{M}$-functor $f\mathcal{M} \to \mathcal{M}$のことをいい，Motivic functorのなす圏を MF と表す.

これらには適当なQuillenモデル構造が存在し，次のようなQuillen同値からなる図式が存在する(ページ数の制限によりこれらのモデル構造を具体的に書くことは出来ないので，詳細は，Dundasたちの論文を中心に，Hovey, Jardineの論文も見て，理解していただきたい ):

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{GJ}, S^1) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{GJ}, S^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{mo}, S^1) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{mo}, S^1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{GJ}, T) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{GJ}, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{GJ}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{GJ}, \mathbb{P}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{mo}, T) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{mo}, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{mo}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{mo}, \mathbb{P}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{GJ}, T) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{GJ}, T) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathsf{Sp}(\mathcal{M}_{mo}, T) & \longrightarrow & \mathsf{Sp}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{mo}, T) & \longrightarrow & \mathbf{MF} \end{array}$$

### 3-2 Examples of $\mathbb{P}^1$-spectra - Morel, Example 5.1.2 - 1

**$\mathbb{P}^1$-suspension spectrum**

$\forall \mathcal{X} \in \Delta^{op}Shv_{\bullet}(Sm/S)_{Nis}$ **a "based space",**

$$\Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{X}) := \left\{\mathcal{X} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge^n}, \left(\sigma_n : (\mathcal{X} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge^n}) \wedge \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{X} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge^{n+1}}\right)\right\}$$

**example:** $S^0 := \Sigma^{\infty}_{\mathbb{P}^1}(S^0)$**, the sphere spectrum**

**algebraic $K$-theory $\mathbb{P}^1$-spectrum - Morel, Example 5.1.7**

**algebraic $K$-theory $\mathbb{P}^1$-spectrum** $\mathbb{K}$ **is given by**

$$\mathbb{K} := \left\{\mathbb{Z} \times Gr, \left(\sigma_n = \text{Bottmap} : (\mathbb{Z} \times Gr) \wedge \mathbb{P}^1 \to \mathbb{Z} \times Gr\right)\right\}$$

**The Bott map induces the Bott periodicity in $\mathcal{SH}(k)$:**

$$\mathbb{K} \wedge \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{K}$$

**which is $(2,1)$-periodic. Thus, for $X \in Sm/k$ and $(n,i) \in (\mathbb{Z})^2$,**

$$\mathbb{K}^{n,i}(X) \cong K^Q_{2i-n}(X)$$

**3-2 Examples of $\mathbb{P}^1$-spectra - Morel, Example 5.1.2 - 2**

For $X \in Sm(k)$, the motivic Eilenberg-MacLane "space" $L[X]$ is the sheaf of abelian groups

$$U \mapsto c(U, X)$$

where $c(U, X)$ denotes the group of finite correspondences from $U$ to $X$, i.e. the free abelian group generated by closed irreducible subsets of $U \times X$ which are finite over $U$ and surjective over a connected component of $U$.

examples: For any morphism $f : U \to X$ in $Sm/k$, its graph $\Gamma(f)$ is an element of $c(U, X)$.

$$\Longrightarrow \Gamma(X) : X \to L[X]$$

Researchers of the classical homotopy theorists might find it useful to regard this as an analogueq of the Dold-Thom infinite symmetric product construction: $T \to Sp^{\infty}T$ .

**3-2 Examples of $\mathbb{P}^1$-spectra - Morel, Example 5.1.2 - 3**

The motivic cohomology spectrum, motivic Eilenberg spectrum $\mathbb{HZ}$ is a $T$-spectrum (thus a $\mathbb{P}^1$-spectrum), given by

$$\mathbb{HZ} := \left\{L[\mathbb{A}^n]/L[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}]; \left(\sigma_n : L[\mathbb{A}^n]/L[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}] \wedge T \to L[\mathbb{A}^{n+1}]/L[\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}]\right)\right\}$$

where $\sigma_n$ is given by

$$\sigma_n : L[\mathbb{A}^n]/L[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}] \wedge T = \left(L[\mathbb{A}^n]/L[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}]\right) \wedge \left(\mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})\right)$$
$$\xrightarrow{1 \wedge \Gamma(T)} \left(L[\mathbb{A}^n]/L[\mathbb{A}^n \setminus \{0\}]\right) \wedge \left(L[\mathbb{A}^1]/L[\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}]\right)$$
$$\to L\left[(\mathbb{A}^n/(\mathbb{A}^n \setminus \{0\})) \wedge \left(\mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})\right)\right] \to L[\mathbb{A}^{n+1}]/L[\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}]$$

Here the quotients $/$, where $L$ shows up, are taken in the category of sheaves of abelian groups $\mathfrak{Ab}((Sm/k)_{Nis})$.

**motivic cohomology - Morel, Example 5.1.7**

For $X \in Sm/k$, $(n, i)(\mathbb{Z})^2$,

$$\mathbb{H}^{n,i}(X) \cong H^n(X, \mathbb{Z}(i)),$$

the Suslin-Voevodsky motivic cohomology group .