数理解析研究所講究録
第 1817 巻 2012 年 11-22

四元数射影空間の全複素部分多様体に関する四元数微分幾何

お茶の水女子大学・人間文化創成科学研究科　塚田　和美
Kazumi Tsukada
Graduate School of Humanities and Sciences
Ochanomizu University

F.E.Burstall, D.Ferus, K.Leschke, F.Pedit, and U.Pinkall([5]) の理論の高次元化の試みを次のような図式で考えたい:

	高次元化の試み	
$\mathbb{H}P^1$ の $GL(2,\mathbb{H})$-幾何 $= S^4$ の共形幾何	$\Rightarrow$	$\mathbb{H}P^n$ の $GL(n+1,\mathbb{H})$-幾何 $= \mathbb{H}P^n$ の四元数微分幾何
S^4 の曲面（リーマン面）	$\Rightarrow$	$\mathbb{H}P^n$ の半分次元 "複素部分多様体 "

複素微分幾何と四元数微分幾何が相互作用する四元数複素微分幾何学とでも呼ぶべき研究領域の中で考えたい.

§1 四元数多様体

〈 多様体上の四元数構造 〉

定義 1.1 M を $4n(n\geq 2)$ 次元多様体とし，Q を $\mathrm{End}\,TM$ の 3 次元部分束で次の条件を満たすものとする：

(a) M の各点 p に対して p の近傍 U で定義された Q の局所枠場 $\{I,J,K\}$ が存在して，次をみたす:

$$I^2=J^2=K^2=-\mathrm{id},\quad IJ=-JI=K,$$
$$JK=-KJ=I,\quad KI=-IK=J.$$

(b) 捩率零のアファイン接続 ∇ で, $\mathrm{End}\,TM$ の中で Q を平行にするものが存在する.

このとき，Q を M 上の**四元数構造**といい，Q を備えた多様体 M を**四元数多様体**という.
また条件 (b) をみたすアファイン接続 ∇ を Q **-接続**という.

注 四元数構造 Q に適合するリーマン計量 g をもちかつこのリーマン接続が $\mathrm{End}\,TM$ の中で Q を平行にするとき，(g,Q) を**四元数ケーラー構造** といい，(g,Q) を備えた多様体 M を**四元数ケーラー多様体**という.

与えられた四元数構造 Q に対し，Q -接続は一意的ではなく，次が成立する.

命題 1.2 ([1] Prop.5.1) ∇ を Q -接続とする．他の Q -接続 ∇' に対して，1-form ξ が存在して

$$
\begin{aligned}
\nabla'_X Y &= \nabla_X Y + \xi(X)Y + \xi(Y)X - \xi(IX)IY - \xi(IY)IX \\
&\quad -\xi(JX)JY - \xi(JY)JX - \xi(KX)KY - \xi(KY)KX
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

が成立する．逆に，1-form ξ に対し (1.1) で表せる ∇' は Q -接続である．

Q -接続は四元数構造 Q を調べるための道具として用いる．四元数構造 Q のみに依存し，Q -接続の選び方によらない性質，量を論ずる．

四元数構造 Q に自然に内積 $\langle , \rangle$ を導入できる．$p \in M, A, B \in Q_p$ に対し，$\langle A, B\rangle = -\frac{1}{4n}\mathrm{tr}(AB)$ とおく．局所枠場 $\{I, J, K\}$ は，この内積に関して正規直交枠場となる．また，Q -接続 ∇ は $\langle , \rangle$ に関して計量接続となる．局所枠場 $\{I, J, K\}$ に関する ∇ の接続形式を $(\omega_\alpha)_{\alpha=1.2,3}$ とおく．即ち

$$
\begin{aligned}
\nabla I &= \omega_3 \otimes J - \omega_2 \otimes K \\
\nabla J &= -\omega_3 \otimes I + \omega_1 \otimes K \\
\nabla K &= \omega_2 \otimes I - \omega_1 \otimes J
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

⟨ ツイスター空間 ⟩

(M, Q) を四元数構造 Q をもつ四元数多様体とする．

$$\mathcal{Z}_p = \{I \in Q_p | I^2 = -\mathrm{id}\} = \{I \in Q_p | \langle I, I\rangle = 1\}.$$

とおく．$\pi : \mathcal{Z} \to M$ は，M 上の S^2-束になる．$\mathcal{Z}$ を M の**ツイスター空間**と呼ぶ．

命題 1.3 (cf. [4] Thm 14.68) (M, Q) を $4n(n \geq 2)$ 次元四元数多様体とする．M のツイスター空間 $\mathcal{Z}$ は自然な複素構造 $I^{\mathcal{Z}}$ をもつ．$\pi : \mathcal{Z} \to M$ のファイバーはこの複素構造に関して，種数 0 のコンパクト複素曲線になる．

§2 四元数多様体の全複素部分多様体

$(\tilde{M}^{4n}, \tilde{Q})$ を，四元数構造 $\tilde{Q}$ をもつ $4n(n \geq 2)$ 次元四元数多様体とする．$\tilde{M}$ の埋め込まれた部分多様体 M^{2m} に対して，$\tilde{Q}|_M$ の切断 $\tilde{I}$ で (1) $\tilde{I}^2 = -\mathrm{id}$, (2) $\tilde{I}TM = TM$ をみたすものが存在するとき，M^{2m} を $\tilde{M}$ の**概複素部分多様体**という (cf. [2])．以下，M を $\tilde{M}$ の概複素部分多様体とする．$\tilde{I}$ を M に制限して得られる M の概複素構造を I で表す．$\tilde{Q}|_M$ は次のように分解される：

$$\tilde{Q}|_M = \mathbb{R}\tilde{I} + Q', \tag{2.1}$$

ここで $Q' = [\tilde{I}, \tilde{Q}|_M] = \tilde{I}$ の直交補空間．Q' の局所枠場 $\tilde{J}, \tilde{K}$ を選び，$\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ が $\tilde{Q}|_M$ の局所枠場で定義 1.1 の条件 (a) をみたすようにする．各点 $p \in M$ で，$\bar{T}_pM = T_pM \cap \tilde{J}(T_pM)$ とおく．$\bar{T}_pM$ は $T_p\tilde{M}$ の $\tilde{Q}$-不変部分空間, T_pM の I-不変部分空間になる．

$(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の $\tilde{Q}$-接続 $\tilde{\nabla}$ を 1 つ選ぶ．$\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ に対して，(1.2) で定まる接続形式を $(\omega_\alpha)_{\alpha=1.2,3}$ とおく．M 上の 1-form ψ を

$$\psi(X) = \omega_3(IX) - \omega_2(X) \qquad X \in TM \tag{2.2}$$

とおく.

命題 2.1 ([2] Thm 1.1) M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の概複素部分多様体とする.

(1) M に誘導された概複素構造 I が積分可能であるための必要十分条件は, M 上で $\psi = 0$.

(2) M の各点 p で, $\dim T_pM/\bar{T}_pM > 2$ であれば I は積分可能である.

[2] では, $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ が四元数ケーラーであることが仮定されているが, ケーラー性を仮定せずとも上記命題は成立する. 証明もほぼ同じ.

$\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{Z}} \to \tilde{M}$ をツイスター空間とする. $I^{\tilde{\mathcal{Z}}}$ を命題 1.3 で示された $\tilde{\mathcal{Z}}$ の複素構造とする. M^{2m} $(m \geq 2)$ を $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の概複素部分多様体とし, $\tilde{I} \in \Gamma(\tilde{Q}|_M)$ を対応する切断とする. $\tilde{I}$ は $\tilde{\mathcal{Z}}|_M$ の切断であり, $\tilde{I}$ は M から $\tilde{\mathcal{Z}}$ への埋め込みとみることができる. $\tilde{I}$ から誘導された M の概複素構造を I で表す.

命題 2.2 ([3] Thm 4.2) $\dim M = 2m \geq 4$ とする. このとき I が積分可能であるための必要十分条件は, $\tilde{I}$ が M から $\tilde{\mathcal{Z}}$ への正則埋め込みとなることである.

[3] では, $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ が四元数ケーラーであることが仮定されているが, ケーラー性を仮定せずとも上記命題は成立する.

概複素部分多様体 M^{2m} $(m \geq 2)$ の各点 p で, $\tilde{J} \in Q'_p$ (Q' は (2.1) で与えられている) に対し $\tilde{J}T_pM \cap T_pM = \{0\}$ が成立するとき, M を $(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の**全複素部分多様体** と呼ぶ. 命題 2.1 (2) によって $\tilde{I}$ から誘導された概複素構造 I は積分可能, 即ち (M, I) は複素多様体になる. また, $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ が四元数ケーラー多様体で各点 $p \in M$ で $\tilde{J} \in Q'_p$ に対し $\tilde{J}T_pM \perp T_pM$ が成立するとき, M を $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ の**直交的全複素部分多様体** と呼ぶ.

例 1. 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ は, 四元数ケーラー構造をもつリーマン対称空間である. [8] では, $\mathbb{H}P^n$ の対称部分多様体となる直交的全複素部分多様体を構成, 分類した. 即ち, 対称部分多様体となる直交的全複素部分多様体 $M^{2n} \subset \mathbb{H}P^n$ は次のいずれかと合同である.

(1) $\mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{H}P^n$ (totally geodesic),

(2) $Sp(3)/U(3) \hookrightarrow \mathbb{H}P^6$,

(3) $SU(6)/S(U(3) \times U(3)) \hookrightarrow \mathbb{H}P^9$,

(4) $SO(12)/U(6) \hookrightarrow \mathbb{H}P^{15}$,

(5) $E_7/E_6 \cdot T^1 \hookrightarrow \mathbb{H}P^{27}$,

(6) $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}/2) \hookrightarrow \mathbb{H}P^2$,

(7) $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times \mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \hookrightarrow \mathbb{H}P^3$,

(8) $\mathbb{C}P^1(\tilde{c}) \times SO(n+1)/SO(2) \cdot SO(n-1) \hookrightarrow \mathbb{H}P^n$ $(n \geq 4)$.

例 2. 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ のツイスター空間は, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ であり, この設定で $\mathbb{C}P^{2n+1}$ は正則接触構造を持つことが知られている ([4]). 直交的全複素部分多様体 $M^{2n} \subset \mathbb{H}P^n$ から $\mathbb{C}P^{2n+1}$ へのリフト $\tilde{I}(M)$ は $\mathbb{C}P^{2n+1}$ のルジャンドル部分多様体になる. 逆に, $\mathbb{C}P^{2n+1}$ のルジャンドル部分多様体を射影することにより, 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の直交的全複素部分多様体が得られる. Landsberg and Manivel ([7]) は K3 曲面をブローアップした曲面で $\mathbb{C}P^5$ にルジャンドル部分多様体として埋め込めるものが存在することを

示し，$\mathbb{C}P^{2n+1}$ $(n \geq 2)$ の非等質なコンパクトルジャンドル部分多様体の最初の例であることをコメントしている．この例を射影することにより，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^2$ の直交的全複素部分多様体が得られる．

以下では $\dim M = \frac{1}{2}\dim \tilde{M}$ となる全複素部分多様体について議論する．分解 (2.1) における Q' の局所枠場 $\tilde{J}, \tilde{K}$ を選び，$\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ が $\tilde{Q}|_M$ の局所枠場で定義 1.1 の条件 (a) をみたすようにする．$T^{\perp}M = \tilde{J}TM$ とおく．$T^{\perp}M$ は $\tilde{J}$ の選び方によらず定まり，$T\tilde{M}|_M$ の $\tilde{I}$ -不変部分束 となる．このようにして次の分解が得られる：

$$T\tilde{M}|_M = TM + T^{\perp}M \tag{2.3}$$

$(\tilde{M}, \tilde{Q})$ の $\tilde{Q}$-接続 $\tilde{\nabla}$ を１つ選ぶ．局所枠場 $\{\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}\}$ に対して (1.2) で定まる接続形式を $(\omega_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ とおく．命題 2.1 (1) によって，$\omega_2(X) = \omega_3(IX)$．分解 (2.3) によって $\tilde{\nabla}$ から M に誘導接続 ∇, 第２基本形式 σ が定義される．∇ は捩率零，σ は $T^{\perp}M$ に値をもつ対称テンソル場となる．M の複素構造 I によって σ を２つの成分 $(2,0)+(0,2)$ 成分 σ_+, $(1,1)$ 成分 σ_- に分解する．即ち

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_+ + \sigma_- \\ \sigma_+(IX, IY) = -\sigma_+(X,Y), &\qquad \sigma_-(IX, IY) = \sigma_-(X,Y), \quad X, Y \in TM. \end{aligned}$$

補題 2.3 (1) $\nabla I = 0$.
(2)

$$\begin{aligned} \sigma_-(X,Y) &= \frac{1}{2}\left\{\omega_2(X)\tilde{J}Y + \omega_3(X)\tilde{K}Y + \omega_2(Y)\tilde{J}X + \omega_3(Y)\tilde{K}X\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\tilde{I}(\tilde{\nabla}_X\tilde{I})Y + \tilde{I}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{I})X\right\} \end{aligned}$$

系 2.4 $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{g})$ をスカラー曲率が消えていない四元数ケーラー多様体とし，M^{2n} $(n \geq 2)$ を $\tilde{M}$ の全複素部分多様体とする．リーマン接続 $\tilde{\nabla}$ に関して定まる第２基本形式の $(1,1)$ 成分を σ_- とする．M が直交的であるための必要十分条件は，$\sigma_- = 0$ となることである．

別の $\tilde{Q}$-接続 $\tilde{\nabla}'$ に対して，$\tilde{M}$ 上の 1-form ξ が存在して $\tilde{\nabla}$ と $\tilde{\nabla}'$ とは (1.1) の関係で結ばれている．$\tilde{\nabla}'$ から誘導される M の接続を ∇', 第２基本形式を $\sigma', \sigma'_+, \sigma'_-$ とおく．このとき，次が成立する：

命題 2.5 (1) $\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \xi(X)Y + \xi(Y)X - \{\xi(IX)IY + \xi(IY)IX\}$
(2) $\sigma'_+(X,Y) = \sigma_+(X,Y)$
$\sigma'_-(X,Y) = \sigma_-(X,Y) - \{\xi(\tilde{J}X)\tilde{J}Y + \xi(\tilde{J}Y)\tilde{J}X + \xi(\tilde{K}X)\tilde{K}Y + \xi(\tilde{K}Y)\tilde{K}X\}$

命題 2.5 に関する注意をいくつか述べる．
(1) 複素多様体 M に導入された２つの接続 ∇, ∇' が命題 2.5 (1) の関係で結ばれているとき，∇' は ∇ の正則射影変形と呼ばれている（ cf [6]）．
(2) 命題 2.5 (2) によって，σ_+ は $\tilde{Q}$-接続によらない不変量であることが分かる．σ_+ を用いて，良いクラスの全複素部分多様体の特徴付けが得られることが望ましい．第５節でそのような定理を１つ与える（定理 5.4）．

(3) 一方 σ_- は，$\tilde{Q}$-接続に依存する．ただし，次のようなことは成立する．$M_1, M_2 \subset \tilde{M}$ を全複素部分多様体とし，1 点 p で $T_pM_1 = T_pM_2$ とする．この点で σ_- が一致するか否かは $\tilde{M}$ の $\tilde{Q}$-接続の選び方によらない．

§3 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の四元数構造，Q-接続

四元数 $n+1$ 項列ベクトル空間を $\mathbb{H}^{n+1}$ で表す．四元数による右からのスカラー乗法について四元数ベクトル空間と見る．四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の幾何学を四元数ベクトル束を用いて論ずる．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = \mathbb{H}P^n \times \mathbb{H}^{n+1}$ を $\mathbb{H}P^n$ 上の自明束，$L \subset \underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ を同語反復部分束とする．即ち

$$L = \{(l, v) \in \mathbb{H}P^n \times \mathbb{H}^{n+1} \mid v \in l\}$$

L は四元数直線束である．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ で商ベクトル束を表す．自然に四元数ベクトル束になる．$\pi_L : \underline{\mathbb{H}^{n+1}} \to \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ を射影とする．π_L は四元数ベクトル束の間の束準同型写像になる．$\mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ を各ファイバーにおける $\mathbb{H}$-線形写像からなる実ベクトル束とする．以下では，四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の接ベクトル束 $T\mathbb{H}P^n$ と $\mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ とは実ベクトル束として同型であることを見る．

d を $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の自明接続とする．$l \in \mathbb{H}P^n, v \in l$ に対して l の近傍で定義された L の切断 s を $s(l) = v$ となるように選ぶ．$X \in T_l\mathbb{H}P^n$ に対し $\alpha(X) : l \to \mathbb{H}^{n+1}/l$ を

$$\alpha(X)v = \pi_L(d_X s) \tag{3.1}$$

で定める．切断 s の選び方によらず定義される．また，$\alpha(X)$ は l から $\mathbb{H}^{n+1}/l$ への $\mathbb{H}$-線形写像である．

命題 3.1 上で定めた $\alpha : T\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ は実ベクトル束の束同型写像になる．

以下では，$\mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ を接ベクトル束 $T\mathbb{H}P^n$ と同一視して議論する．

$\mathbb{H}P^n$ の四元数構造 $Q \subset \mathrm{End}\, T\mathbb{H}P^n$ を次のように定める：$U \subset \mathbb{H}P^n$ を開集合，$s_0 \in \Gamma(L)$ を U 上で定義された零点を持たない L の局所切断とする．このとき，$T\mathbb{H}P^n \ni X \mapsto \alpha(X)(s_0) \in \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ は U 上で定義された束同型 $T\mathbb{H}P^n \to \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ となる．$\underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ は四元数ベクトル束ゆえ，この束同型を用いて $T\mathbb{H}P^n$ に四元数構造を導入する．即ち

$$X \in T\mathbb{H}P^n|_U \text{ に対し } \alpha(\tilde{I}X)(s_0) = (\alpha(X)(s_0))i,\ \alpha(\tilde{J}X)(s_0) = (\alpha(X)(s_0))j \text{ とおく}$$

さらに，$\tilde{K} = \tilde{I}\tilde{J}$ とおく．このとき，$\alpha(\tilde{K}X)(s_0) = (\alpha(X)(s_0))(-k)$ である．$\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ で $\mathbb{R}$ 上生成される $\mathrm{End}\, T\mathbb{H}P^n$ の 3 次元部分束を Q とおく．Q は局所切断 s_0 の選び方によらない．また，$GL(n+1, \mathbb{H})$ の作用で 四元数構造 Q は不変である．Q-接続については次が成立する：

定理 3.2 次の 1 対 1 対応が成立する：

$\mathbb{H}P^n$ （もしくはその開集合）上の Q-接続	$\leftrightarrow$	自明束 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の $\mathbb{H}$ ベクトル束としての直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c$

ここで L^c は同語反復直線束 L の補空間ベクトル束を表す．

上記定理 の右辺から左辺への対応を説明する： 自明束 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の分解

$$\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c \tag{3.2}$$

が与えられたとする． π_L を L^c に制限することにより，自然な同型 $L^c \cong \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L$ が得られ次の同型が導かれる：

$$T\mathbb{H}P^n \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, L^c)$$

d を $\underline{\mathbb{H}^{n+1}}$ の自明接続とし，分解 (3.2) に応じて d の分解を考える． $X \in \Gamma(T\mathbb{H}P^n), s \in \Gamma(L), \xi \in \Gamma(L^c)$ に対し

$$\begin{aligned} d_X s &= D_X s + \alpha(X)s \\ d_X \xi &= S_\xi X + D_X \xi \end{aligned}$$

ここで，D はそれぞれ L, L^c の $\mathbb{H}$-線形接続で，$\alpha : T\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(L, L^c)$ は束同型, $S : T\mathbb{H}P^n \to \mathrm{Hom}(L^c, L)$ は束準同型である．同型対応 $\alpha : T\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}(L, L^c)$ のもと， D から定まる $\mathbb{H}P^n$ のアファイン接続を ∇ で表す．即ち $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{H}P^n), s \in \Gamma(L)$ に対し

$$\alpha(\nabla_X Y)(s) = D_X(\alpha(Y)(s)) - \alpha(Y)(D_X s)$$

このとき，∇ は Q-接続になる．

例 1. アファイン座標: $\mathbb{H}^{n+1}$ の標準基底を $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ とし，その双対基底を $\{\theta^1, \cdots, \theta^{n+1}\}$ で表す． $M' = \{[v] \in \mathbb{H}P^n \mid \theta^1(v) \neq 0\}$ とおく． M' は $\mathbb{H}P^n$ の開集合． M' 上で $L^c = \{e_2, \cdots, e_{n+1}\}_{\mathbb{H}}$ とおく． M' 上での直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^c$ を得る．

M' 上に四元数座標 $\{z^\gamma\}_{\gamma=2,\cdots,n+1}$，実座標 $\{x_a^\gamma\}_{\gamma=2,\cdots,n+1,a=0,1,2,3}$ を次のように定める． $M' \ni l$ に対して， $v \in l$ を $\theta^1(v) = 1$ をみたすようにとる．このとき， $z^\gamma = \theta^\gamma(v)$ $(\gamma = 2, \cdots, n+1)$ とおく．このようにして， M' は $\mathbb{H}^n$ と同一視される．さらに $z^\gamma = x_0^\gamma + x_1^\gamma i + x_2^\gamma j + x_3^\gamma k$, $x_a^\gamma \in \mathbb{R}$ とおく． $\{x_a^\gamma\}_{\gamma=2,\cdots,n+1,a=0,1,2,3}$ は M' 上の実座標． M' の点 $\{z^\gamma\} = \{x_a^\gamma\}$ に対し，

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0^2 + x_1^2 i + x_2^2 j + x_3^2 k \\ \vdots \\ x_0^{n+1} + x_1^{n+1} i + x_2^{n+1} j + x_3^{n+1} k \end{pmatrix}$$

と表せ， v は M' 上の L の切断になる． $d_{\frac{\partial}{\partial x_a^\gamma}} v$ の計算により，

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_a^\gamma}} v = 0, \quad \alpha(\frac{\partial}{\partial x_a^\gamma})v = \begin{cases} e_\gamma \ (a=0), & e_\gamma i \ (a=1) \\ e_\gamma j \ (a=2), & e_\gamma k \ (a=3) \end{cases}$$

明らかに， $d_{\frac{\partial}{\partial x_a^\gamma}} e_\delta = 0$ であるから， $D_{\frac{\partial}{\partial x_a^\gamma}} e_\delta = 0$. これらより， $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_a^\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_b^\delta} = 0$. 即ち， $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ の標準接続に他ならない．

例 2. （擬）リーマン計量: $\langle , \rangle$ を $\mathbb{H}^{n+1}$ 上の非退化四元数エルミート内積とする． $M' = \{[v] \in \mathbb{H}P^n \mid \langle v, v \rangle \neq 0\}$ とおく． M' の点で， $\langle , \rangle$ に関する L の直交補空間 $L^\perp$ を考える．

M' 上直交直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^{\perp}$ を得る．また，$\langle , \rangle$ より，M' 上の（擬）リーマン計量 g が定義され，(M', Q, g) は四元数（擬）ケーラー多様体となる．さらに，直交直和分解 $\underline{\mathbb{H}^{n+1}} = L + L^{\perp}$ に対応する Q 接続は，g の（擬）リーマン接続となることが分かる．

§4 四元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の全複素部分多様体

最初に線形代数の準備をする．V, W を右からのスカラー乗法に関する四元数ベクトル空間とし，$\dim_{\mathbb{H}} V = 1, \dim_{\mathbb{H}} W = n$ とする．$\mathrm{Hom}(V, W)$ を $\mathbb{H}$-線形写像全体のなす実ベクトル空間とする．四元数構造 $Q \subset \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(V, W))$ を次のように定める：$v \in V, v \neq 0$ を 1 つとり固定する．このとき，$\mathrm{Hom}(V, W) \ni F \mapsto F(v) \in W$ は実線形同型写像となることに注意して，$I, J, K \in \mathrm{End}(\mathrm{Hom}(V, W))$ を

$$F \in \mathrm{Hom}(V, W) \text{ に対して } \quad (IF)(v) = F(v)i, (JF)(v) = F(v)j, K = IJ$$

とおき，I, J, K で $\mathbb{R}$ 上生成される $\mathrm{End}(\mathrm{Hom}(V, W))$ の部分空間を Q とおく．Q は $v \in V, v \neq 0$ の選び方によらず定まる．全複素部分多様体の定義と同様に，実部分空間 $U \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ が全複素部分空間であることが定義される．$\tilde{I} \in Q$ で $\tilde{I}^2 = -\mathrm{id}, \tilde{I}U = U$ をみたすものが存在し，さらに 任意の $\tilde{J} \in Q'$ に対し，$\tilde{J}U \cap U = \{0\}$ が成立するとき，U を全複素部分空間という．ここで，$Q' = [\tilde{I}, Q] = \{\tilde{J} \in Q \mid \tilde{I}\tilde{J} + \tilde{J}\tilde{I} = 0\}$．全複素部分空間 $U \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ で，$\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(V, W)$ を満たすとする．0 でない $\tilde{J} \in Q'$ に対し，$U^{\perp} = \tilde{J}U$ とおく．$U^{\perp}$ は $\tilde{J}$ の選び方によらず定まり，直和分解

$$\mathrm{Hom}(V, W) = U + U^{\perp}$$

を得る．次のような全複素部分空間の特徴付けが与えられる．

補題 4.1 ([5] Lemma 3 の高次元版) (1) $U \subset \mathrm{Hom}(V, W)$ を全複素部分空間で，$\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(V, W)$ とする．このとき，次の性質をみたす複素構造の組 $J_1 \in \mathrm{End}(V), J_2 \in \mathrm{End}(W)$ が存在する：

$$J_2 U = U, U J_1 = U, \ \ U = \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid J_2 F = F J_1\}$$

その上，そのような組は符号を除いて一意的である．

(2) 逆に複素構造の組 $J_1 \in \mathrm{End}(V), J_2 \in \mathrm{End}(W)$ が与えられたとき，

$$U = \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid J_2 F = F J_1\}$$

とおくと，U は $\mathrm{Hom}(V, W)$ の全複素部分空間で，$\dim_{\mathbb{R}} U = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(V, W)$ となる．また，

$$U^{\perp} = \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid J_2 F = -F J_1\}$$

が成立する．

多様体 M から $\mathbb{H}P^n$ への写像 f 及びその微分 df を ベクトル束の言葉で記述する：次の 1 対 1 対応が成立する：

$$\text{写像 } f : M \to \mathbb{H}P^n \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbb{H} \text{ 直線部分束} \\ L \subset \mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1} \end{array}$$

また，$T\mathbb{H}P^n \cong \mathrm{Hom}(L, \underline{\mathbb{H}^{n+1}}/L)$ であるので，df は実線形写像

$$\delta : TM \to \mathrm{Hom}(L, \mathcal{H}/L)$$

に対応している．命題 3.1 によって δ は次のように与えられる：$p \in M, X \in T_pM, \psi_0 \in L_p$ が与えられたとき，$\psi \in \Gamma(L)$ を $\psi(p) = \psi_0$ を満たすように選ぶ．このとき，$\delta_p(X)\psi_0 = \pi_L(d_X\psi)$.

$f : M \to \mathbb{H}P^n$ を複素 n 次元複素多様体からの全複素埋め込みとする．即ち，$\mathbb{H}P^n$ の全複素部分多様体で，M の複素構造 I と $\tilde{I} \in \Gamma(\tilde{Q}|_M)$ に対して，$df(IX) = \tilde{I}df(X)$，$X \in TM$ が成立している．この埋め込みに対して，$\delta_p : T_pM \to \mathrm{Hom}(L_p, (\mathcal{H}/L)_p)$ は単射で，その像 $\delta_p(T_pM)$ は，$\mathrm{Hom}(L_p, (\mathcal{H}/L)_p)$ の全複素部分空間となり，補題 4.1 が適用される．

例 4.2 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$: S を $\mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造とする．即ち，$S \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1}), S^2 = -\mathrm{id}.$ このとき，$S' = \{l \in \mathbb{H}P^n \mid Sl = l\}$ とおくと，S' は $\mathbb{H}P^n$ の全複素部分多様体で，n 次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に正則微分同型になる．

以下では，[5] において S-理論と呼ばれている理論の高次元化を試みる．$M \to \mathbb{H}P^n$ を複素 n 次元複素多様体からの全複素埋め込みとする．I を M の複素構造とし，M 上の（ベクトル空間に値をもつ）1-form ω に対して，$*\omega(X) = \omega(IX)$ とおき，$*\omega$ を定める．写像 $S : M \to \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ (or $S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$) は $S^2 = -\mathrm{id}$ を満たしているとする．このような S に対して，$\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ (or $\mathrm{End}\,\mathcal{H}$)) に値を持つ M 上の 1-forms A^+, A^- を次で定義する（[5] §5）

$$A^+ = \frac{1}{4}(SdS + *dS), \quad A^- = \frac{1}{4}(SdS - *dS). \tag{4.1}$$

全複素埋め込み $M \to \mathbb{H}P^n$ に対して，補題 4.1 を適用することにより，複素構造の組 $J_1 \in \Gamma(\mathrm{End}L), J_2 \in \Gamma(\mathrm{End}\mathcal{H}/L)$ で，$\delta(IX) = \delta(X)J_1 = J_2\delta(X)$ を満たすものが存在することが分かる．(J_1, J_2) を拡張して $\mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造 S を定義したい．即ち，$S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$ で $S^2 = -\mathrm{id}$ を満たし

$$SL = L, \quad S|_L = J_1, \quad \pi_L S = J_2\pi_L. \tag{4.2}$$

が成り立つものを考えたい．$S|_L = J_1, \pi_L S = J_2\pi_L$ 及び　$\delta(X)J_1 = J_2\delta(X)$ であることより，$dS(L) \subset L$ が導かれることに注意する．

定理 4.3 ([5] Theorem 2 の高次元版) M を $\mathbb{H}P^n$ の全複素部分多様体として埋め込まれた（複素）n 次元複素多様体とし，$L \subset \mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ を埋め込みに対応する $\mathbb{H}$ 直線部分束とする．このとき，次の条件を満たす複素構造 $S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$ がただ 1 つ存在する：

(1) $SL = L, \; dS(L) \subset L$

(2) $*\delta = \delta S = S\delta$

(3) $A^-|_L = 0$

定理 4.3 によって与えられる複素構造 $S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$ を全複素埋め込みの **Gauss 写像**と呼ぶ. Gauss 写像 S は $\mathbb{H}P^n$ の四元数構造のみによって定まり，$Q-$ 接続によらない．この S が $\mathbb{H}P^n$ の全複素部分多様体を論ずる際，有用であることが期待される.

$\mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造全体の集合を $\mathcal{S}$ で表す．即ち,

$$\mathcal{S} = \{ \ S \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1}) \mid S^2 = -\mathrm{id} \ \}.$$

$\mathcal{S}$ は $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ の $2(n+1)^2$ 次元閉部分多様体となる． $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ の点における接ベクトル空間と $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ との同一視のもと，$S \in \mathcal{S}$ における接ベクトル空間 $T_S\mathcal{S}$ は次で与えられる：

$$T_S\mathcal{S} = \{ \ X \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1}) \mid XS + SX = 0 \ \}.$$

$\mathcal{S}$ には自然に擬エルミート対称空間の構造が入る．以下，それを説明する．スカラー乗法を実数に制限することにより $\mathbb{H}^{n+1}$ を実ベクトル空間とみて，$F \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ を実線形変換と見る．実線形変換としてのトレースを $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}F$ で表す． $X, Y \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ に対し

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4(n+1)} \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(XY)$$

とおくと， $\langle , \rangle$ は $\mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ における不定値内積になる．この不定値内積 $\langle , \rangle$ から，$\mathcal{S}$ に擬リーマン計量が誘導される．この擬リーマン計量の符号数は $(n(n+1), (n+1)(n+2))$ (即ち標準形における正項の数が，$n(n+1)$ ，負項の数が，$(n+1)(n+2)$) である．また，$S \in \mathcal{S}, X \in T_S\mathcal{S}$ に対し，$JX = SX$ とおくと， J は $\mathcal{S}$ 上の複素構造になる．擬リーマン計量 $\langle , \rangle$ は J に対して不変である．即ち， $X, Y \in T_S\mathcal{S}$ に対し，$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ が成り立つ．このようにして定められた擬エルミート構造に関して，$(\mathcal{S}, \langle , \rangle, J)$ は擬エルミート対称空間になる．全複素埋め込み $M \to \mathbb{H}P^n$ に対する Gauss 写像 $S : M \to \mathrm{End}(\mathbb{H}^{n+1})$ を M から $\mathcal{S}$ への写像と見る．このとき，$A^+ = 0, A^- = 0$ はそれぞれ， S が反正則写像，正則写像であることを意味している.

§5 アファイン座標のもとでの S 理論

§3 例 1 で導入された $\mathbb{H}P^n$ のアファイン座標のもとで全複素部分多様体について論ずる. $M' \subset \mathbb{H}P^n$ をアファイン座標が導入されている開集合とする．M' は $\mathbb{H}^n$ と同一視され，ここでの四元数構造は $\mathbb{H}$ による右からのスカラー乗法によって与えられる．また，Q-接続として $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ の標準接続 $\tilde{\nabla}$ を考える．$M \to \mathbb{H}P^n$ を複素 n 次元複素多様体からの全複素埋め込みとし，その像は M' に含まれているとする．埋め込みに対応する $\mathbb{H}$ 直線部分束 $L \subset \mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ に対し，埋め込み $f : M \to \mathbb{H}^n$ が存在して $L = [\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}]$ と表せる．補題 4.1 を適用することにより，写像 $R : M \to \mathbb{H}$, $R^2 = -1$, $N : M \to \mathrm{End}(\mathbb{H}^n)$, $N^2 = -\mathrm{id}$ で

$$*df = Ndf = -dfR \tag{5.1}$$

を満たすものが一意的に存在することが分かる．また，各点 $p \in M$ で M の接ベクトル空間 $df(T_pM)$, 法空間 $T_p^{\perp}M$ は次で与えられる：

$$df(T_pM) = \{v \in \mathbb{H}^n \mid N(p)v = -vR(p)\}, \quad T_p^{\perp}M = \{v \in \mathbb{H}^n \mid N(p)v = vR(p)\} \tag{5.2}$$

標準接続 $\tilde{\nabla}$ から M に誘導される接続を ∇, 第2基本形式を σ で表す．このとき，次が成立する：

補題 5.1 $X, Y \in TM$ に対し，

(1) $*dR = RdR = -dRR$

(2) $dN \wedge df = df \wedge dR$ 即ち $dN(X)df(Y) - dN(Y)df(X) = df(X)dR(Y) - df(Y)dR(X)$

(3) $(*dN)(X)df(Y) = -NdN(X)df(Y) + 2Ndf(X)dR(Y)$

(4)

$$\begin{aligned}
N\sigma(X,Y) &= -\frac{1}{4}\{dN(X)df(Y) + dN(Y)df(X) + df(X)dR(Y) + df(Y)dR(X)\} \\
N\sigma_+(X,Y) &= \frac{1}{4}\{-dN(X)df(Y) - dN(Y)df(X) + df(X)dR(Y) + df(Y)dR(X)\} \\
N\sigma_-(X,Y) &= -\frac{1}{2}\{df(X)dR(Y) + df(Y)dR(X)\}
\end{aligned}$$

(4)' (4) の別表示.

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y) &= \frac{1}{2}\{(*df)(Y)dR(X) - dN(X)(*df)(Y)\} \\
\sigma_+(X,Y) &= -\frac{1}{2}\{dN(X)(*df)(Y) + (*df)(X)dR(Y)\} \\
\sigma_-(X,Y) &= \frac{1}{2}\{(*df)(X)dR(Y) + (*df)(Y)dR(X)\}
\end{aligned}$$

定理 4.3 の複素構造 S をアファイン座標のもとで求める．$\mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ の枠場 $\begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}, e_2, \cdots, e_{n+1}$ に関して S を行列表示する．即ち，$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & I_n \end{pmatrix}$ とおき，$S = GPG^{-1}$ という形で表す．$SL = L$ という条件より，

(5.3) $$SG = G\begin{pmatrix} -R & \eta \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad R \in \mathbb{H}, \ {}^t\eta \in \mathbb{H}^n, \ N \in \mathrm{End}(\mathbb{H}^n)$$

(5.4) $$S^2 = -I_{n+1} \iff R^2 = -1, \ R\eta = \eta N, \ N^2 = -I_n$$

(5.5) $$*\delta = \delta S = S\delta \iff *df(X) = Ndf(X) = -df(X)R, \ X \in TM$$

(5.6) $$dS = G\begin{pmatrix} -dR - \eta df & d\eta \\ 0 & df\eta + dN \end{pmatrix} G^{-1}$$

$$(5.7)\qquad 4A^{-} = SdS - *dS = G\begin{pmatrix} 2RdR - 2\eta df R & -Rd\eta + \eta df\eta + \eta dN - *d\eta \\ 0 & NdN - *dN \end{pmatrix} G^{-1}$$

$$(5.8)\qquad A^{-}|_L = 0 \iff dR = -\eta df$$

命題 5.2 定理 4.3 で定まる複素構造 S を (5.3) のように表したとき次が成立する：

$$dS = G\begin{pmatrix} 0 & d\eta \\ 0 & df\eta + dN \end{pmatrix} G^{-1}$$

$$4A^{+} = G\begin{pmatrix} 0 & -(d\eta)N + *d\eta \\ 0 & 2Ndf\eta + NdN + *dN \end{pmatrix} G^{-1},\ 4A^{-} = G\begin{pmatrix} 0 & -(d\eta)N - *d\eta \\ 0 & NdN - *dN \end{pmatrix} G^{-1}$$

また，第 2 基本形式について次が成立する：

$$2N\sigma_{-}(X,Y) = df(X)\eta df(Y) + df(Y)\eta df(X).$$

命題 5.3 アファイン座標のもとで，$\sigma_{-} = 0$ ならば，$A^{+} = 0$.

定理 5.4 M を $\mathbb{H}P^n$ に全複素部分多様体として埋め込まれた複素 n 次元複素多様体とする．M 上 $\sigma_{+} = 0$ ならば，$\mathbb{H}^{n+1}$ の複素構造 S が存在し，M はこの S から定まる $\mathbb{C}P^n$ の開部分多様体になる．

定理 5.4 の証明の概略 M に対して定まる $\mathcal{H} = M \times \mathbb{H}^{n+1}$ の $\mathbb{H}$直線部分束を L で表す．また，定理 4.3 によって唯一つ定まる $\mathcal{H}$ の複素構造を $S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$(あるいは$S : M \to \mathrm{End}\,\mathbb{H}^{n+1}$) とする．$M$ の各点に対しこの点 を含む $\mathbb{H}P^n$ のアファイン座標を導入して議論する．このとき，アファイン座標を用いて求めた σ_{+} も消えている（命題 2.5 の後の注意 (2)）．補題 5.1 を用いて議論することにより，$dS = 0$ を得る． 従って，S は M の点によらず一定．この S から 例 4.2 によって定まる複素射影空間を $\mathbb{C}P^n$ とする．$S(L) = L$ であったので，$M \subset \mathbb{C}P^n$．M と $\mathbb{C}P^n$ との次元の関係によって，M は $\mathbb{C}P^n$ の開部分多様体になることが分かる．

注意 5.5 定理 4.3 で定まる複素構造 S の幾何学的な意味：本節の始めの設定で考える．$p \in M$ を固定する．

$$S_p = G\begin{pmatrix} -R_p & \eta_p \\ 0 & N_p \end{pmatrix} G^{-1}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(p) & I_n \end{pmatrix}$$

S_p によって接ベクトル空間は定まる．即ち，$df(T_pM) = \{v \in \mathbb{H}^n \mid N_p v = -vR_p\}$．また，第 2 基本形式の $(1,1)$ 成分 σ_{-} も命題 5.2 で与えられた公式によって定まる．固定された S_p から定まる複素射影空間を S'_p で表す．即ち，$S'_p = \{l \in \mathbb{H}P^n \mid S_p l = l\}$．このとき，$S'_p$ は p を含み，この点での接ベクトル空間は，M の接ベクトル空間に一致し，かつ σ_{-} も一致することが上の議論から分かる．また，命題 2.5 後の注意 (3) により，σ_{-} が一致するのは，$\tilde{Q}$-接続の選び方によらない．文献 [5] では，$S^4 = \mathbb{H}P^1$ の 曲面 M に対して定まる複素構造 $S \in \Gamma(\mathrm{End}\,\mathcal{H})$ を **the mean curvature sphere** of M と呼んでいる．

参考文献

[1] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures*, Ann. Mat. Pura and Appl. 171(1996),205-273

[2] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *Hermitian and Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math. 38(2001), 869-904

[3] D.V.Alekseevsky and S.Marchiafava : *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold* , Annali di Mat. 184(2005),53-74

[4] A.L.Besse : *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, 1987,Berlin

[5] F.E.Burstall, D.Ferus, K.Leschke, F.Pedit, and U.Pinkall : *Conformal geometry of surfaces in* S^4 *and quaternions*, Springer Lecture Notes in Mathematics Vol.1772, Springer, Berlin,2002

[6] S.Ishihara : *Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold*, Tohoku Math. J. 9(1959), 273-297

[7] J.M.Landsberg and L.Manivel: *Legendrian varieties*, Asian J. Math.,11(2007), 341-360

[8] K.Tsukada : *Parallel submanifolds in a quaternion projective space*, Osaka J. Math. 22(1985), 187-241