数理解析研究所講究録
第 1816 巻 2012 年 1-9

順序極小構造上のデファイナブルモース関数について

川上智博*

1 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,...)$ において、デファイナブルモース関数について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,<,\ldots)$ に限っても、[17] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関して、[3], [4] などに性質がまとめられている。また、[18] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、順序極小構造より一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,...)$ で考えるものとし、$2\leqq r<\infty$ とする。

2 準備

順序 $<$ をもった体 $(R,+,\cdot,<)$ の順序 $<$ が線形とは、任意の $x,y\in R$ に対して、$x<y, x=y, x>y$ のどれか一つが成り立つことである。順序 $<$ が稠密とは、任意の $x,y\in R, x<y$ に対して、$z\in R$ が存在して、$x<z<y$ となることである。順序 $<$ が端点をもたないとは、任意の $x\in R$ に対して、$y,z\in R$ が存在して、$y<x<z$ となることである。

*和歌山大学教育学部, Partially supported by Kakenhi(23540101).

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 57R35, 58A05, 03C64.
Key Words and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブリーコンパクト, デファイナブル C^r 級多様体, デファイナブルモース関数.

稠密線形で端点をもたない順序 $<$ をもった体 $(R,+,\cdot,<)$ が順序体とは、以下の二つの条件をを満たすことである。

(1) 任意の $x,y,z\in R$ に対して、$x<y$ ならば、$x+z<y+z$ である。

(2) 任意の $x,y,z\in R$ に対して、$x<y$ かつ $z>0$ ならば、$xz<yz$ である。

順序体 $(R,+,\cdot,<)$ が実体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) R の元 $x_1,\ldots,x_n$ で、$x_1^2+\cdots+x_n^2=-1$ となるものは存在しない。

(2) 任意の R の元 $y_1,\ldots,y_m$ に対して、$y_1^2+\cdots+y_m^2=0$ ならば、$y_1=\cdots=y_m=0$ である。

実体 $(R,+,\cdot,<)$ が実閉体とは、以下の同値な二つの条件のひとつを満たすことである。

(1) [多項式に関する中間値定理] 任意の $f(x)\in R[x]$ に対して、$a<b$ かつ $f(a)\neq f(b)$ ならば、$f([a,b]_R)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。ただし、$[a,b]_R=\{x\in R|a\le x\le b\}$ とする。

(2) $R[i]=R[x]/(x^2+1)$ が代数閉体となる。

構造 $\mathcal{N}=(R,(f_i),(L_j),(c_k))$ とは、以下のデータで定義されるものである。

1. 集合 R を $\mathcal{N}$ の underlying set または universe という。
2. 関数の集合 $\{f_i|i\in I\}$、ただし $f_i:R^{n_i}\to R, n_i\ge 1$。
3. 関係の集合 $\{L_j|j\in J\}$、ただし $L_j\subset R^{m_j}, m_j\ge 1$。
4. 特別な元の集合 $\{c_k|k\in K\}\subset R$。各 c_k を定数という。

添字集合 I,J,K は、空集合でもかまわない。

f (L) が m 変数関数 (m 変数関係) とは、$f:R^m\to R$ $(L\subset R^m)$ となることである。

項とは、以下の３つの規則にしたがって得られる有限列ことである。

1. 定数は項である。
2. 変数は項である。
3. f が m 変数関数かつ $t_1,\ldots,t_m$ が項ならば、$f(t_1,\ldots,t_m)$ は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、$\exists,\forall$ からなる有限列で、以下の３つの規則にしたがって得られるものである。

1. 任意の二つの項 t_1,t_2 に対して、$t_1=t_2$ と $t_1<t_2$ は論理式である。

2. L が m 変数関係かつ $t_1,\ldots,t_m$ が項ならば、$L(t_1,\ldots,t_m)$ は論理式である。

3. ϕ と ψ が論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi\vee\psi$ と $\phi\wedge\psi$ は論理式である。ϕ が論理式かつ v が変数ならば、$(\exists v)\phi$ と $(\forall v)\phi$ は論理式である。

R^n の部分集合 X が $\mathcal{N}$ においてデファイナブルとは、論理式 $\phi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ と $b_1,\ldots,b_m\in R$ が存在して、$X=\{(a_1,\ldots,a_n)\in R^n|\phi(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m)$ が $\mathcal{N}$ で成り立つ $\}$ となることである。このとき、X をデファイナブル集合という。

$\mathcal{N}=(R,+,\cdot,<,\cdots)$ が順序極小構造 (o-minimal structure) とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a,b)_R=\{x\in R|a<x<b\}$, $-\infty\le a<b\le\infty$ を表すものとする。

実閉体 $(R,+,\cdot,<)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

R の位相は、開区間を開基とする位相とする。R^n の位相は、積位相とする。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty}a_iX^{\frac{i}{q}}, k\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}, a_i\in\mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg}=\{x\in\mathbb{R}|x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X\subset R^n$、$Y\subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f:X\to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ $(\subset R^n\times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

実閉体 R 上で、実数体 $\mathbb{R}$ のとき同様に、$1\leqq r\leqq\infty$ に対して、C^r 級関数、C^r 級写像を定義することができる。ところが、一般の実閉体 R では、C^∞ 級関数に対してさえ、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。また、一変数 C^∞ 級関数 f に対して、$f'>0$ ならば、f が増加しているという定理も不成立となる。以下がその例である。

例 2.3. $\mathcal{N}=(\mathbb{R}_{alg},+,\cdot,<)$ とする。$a,b\in\mathbb{R}_{alg}$ に対して、$[a,b]_{\mathbb{R}_{alg}}=\{x\in\mathbb{R}_{alg}|a\leqq x\leqq b\}, (a,b)_{\mathbb{R}_{alg}}=\{x\in\mathbb{R}_{alg}|a<x<b\}$ とする。関数 f を

$f:[1,10]_{\mathbb{R}_{alg}} \to \mathbb{R}_{alg}$ を $[1,\pi]\cap\mathbb{R}_{alg}$ 上で x, $[\pi,2\pi]\cap\mathbb{R}_{alg}$ 上で $x-5$, $[2\pi,10]\cap\mathbb{R}_{alg}$ 上で $-x+30$ と定義すると、C^∞ 級関数となる。この f に対して、中間値の定理、最大値・最小値の定理、ロルの定理、平均値の定理が不成立となる。$[1,2\pi]\cap\mathbb{R}_{alg}$ において、$f'>0$ であるが、f は増加関数でない。この f は $\mathcal{N}$ においてデファイナブルでない。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル関数 $f:(a,b)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x\to a+0} f(x), \lim_{x\to b-0} f(x)$ が X 内に存在することである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブル連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、$X = Y\cup Z$ かつ $Y\cap Z=\emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクトであるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクトとは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブル連結であるが、デファイナブル連結集合は、連結とは限らない。たとえば、$R=\mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x\in\mathbb{R}_{alg} | 0\le x\le 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブル連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.4 ([16]). R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.5. $X\subset R^n$、$Y\subset R^m$ をデファイナブル集合、$f:X\to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブル連結*)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブル連結*)* である。

デファイナブル関数に対して、例 2.3 のようなことはおこらない。

定理 2.6. *(1) (*中間値の定理*)* デファイナブル連結集合 X 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ に対して、$a,b\in X$ かつ $f(a)\neq f(b)$ ならば、$f(X)$ は、$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの値をすべて含む。

*(2) (*最大値・最小値の定理*)* デファイナブリーコンパクト集合 X 上の任意のデファイナブル関数 $f(x)$ は最大値・最小値をとる。

*(3) (*ロルの定理*)* $f:[a,b]_R\to R$ をデファイナブル関数とし、$(a,b)_R$ で微分可能で、$f(a)=f(b)$ とすると、$f'(c)=0$ となる c が a と b の間に存在する。

(4) (平均値の定理) $f:[a,b]_R \to R$をデファイナブル関数とし、$(a,b)_R$で微分可能とすると、$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となるcがaとbの間に存在する。

(5) $f:(a,b)_R \to R$を微分可能なデファイナブル関数とし、$(a,b)_R$上で$f'>0$ならば、fは増加している。

3 デファイナブルモース関数

$X \subset R^n, Z \subset R^m$をデファイナブル集合とし、$f:X \to Z$をデファイナブル写像とする。$f$がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像$h:Z \to X$が存在して、$f \circ h = id_Z$かつ$h \circ f = id_X$となることである。

$X \subset R^n, Z \subset R^m$をデファイナブル開集合とし、$f:X \to Z$をデファイナブル写像とする。$f$がデファイナブル$C^r$写像とは、$f$が$C^r$写像となることである。デファイナブル$C^r$写像$f$がデファイナブル$C^r$微分同相写像とは、$f$が$C^r$微分同相写像となることである。

定義 3.1. (1) rを非負整数または∞とする。Hausdorff空間Xがn次元デファイナブルC^r級多様体とは、Xの有限開被覆$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$、$R^n$の有限個の開集合$\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$と有限個の同相写像$\{\phi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$が存在して、$U_\lambda \cap U_\nu \neq \emptyset$となる$\lambda, \nu$に対して、$\phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu)$がデファイナブルかつ$\phi_\nu \circ \phi_\lambda^{-1} : \phi_\lambda(U_\lambda \cap U_\nu) \to \phi_\nu(U_\lambda \cap U_\nu)$がデファイナブル$C^r$微分同相写像となることである。このとき、$\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}$をデファイナブル$C^r$座標近傍系という。

(2) デファイナブルデファイナブルC^r級多様体Xがデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル写像$f:(a,b)_R \to X$に対して、極限点$\lim_{x \to a+0} f(x), \lim_{x \to b-0} f(x)$が$X$内に存在することである。

例 3.2. *(1)* n次元単位球面$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$は、$n$次元デファイナブル$C^\infty$級多様体である。

(2) $T^2 = S^1 \times S^1$は、2次元デファイナブルC^∞級多様体である。

デファイナブルC^r多様体・デファイナブルC^rG多様体は、[10], [7]などで研究されている。

基礎体が実数体$\mathbb{R}$のときに、n次元C^r級多様体の$\mathbb{R}^{2n+1}$へのC^r級埋め込みの存在が知られているが、そのデファイナブル版が以下である。

定理 3.3. *(1) ([11])* 実数体$\mathbb{R}$の順序極小拡張構造$\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \dots)$に対して、$0 \leqq r < \infty$ならば、任意のデファイナブル$C^r$級多様体は、ある$\mathbb{R}^n$へのデファイナブル$C^r$級埋め込みが存在する。

(2) ([5]) 実数体 $\mathbb{R}$ の指数的順序極小拡張構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, exp, \dots)$ に対して、任意のデファイナブル C^∞ 級多様体は、ある $\mathbb{R}^n$ へのデファイナブル C^∞ 級埋め込みが存在する。ただし、$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ を表すとする。

(3) ([2]) 実閉体 R の順序極小拡張構造 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ に対して、$0 \leqq r < \infty$ ならば、任意のデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 級多様体は、ある R^n へのデファイナブル C^r 級埋め込みが存在する。

定理 3.4 ([22]). 指数関数 exp は、$\mathbb{R}_{alg} \to \mathbb{R}_{alg}$ の関数としては、定義されない。

X をデファイナブル C^r 級多様体とし、$f : X \to R$ をデファイナブル C^r 級関数とする。X の点 p が f の臨界点とは、f の p での微分が 0 となることである。p が f の臨界点のとき、$f(p)$ を f の臨界値という。f の臨界点 p が非退化とは、f の p におけるヘッセ行列が正則となるである。この定義は、デファイナブル局所座標近傍のとり方によらないで決まる。f がデファイナブルモース関数とは、f に臨界点が存在しないか、存在すれば非退化な臨界点となることである。

基礎体が実数体 $\mathbb{R}$ のときのモース理論の本として、[15] がある。

定理 3.5 (e.g. [14]). 基礎体が実数体 $\mathbb{R}$ のとき、コンパクト C^∞ 級多様体 X 上のモース関数全体は、X 上の C^∞ 級関数全体の集合において、*Whitney* C^2 位相で開かつ稠密である。

定理 3.5 のデファイナブル版を考察することが、ここでの目的である。デファイナブル版を考察するときには、、以下で定義されるデファイナブル C^r 位相を用いる。

X を R^n のデファイナブル C^r 級部分多様体とする。$Def^r(X)$ で X 上のデファイナブル C^r 級関数全体を表すとする。$f \in Def^r(X)$ とし、$\epsilon : X \to R$ を正値デファイナブル関数とする f の $Def^r(X)$ における ϵ 近傍 $N(f;\epsilon)$ を $\{h \in Def^r(X) || \partial^\alpha(h-f)| < \epsilon, \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, |\alpha| \leqq r\}$ とする。ただし、$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \partial F = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ とする。これらの ϵ 近傍から定義される $Def^r(X)$ の位相をデファイナブル C^r 位相という。この位相は、基礎体が実数体 $\mathbb{R}$ のときに定義される C^r 位相、WhitneyC^r 位相とは、一般には異なるものである。

定理 3.6 ([8]). X をデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 多様体とし、$2 \leqq r < \infty$ とする。このとき、X 上のデファイナブルモース関数全体の集合 $Def^r_{Morse}(X)$ は、X 上のデファイナブル C^r 級関数全体の集合 $Def^r(X)$ において、デファイナブル C^2 位相で開かつ稠密である。

基礎体が実数体 $\mathbb{R}$ のときは、定理 3.6 の同変版が知られている ([9], [13])。以下の 3 つの結果を用いて、定理 3.6 を証明することができる。

補題 3.7 (e.g. [3]). $A \subset R^n$ をデファイナブル集合とし、$U_1, \dots, U_n$ を A のデファイナブル開集合で $\cup_{i=1}^n U_i = A$ とする。このとき、A のデファイナブル開集合 $W_1, \dots, W_n$ が存在して、各 i に対して、$cl_A(W_i) \subset U_i$ かつ $\cup_{i=1}^n W_i = A$ となる。ただし、$cl_A(W_i)$ は W_i の A における閉包を表すとする。

定理 3.8 ([2]). X を R^n のデファイナブル C^r 部分多様体とし、$0 \leqq r < \infty$ とする。F_1, F_2 を交わらない X のデファイナブル閉部分集合とする。このとき、デファイナブル C^r 関数 $h : X \to R$ が存在して、$h|F_1 = 0$, $h|F_2 = 1$ かつ $0 \leqq h \leqq 1$ となる。

以下の定理は、Sard の定理のデファイナブル版である。

定理 3.9 ([2]). X を R^s の m 次元デファイナブル C^r 部分多様体、Y を R^t の n 次元デファイナブル C^r 部分多様体とする。$f : X \to Y$ をデファイナブル C^r 写像とする。このとき、f の臨界値全体の集合は、n 次元未満のデファイナブル集合である。

順序極小構造を一般化した構造として、弱順序極小構造、局所順序極小構造、デファイナブル完備構造を考えることができる。弱順序極小構造は、[22], [21], [19] などで研究さている。局所順序極小構造は、[20], [12] などで研究さている。

実閉体の拡張 $\mathcal{L} = (R, +, \cdot, <, \dots)$ がデファイナブル完備構造とは、空でない R の任意のデファイナブル部分集合 A に対して、$\sup A, \inf A \in R \cup \{\pm\infty\}$ となることである。デファイナブル完備構造は、[1], [6] などで研究さている。デファイナブル完備構造上のデファイナブル関数に対して、定理 2.6 のような中間値の定理、最大値・最小値の定理が成り立つ。

References

[1] M. Aschenbrenner and A. Fischer, *Definable versions of theorems by Kirszbraun and Helly*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **102** (2011), 468–502.

[2] A. Berarducci and M. Otero, *Intersection theory for o-minimal manifolds*, Ann. Pure Appl. Logic **107** (2001), 87–119.

[3] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[4] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[5] A. Fischer, *Smooth functions in o-minimal structures*, Adv. Math. **218**, (2008), 496–514.

[6] A. Fornasiero and T. Servi, *Definably complete Baire structures*, Fund. Math. **209** (2010), 215–241.

[7] T. Kawakami, *A transverse condition of definable C^rG maps*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. **61** (2011), 13–16.

[8] T. Kawakami, *Definable Morse functions in a real closed field*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. **62** (2012), 35–38.

[9] T. Kawakami, *Equivariant definable Morse functions on definable C^rG manifolds*, Far East J. Math. Sci. (FJMS) **28** (2008), 175–188

[10] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.

[11] T. Kawakami, *Every definable C^r manifold is affine*, Bull. Korean Math. Soc. 42 (2005), 165–167.

[12] T. Kawakami, K. Takeuchi, H. Tanaka and A. Tsuboi, *Locally o-minimal structures*, J. Math. Soc. Japan. 64 (2012), 783-797.

[13] T. Kawakami and H. Tanaka, *Equivariant definable Morse functions on definable $C^\infty G$ manifolds*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1718** (2010), 58-63.

[14] 松本幸夫, *Morse* 理論の基礎, 岩波書店, (2005).

[15] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, (1963).

[16] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[17] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[18] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[19] H. Tanaka and T. Kawakami, *C^r strong cell decompositions in non-valuational weakly o-minimal real closed fields*, Far East J. Math. Sci. (FJMS) **25** (2007), 417–431.

[20] C. Toffalori and K. Vozoris, *Notes on local o-minimality* MLQ Math. Log. Q. **55** (2009), 617–632.

[21] R. Wencel, *Topological properties of sets definable in weakly o-minimal structures*, J. Symbolic Logic **75** (2010), 841–867,

[22] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 109–116.