数理解析研究所講究録
第 1817 巻 2012 年 80-86

既約擬エルミート対称空間内の実形の分類について

東京理科大学理学部第二部数学科　坊向 伸隆
Nobutaka Boumuki
Department of Mathematics, Tokyo University of Science

1. 序

本稿では, 既約擬エルミート対称空間 G/R 内の実形 M の分類について考察する.

擬エルミート対称空間はエルミート対称空間を一般化した概念であり, 既約エルミート対称空間 G/K 内の実形 M は, 先ず, Jaffee[Ja2], [Ja3] によって非コンパクト型既約エルミート対称空間 G/K 内の実形 M が分類され, その後, Leung[Le] によってコンパクト型既約エルミート対称空間 G/K 内の実形 M も分類された. また, 実形 M は G/K 内の全実全測地的部分多様体 with $\dim_{\mathbb{C}} G/K = \dim_{\mathbb{R}} M$ であるため, 分類 [Le] と Takeuchi の全実全測地的部分多様体の分類 [Ta2] は同値となる. 従って, 既約擬エルミート対称空間 G/R 内の実形 M を分類する事は, 分類結果 [Ja2], [Ja3], [Le], [Ta2] の一般化を導くことになる.

2. 擬エルミート対称空間の定義

実形は部分多様体の一種であるため, それだけで意味を成すものではなく, 全空間があってはじめて意味を成す. 今回, 全空間として扱うものは既約擬エルミート対称空間である. 先ずは, 擬エルミート対称空間の定義を復習しておく:

定義 2.1 (cf. Berger [Be]). G を連結リー群, G/R をアフィン対称空間とする. この時, G/R が**擬エルミート**である

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}J$: G-不変複素構造 on G/R, ${}^{\exists}\mathsf{g}$: G-不変擬リーマン計量 on G/R
s.t. $\mathsf{g}(JX, JY) = \mathsf{g}(X, Y)$ for ${}^{\forall}X, Y \in T(G/R)$.

注意 2.1. (i) g は擬ケーラー計量になる. (ii) g が正定値 or 負定値の場合, G/R をエルミート対称空間という.

ここで, (擬) エルミート対称空間の例を挙げる (cf. 例 2.1). 例 2.1 に於いて, G/R の複素構造 J が元 $T \in \mathfrak{g}$ から誘導されている事に注目されたい (但し $\mathfrak{g}$ は G のリー代数を表す).

例 2.1. $G := SU(1+n) = \{g \in SL(1+n,\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{g} = g^{-1}\}$ と置く. 今より, (擬) エルミート対称空間 $(G/R, J, \mathrm{g})$ を構成しよう.

(Step 1) 先ず, アフィン対称空間 G/R を構成する. 写像 $\sigma : G \to G$ を

$$\sigma(g) := I_{1,n} \cdot g \cdot I_{1,n} \text{ for } g \in G, \quad I_{1,n} := \begin{pmatrix} -1 & O \\ O & I_n \end{pmatrix}$$

で定めると, σ はリー群 G の回帰的自己同形写像となり, その固定点集合 G^σ は

$$G^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} b & O \\ O & B \end{pmatrix} \in SL(1+n,\mathbb{C}) \,\middle|\, b \in U(1), B \in U(n) \right\} = S(U(1) \times U(n)).$$

従って, $R := S(U(1) \times U(n))$ と置くと, G/R はアフィン対称空間となる.[1]

(Step 2) 続いて, G/R 上の複素構造 J を構成する. 原点 $o \in G/R$ に於ける接空間 $T_o(G/R)$ は

$$T_o(G/R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & \cdots & z_n \\ -\overline{z}_1 & & & \\ \vdots & & O_n & \\ -\overline{z}_n & & & \end{pmatrix} \,\middle|\, z_p \in \mathbb{C} \right\}$$

である. よって,

$$T := \frac{\sqrt{-1}}{1+n} \begin{pmatrix} n & O \\ O & -I_n \end{pmatrix}$$

と置くと, $\operatorname{ad} T(X) = \sqrt{-1}X$ for ${}^\forall X \in T_o(G/R)$ が成立するので, 1 点 o での複素構造 J_o が次で得られる:

$$J_o := \operatorname{ad} T|_{T_o(G/R)}.$$

更に, $R = \{g \in G \mid \operatorname{Ad}(g)T = T\}$ だから, J_o を G/R 上の複素構造 J に拡張できる. ここで, $\operatorname{Ad}(g)X := g \cdot X \cdot g^{-1}$ for $X \in \mathfrak{g}$.

(Step 3) 最後に, $(G/R, J)$ 上の (擬) エルミート計量 g を構成する. 原点 o に於ける (擬) リーマン計量 g_o を次で定める: $X, Y \in T_o(G/R)$ に対して,

$$\mathrm{g}_o(X,Y) := \operatorname{Re}\bigl(\operatorname{Tr}({}^tX\overline{Y})\bigr).$$

すると, $\mathrm{g}_o(X,Y) = \mathrm{g}_o\bigl(\operatorname{Ad}(r)X, \operatorname{Ad}(r)Y\bigr)$ for ${}^\forall r \in R$ & $\mathrm{g}_o(J_oX, J_oY) = \mathrm{g}_o(X,Y)$ だから, g_o を $(G/R, J)$ 上の (擬) エルミート計量 g に拡張できる. 以上で, (擬) エルミート対称空間 $(G/R, J, \mathrm{g})$, $G/R = SU(1+n)/S(U(1) \times U(n))$, が構成された.

---

[1] $SU(1+n)/S(U(1) \times U(n))$ は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$.

3. 実形の定義

擬エルミート対称空間は擬ケーラー多様体である (cf. 注意 2.1-(i)). 実形は擬ケーラー多様体内の部分多様体の一種であると云える:

定義 3.1. (N, J, g) を擬ケーラー多様体, M を N の空でない部分集合とする. この時, M が (N, J, g) 内の**実形**である
$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}\widehat{f}$: (N, J, g) の回帰的反正則等長変換
s.t. M が $N^{\widehat{f}}$ の 1 つの連結成分に一致する.
ここで, $N^{\widehat{f}} := \{x \in N \mid \widehat{f}(x) = x\}$.

注意 3.1. (i) (N, J, g) の回帰的反正則等長変換 $\widehat{h}$ には, 一般に, $N^{\widehat{h}} = \emptyset$ となる場合や $N^{\widehat{h}}$ が 2 つ以上の連結成分から成る場合がある. (ii) 実形 M は多様体となり, 更に, 次の性質 (ii.1), (ii.2), (ii.3) をもつ (cf. 定理 5.1):

(ii.1) M は (N, J, g) 内の全実部分多様体であり, 誘導計量 $\mathrm{g}|_M$ は非退化;
(ii.2) M は (N, g) 内の全測地的部分多様体;
(ii.3) M は (N, J, g) 内のラグランジュ部分多様体.

ここで, (擬) エルミート対称空間内の実形の例を挙げておく:

例 3.1. $(G/R, J, \mathrm{g})$, $G/R = SU(1+n)/S(U(1) \times U(n))$, を例 2.1 の (擬) エルミート対称空間とする. 今より, G/R 内の実形を構成しよう. そのために, $(G/R, J, \mathrm{g})$ の回帰的反正則等長変換 $\widehat{\eta}$ を構成したい. 先ず, 写像 $\eta : G \to G$ を次で定める:

$$\eta(g) := {}^t g^{-1} \,(= \overline{g}) \text{ for } g \in G = SU(1+n).$$

すると, η はリー群 G の回帰的自己同形写像となり, $\eta(R) \subset R$ を満たす. そのため, 回帰的微分同形写像 $\widehat{\eta} : G/R \to G/R$ を次で定義できる:

$$\widehat{\eta}(gR) := \eta(g)R \text{ for } gR \in G/R.$$

この $\widehat{\eta}$ は反正則かつ等長的である. 実際,

$$J_o = \mathrm{ad}\, T|_{T_o(G/R)}, \quad T = \frac{\sqrt{-1}}{1+n}\begin{pmatrix} n & O \\ O & -I_n \end{pmatrix}$$

だから $\widehat{\eta}$ は反正則であり, $\mathrm{g}_o(X, Y) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{Tr}({}^t X \overline{Y})\big)$ だから $\widehat{\eta}$ は等長的でもある. $\widehat{\eta}$ の固定点集合は $SO(1+n)/S(O(1) \times O(n))$ となる.[2] よって, $(G/R, J, \mathrm{g})$ 内の実形 $SO(1+n)/S(O(1) \times O(n))$ が構成された.

[2] $SO(1+n)/S(O(1) \times O(n))$ は実射影空間 $\mathbb{R}P^n$.

既約擬エルミート対称空間の「既約」という用語を言い換えて (cf. 命題 4.1), その後, 定理 4.1 を紹介する.

命題 4.1 (cf. Shapiro [Sh]). G を連結単純リー群, G/R を擬エルミート対称空間とする. この時, 次は同値である:

$$G/R \text{ が既約} \iff \mathfrak{g} \text{ が既約実単純リー代数}.$$

ここで, $\mathfrak{g}$ は G のリー代数を表す.

定理 4.1 を述べるために, 記号 (n.1), (n.2) を準備しておく.

(n.1) $\mathcal{R}_G$: リー群 G の擬エルミート対称空間 G/R とその実形 M の組 $(G/R, M)$ 全体から成る集合, 但し G は連結単純リー群, その中心 $Z(G)$ は単位元のみ, そして, そのリー代数 $\mathfrak{g}$ は既約実単純とする.

(n.2) $d\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$: 既約実単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と, その半単純元 $T \neq 0$ で $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T$ の固有値が $\pm\sqrt{-1}$ or 0 となるもの, および $\mathfrak{g}$ の回帰的自己同形写像 η で $\eta(T) = -T$ を満たすものの組 $(\mathfrak{g}, T, \eta)$ 全体から成る集合.

定理 4.1 (cf. [Bo]). $\mathcal{R}_G/_{\simeq}$ から $d\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}/_{\sim}$ への $1:1$ 対応が存在する, 但し $\mathfrak{g}$ は G のリー代数とする. ここで, $\simeq$ と $\sim$ は次で定義された同値関係 (e.1) と (e.2) をそれぞれ表す:

(e.1) $(G/R_1, M_1) \simeq (G/R_2, M_2) \overset{\text{def.}}{\iff} {}^\exists f : G/R_1 \to G/R_2$, 正則相似変換 s.t. $f(M_1) = M_2$.

(e.2) $(\mathfrak{g}, T_1, \eta_1) \sim (\mathfrak{g}, T_2, \eta_2) \overset{\text{def.}}{\iff} {}^\exists \phi : \mathfrak{g}$ の自己同形写像 s.t. $\phi(T_1) = T_2$ & $\phi \circ \eta_1 = \eta_2 \circ \phi$.

定理 4.1 は「既約擬エルミート対称空間 G/R とその実形 M の組 $(G/R, M)$ は代数的な情報 $(\mathfrak{g}, T, \eta)$ から決まる」という事を示唆している. ここで $(\mathfrak{g}, T, \eta)$ の実例を挙げておく:

例 4.1. $(G/R, M) = \big(SU(1+n)/S(U(1) \times U(n)), SO(1+n)/S(O(1) \times O(n))\big)$ を例 3.1 の (擬) エルミート対称空間と実形の組とする.[3] これに対応する $(\mathfrak{g}, T, \eta)$ は

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1+n) = \{X \in \mathfrak{sl}(1+n, \mathbb{C}) \mid {}^t\overline{X} = -X\}, \\ T = \dfrac{\sqrt{-1}}{1+n} \begin{pmatrix} n & O \\ O & -I_n \end{pmatrix}, \\ \eta(X) := -{}^tX \; (= \overline{X}) \text{ for } X \in \mathfrak{g}. \end{cases}$$

[3] $Z(SU(1+n)) = \mathbb{Z}_{1+n}$ であるため, 正確には, 定理 4.1 の適応範囲外.

定理4.1より, 既約擬エルミート対称空間内の実形を分類するには, 同値関係 $\sim$ を除いて, 元 $(\mathfrak{g}, T, \eta) \in d\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ を全て決定すれば十分となる. 次の様にして $(\mathfrak{g}, T, \eta)$ は決定される:

(s.1) 任意の既約実単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその任意の回帰的自己同形写像 η を固定する;

(s.2) $\eta(T) = -T$ かつ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T$ の固有値が $\pm\sqrt{-1}$ or 0 となる $\mathfrak{g}$ の半単純元 T を全て求める.

任意のコンパクト単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と任意の回帰的自己同形写像 η を固定した場合, 次の様にして元 T が決定される (cf. Takeuchi [Ta1]): $\mathfrak{g}$ に於ける η の (-1)-固有空間 $\mathfrak{p}$ を考える,

$$\mathfrak{p} := \{Y \in \mathfrak{g} \,|\, \eta(Y) = -Y\}.$$

極大可換部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を取り, $\mathfrak{a}$ のワイル領域 $W_{\mathfrak{a}}$ 内から

「$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T$ の固有値が $\pm\sqrt{-1}$ or 0」

を満たす元 $T \neq 0$ を全て求める.

上記を実行してみよう:

例 4.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1+n)$, $\eta(X) = -{}^tX\ (= \overline{X})$ for $X \in \mathfrak{g}$ を固定した場合.

$$\mathfrak{p} = \left\{\sqrt{-1}Y \,\middle|\, Y \text{ は } (1+n) \text{ 次実対称行列 \& tr}Y = 0\right\},$$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \sqrt{-1}\begin{pmatrix} y_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & y_{1+n} \end{pmatrix} \,\middle|\, y_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{1+n} y_i = 0 \right\}.$$

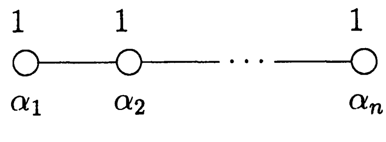
ここで $\alpha_p : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq n$, を

$$\alpha_p(A) := y_p - y_{p+1} \text{ for } A \in \mathfrak{a}$$

で定義し, ワイル領域 $W_{\mathfrak{a}}$ を次で定める:

$$W_{\mathfrak{a}} = \{A \in \mathfrak{a} \,|\, \alpha_p(A) \geq 0 \text{ for } 1 \leq {}^{\forall}p \leq n\}.$$

この $W_{\mathfrak{a}}$ 内から「$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T$ の固有値が $\pm\sqrt{-1}$ or 0」を満たす元 $T \neq 0$ を全て求める.
(制限) ルート系 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ のディンキン図式は



従って, $0 \neq T \in W_{\mathfrak{a}}$ に対して, 次が同値となる:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} T \text{ の固有値は } \pm\sqrt{-1} \text{ or } 0 \text{ である} \iff 1 \leq {}^{\exists}p \leq n \text{ s.t. } T = T_p.$$

そのため $T_1, T_2, \ldots, T_n$ が求める元となる. ここで $\{T_p\}_{p=1}^n$ は $\{\alpha_p\}_{p=1}^n$ の双対基底を表す.

$$T_p = \frac{\sqrt{-1}}{1+n}\begin{pmatrix} (1+n-p)I_p & O \\ O & -pI_{1+n-p} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq p \leq n.$$

これで, $\mathfrak{g}$ と η を固定した場合の $(\mathfrak{g}, T, \eta) \in d\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}$ が全て決定できた事になる. 因みに, $(\mathfrak{g}, T_p, \eta)$ に対応する元 $(G/R_p, M_p) \in \mathcal{R}_G$ は $G/R_p := SU(1+n)/S(U(p) \times U(1+n-p))$, $M_p := SO(1+n)/S(O(p) \times O(1+n-p))$ である.[4]

注意 4.1. $p=1$ の場合の $(G/R_p, M_p)$ が例 3.1 に対応している.

既約実単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の回帰的自己同形写像 η は, Berger[Be] により既に決定されている. それに従って $\mathfrak{g}$ と η を固定し, 例 4.2 の様にして元 T を全て求めれば, 既約擬エルミート対称空間 G/R 内の実形 M の分類が完成する (cf. [Bo]).

5. 余談

最後に, 実形と全実全測地的部分多様体の関係について述べる:

定理 5.1 (cf. [Bo]). $(G/R, J, \mathrm{g})$ を既約擬エルミート対称空間, M を G/R の部分集合とする, 但し $Z(G)$ は単位元のみから成り, M は原点 $o \in G/R$ を含むと仮定する. この時, 次の (i), (ii) は同値である:

(i) M は G/R 内の実形である;

(ii) M は G/R 内の連結, 全実かつ完備全測地的部分多様体 with $\dim_{\mathbb{C}} G/R = \dim_{\mathbb{R}} M$ であり, 誘導計量 $\mathrm{g}|_M$ が非退化.

References

[Be] M. Berger, *Les espaces symetriques noncompacts*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **74** (1957), 85–177.

[Bo] N. Boumuki, *The classification of real forms of simple irreducible pseudo-Hermitian symmetric spaces*, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[Ja1] H. A. Jaffee, *Real forms in Hermitian symmetric spaces and real algebraic varieties*, Thesis (Ph.D.)-State University of New York at Stony Brook, 1974.

[Ja2] H. A. Jaffee, *Real forms of hermitian symmetric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 456–458.

[Ja3] H. A. Jaffee, *Anti-holomorphic automorphisms of the exceptional symmetric domains*, J. Differential Geom. **13** (1978), no. 1, 79–86.

[Le] D. S. P. Leung, *Reflective submanifolds. IV. Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces*, J. Differential Geom. **14** (1979), no. 2, 179–185.

[Sh] R. A. Shapiro, *Pseudo-Hermitian symmetric spaces*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 529–548.

[4] G/R_p と M_p はそれぞれ複素と実グラスマン多様体.

[Ta1] M. Takeuchi, *Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **12** (1965), 81–192.

[Ta2] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 2, 293–314.