数理解析研究所講究録
第1818巻 2012年 77-84

公的年金の数理モデル

法政大学・理工学部・経営システム工学科　浦谷　規
Tadashi Uratani
Department of Industrial & System Engineering
Faculty of Science & Engineering
Hosei University
慶應義塾大学・理工学部・管理工学科　小澤正典
Masanori Ozawa
Department of Administration Engineering
Faculty of Science & Technology
Keio University

1　はじめに

ほとんどの国の社会保障としての公的年金制度は，いわゆる「賦課方式」によって働けなくなった高齢者を社会全体で扶養する制度を半世紀をかけて確立してきた．しかし，先進国ばかりか発展途上国にまで予測される近年の少子高齢化現象は，以下のような，公的年金に対する疑問を若い人々に抱かさせるようになってきている.「公的年金は破綻しないか？」年金保険金が現在の高齢者に使われて，自分たちが高齢になったときは世代間扶養の美風はなくなって破綻してしまっているかもしれない．それならば,「公的年金を廃止し，民間保険へ移行した方がいいのではないか？」との疑問も生じる．そもそも年金は世代間扶養と所得再配分に意義があり，税に依存する生活保護制度と大きな違いがある．しかし，その破綻が心配される現在「若い人には年金加入の経済性はあるか？」あるいは，年金専門家一部には「若年層の非加入の増加はかえって給付者の給付増につながる」など種々の懸念や不安が広がっている．個人年金の数学的な問題点に関しては近年，Bayraktar[1] が従来のライフサイクル仮説による議論 [2] に反して，その経済的存在価値を理論的に疑問視しているが，その理論的および現実的妥当性は未だ定まっていない．本論文は，年金の理論的正当性よりむしろ、現在およそ１１０兆円あるとされる厚生年金積立金が経済状態の変化でいかに減少するか，さらにおよそ５０年後までの給付を行うための必要積立額はいくらかをオプションの複製戦略によって計算することを目的とする．さらに，公的年金のデータおよび政府のプログラムが [6] に公開されている資料から可能な限り現実的で単純なモデルを作ることを目標とした．政府プログラムにおける長期シミュレーションにおいて，経済変動プロセスを３つのパスの予測だけで終わっている．本研究では，経済変動プロセスを確率プロセスとしたモデルを構築するところに特徴がある．

論文の構成は，第２章で連続型の簡単な年金の経済モデルを定式化する．積立金の運用金利と標準報酬総額の被保険者一人当たり平均値の変化率，これを賃金上昇率とみなし，これら２つの変化率を確率プロセスとする．また，給付総額の受給者一人当たり平均値は賃金上昇率に近似的に等しいと [5] から推定されることも利用する．これらの変化率の確率過程を単純な Ornstein-Uhlenbeck プロセスと仮定して，積立金の分布を求める．積立金のコントロールプロセスを定義し政策変数を現状のままとして，年金の長期先の目標年の給付を確保する必要積立額を求めるオプションによる定式化を行う．第３章では，離散モデルである２項ツリーによるシミュレーションを行う．経済変動シナリオはインフレ率を確率変動する状態変数として，賃金上昇率と運用金利

の組合せた状態の確率的パスを構成する．状態数の増加は２項ツリーの分岐を５年毎とすることによって，６０年間までのシミュレーションを行う．最後に目標年までの給付を行うための初期の必要積立金を状態変数のケースごとにまとめた．

2 公的年金の経済モデル

公的年金の積立金と収支バランスの連続モデルを時点 0 から 目標時点 T までについて

$$dR(t) = r(t)R(t)dt + (u(a,t) - s(b,t))dt, \quad R(0) = R_0 \tag{2.1}$$

とする．ただし，$u(a,t)$ を t における年金保険料収入, $s(b,t)$ をそのときの年金給付総額とする．$R(t)$ は年金積立額でその初期値はを $R(0)$ とする．積立額の運用利率を $r(t)$ とする．

年金保険料収入は，保険料率を $a(t)$ とし被保険者の所得総額を $Z_1(t)$ とすると，

$$u(a,t) = a(t)Z_1(t)$$

と表せる．さらに， 被保険者数 $\xi_1(t)$ が人口予測 [3] から推定されるものとすると，$z_1(t)$ を一人当たり所得にすれば所得総額は

$$Z_1(t) = z_1(t)\xi_1(t)$$

と表される．また，一人当たり所得はその変化率 $x(t)$ によって決まるとする．

$$z_1(t) = z_1(0)\exp\{\int_0^t x(s)ds\} \tag{2.2}$$

年金給付総額は給付者数 $\xi_2(t)$ および，一人当たり給付額 $z_2(t)$ の積である．財政検証レポート [4] から一人当たり給付額は，およそ被保険者の所得と同じ変化率であるとみなせるので，

$$z_2(t) = z_2(0)\exp\{\int_0^t x(s)ds\} \tag{2.3}$$

と仮定する．$b(t)$ を年金給付カット率とするとそのときの年金給付総額は

$$s(b,t) = (1 - b(t))z_2(t)\xi_2(t)$$

である．年金総収入と総給付額の時点 t における収支は

$$\begin{aligned} u(a,t) - s(a,t) &= az_1(t)\xi_1(t) - (1 - b(t))z_2(t)\xi_2(t) \\ &= \{a(t)\xi_1(t)z_1(0) - (1 - b(t))\xi_2(t)z_2(0)\}\exp\{\int_0^t x(s)ds\} \end{aligned}$$

となるので，

$$\psi(t) = a(t)z_1(0)\xi_1(t) - (1 - b(t))z_2(0)\xi_2(t) \tag{2.4}$$

とおけば，

$$dR(t) = r(t)R(t)dt + \psi(t)\exp\{\int_0^t x(s)ds\}dt$$

である．この方程式の解は

$$R(T) = \exp\{\int_0^T r(s)ds\}\left(R(0) + \int_0^T \psi(t)\exp\{-\int_0^t [r(s) - x(s)]ds\}dt\right) \tag{2.5}$$

である．これにより，時点 T の積立額は，初期積立額と時点 t の収支バランスを積立金運用金利と所得増加率の差によって割り引いた額の総和を，時点 T まで元利合計をしたものになる．

2.1 変化率のプロセス

長期シミュレーションにおいて，賃金上昇率と運用金利は定常分布となる平均回帰プロセスを仮定する．これは，政府が予測したデータに観測される傾向である．運用金利プロセスが以下の平均回帰的確率プロセスとする．

$$dr(t) = k_r(\theta_r - r(t))dt + \sigma_r dW_r(t) \tag{2.6}$$

θ_r は長期的平均運用利率，k_r は平均回帰の強さ，σ_r は変動のボラティリティである．$W_r(t)$ はブラウン運動とする．このプロセスは $r(t) < 0$ にもなるが，運用金利が負であることは近年しばしば観測される状態である．また，一人当たり所得の変化率 $x(t)$ も，次の平均回帰する確率プロセスと仮定する．

$$dx(t) = k_x(\theta_x - x(t))dt + \sigma_x dW_x(t) \tag{2.7}$$

ただし，θ_x は長期的平均変化率，k_x はその平均回帰の強さ，σ_x は変動のボラティリティ，$W_x(t)$ はブラウン運動とする．また，ブラウン運動においては $d < W_r(t), W_x(t) >= \rho dt$ の相関があるものとする．(2.6) の解は初期値を $r(0)$ として，

$$r(t) = r(0)e^{-k_r t} + \theta_r(1 - e^{-k_r t}) + \int_0^t \sigma_r e^{k_r(s-t)} dW_r(s). \tag{2.8}$$

となり，運用金利のプロセス $r(t)$ は平均 $r(0)e^{-k_r t} + \theta_r(1 - e^{-k_r t})$ で分散 $\frac{\sigma_r^2}{k_r}(e^{k_r t} - e^{-k_r t})$ の正規分布に従う．同様に所得の成長率は

$$x(t) = x(0)e^{-k_x t} + \theta_x(1 - e^{-k_x t}) + \int_0^t \sigma_x e^{k_x(s-t)} dW_x(s). \tag{2.9}$$

となる．また

$$\begin{aligned}\int_0^t r(s)ds &= \theta_r t - \frac{1}{k_r}(r(t) - r(0)) + \frac{\sigma_r}{k} W_r(t) \\ &= \theta_r t + \frac{r(0) - \theta_r}{k_r}(1 - e^{-k_r t}) + \frac{\sigma_r}{k}\int_0^t (1 - e^{-k_r(s-t)})dW_r(s)\end{aligned}$$

であるから，(2.5) の第 1 項は対数正規分布に従う．

いま，簡単化のために平均回帰の強さが等しく $k = k_r = k_x$ とする．(2.5) の収支バランスの項の積立金変化率と所得変化率の差のプロセスは

$$\begin{aligned}r(s) - x(s) &= (r(0) - x(0))e^{-kt} + (\theta_r - \theta_x)(1 - e^{-kt}) + \int_0^t e^{k(s-t)}(\sigma_r dW_r(s) - \sigma_x dW_x(s)) \\ &= (r(0) - x(0))e^{-kt} + (\theta_r - \theta_x)(1 - e^{-kt}) + \nu\int_0^t e^{k(s-t)} dB(s)\end{aligned}$$

となる．ただし $\nu = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_x^2 - 2\rho\sigma_r\sigma_x}$ および $B(t)$ を標準ブラウン運動とする．

$$d(r(t) - x(t)) = k\left(\theta^* - (r(t) - x(t))\right)dt + \nu dB(t)$$

ただし $\theta^* = \theta_r - \theta_x$ とする．さらに

$$\int_0^t [r(s) - x(s)]ds = \theta^* t + \frac{r(0) - x(0) - \theta^*}{k}(1 - e^{-kt}) + \frac{\nu}{k}\int_0^t (1 - e^{-k(s-t)})dB(s) \tag{2.10}$$

となる．したがって，変化率が平均回帰プロセスに従い，回帰の強さが等しいとき (2.5) の収支バランスの項は，(2.10) から対数正規分布の $\psi(t)$ による加重平均和になる．

2.2 積立金のコントロールプロセス

リスク管理する年金の積立金を $S(t)$ とし，政府補助金を $\beta(t)$ とすると，保険料率 $a(t)$ とカット率 $b(t)$ によってコントロールされたダイナミックスは

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \psi(t)^{a,b}\exp\{\int_0^t x(s)ds\}dt + \beta(t)dt \tag{2.11}$$

である．(2.5) と同様にその解は

$$S(T) = \exp\{\int_0^T r(s)ds\}\left(S(0) + \int_0^T \psi(t)^{a,b}\exp\{-\int_0^t [r(s)-x(s)]ds\}dt + \int_0^T \beta(t)\exp\{-\int_0^t r(s)ds\}dt\right)$$

となる．従って，

$$\begin{aligned} S(T) - R(T) &= \exp\{\int_0^T r(s)ds\}(S(0) - R(0) + \int_0^T (\psi(t)^{a,b} - \psi(t))\exp\{-\int_0^t [r(s)-x(s)]ds\}dt \\ &+ \int_0^T \beta(t)\exp\{-\int_0^t r(s)ds\}dt) \end{aligned}$$

より，必要値は

$$\begin{aligned} S(0) &= R(0) + \exp\{-\int_0^T r(s)ds\}\,(S(T) - R(T)) - \int_0^T (\psi(t)^{a,b} - \psi(t))\exp\{-\int_0^t [r(s)-x(s)]ds\}dt \\ &- \int_0^T \beta(t)\exp\{-\int_0^t r(s)ds\}dt \end{aligned}$$

となる．コントロールを行わないときの，$\psi^{a,b}(t) = \psi(t), \beta(t) = 0$ の初期の必要積立額は

$$S(0) = R(0) + \exp\{-\int_0^T r(s)ds\}\,(S(T) - R(T))$$

である．

T における給付 $s(b,T)$ を支払うためのペイオフは

$$S(T) = \max(s(b,T), R(T)) = \max(s(b,T) - R(t), 0) + R(t)$$

であり，プットオプションのペイオフを $P(T) = \max(s(b,T) - R(T), 0)$ とすると

$$S(T) - R(T) = P(T) \geq 0$$

である．よって，初期の最小必要積立額は，裁定取引がないときには，同値マルチンゲール確率の集合を $\mathcal{M}$ とすると

$$S(0)^* = R(0) + \min_{Q\in\mathcal{M}} E_Q[\exp\{-\int_0^T r(s)ds\}P(T)] \tag{2.12}$$

となる．同値マルチンゲール確率の中から最小のものを選択する代わりに、次章では２項モデルとそのヘッジ戦略を求めることによってこの初期の最小必要積立金を求める．

3　2項モデルによるシミュレーション

財政再計算 [4] におけるシミュレーションは２１０５年までの期間に対して人口増加に対しては３つのシナリオを設定している．合計特殊出生率が２００５年の 1.26 に対して（１）出生高位 1.55（２）出生中位 1.26 （３）出生低位 1.06 を基礎とした被保険者と受給者数をそれぞれ推定している．

平均寿命についても３つのシナリオを設定している．２００５年の男性 78.53 年　女性 85.49 年であるのに対して，２０５５年にはそれぞれ（１）死亡高位として (82.41,89.17) （２）死亡中位として (83.67,90.34) （３）死亡低位として (84.93,91.51) 　と設定しているが，いずれも限界値に近いので中位を用いている．本論文では，死亡は中位とし３つの出生率のシナリオからの推定値をモデルの $\xi_1(t), \xi_2(t)$ とする．

経済シナリオに関して [4] は表３のようなシナリオを設定している．実質賃金上昇率は中位の年率 1.5%にプラスマイナス 0.4%の幅を設定し，実質運用利率も中位の年率 3.1%にプラスマイナスわずかに 0.1%, または 0.2%の幅によって設定している．インフレ率の２０５５年までの平均は３つのケースで等しく 1%である．このシナリオをシミュレーション開始２００８年からおよそ５０年間一定としたシナリオパスについて財政検証再計算はおこなっている．

本研究では，インフレ率の影響と以上の穏健なシナリオばかりではなく，極端なシナリオを含めた確率的シミュレーションを行うことを目的とした．つまり表１の経済中位と極端なシナリオの表２を組合せたシナリオに対してシミュレーションを行う．

表１：長期的経済シナリオ（単位%）

%	インフレ率	実質賃金上昇率	実質運用利率
シナリオ	p	x_l	r_l
経済高位	1.0	1.9	3.2
経済中位	1.0	1.5	3.1
経済低位	1.0	1.1	2.9

名目賃金上昇率は $x(t) = x_l + p$ であり，名目運用利率は $r(t) = r_l + p$ とする．従って，名目値で行うシミュレーションでは，名目賃金上昇率と名目運用利率は次の表３の通りとする．

3.1　シナリオの２項確率モデル

従来，シミュレーションは確率過程に対してはそのパスを何回も発生させてその期待値を求める方法がよく使われている．我々が用いる厚生労働省の年金プログラム [6] は，複雑な入出力と５万

表２：長期的極端な経済シナリオ（単位%）

%	インフレ率	実質賃金上昇率	実質運用利率
シナリオ	p	x_l	r_l
デフレ	-0.5	0.0	1.6
インフレ	3.0	1.5	3.1

表３：長期的シミュレーション名目経済シナリオ（単位%）

%	名目賃金上昇率	名目運用利率
経済中位	2.5	4.1
デフレ	-0.5	1.1
インフレ	4.5	6.1

行にも及ぶ膨大なプログラムであることから一つのパスの計算に我々の計算機 (Intel i7-3.5GHz) では，少なくとも２分は必要であった．従って，従来の分布に従う乱数の発生によるシミュレーションは実行可能ではない．そこで，最も単純な２項確率モデルを図１のように構成する．

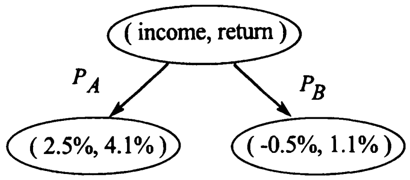

図１：名目賃金上昇率と名目運用利率の２項確率ツリー

表３のシナリオは経済中位がインフレ率1%のときでありインフレはインフレ率が3%，デフレはインフレ率が -0.5% のときである．図１では２項ツリーの上昇ケースはインフレが1%であり，その下降ケースはインフレ率が -0.5% である．つまり，$p_A = Prob(\omega_{up}) = Prob(p = 1\%)$,$p_B = Prob(\omega_{down}) = Prob(p = -0.5\%)$ である．従って，$x(\omega_{up}) = 2.5\%, r(\omega_{up}) = 4.1\%$，同様に $x(\omega_{down}) = -0.5\%, r(\omega_{down}) = 1.1\%$ である．

ところが (2.4) において被保険者数 $\xi_1(t)$ と受給者数 $\xi_2(t)$ が異なる比率で変化するために，積立金 $R(t)$ の２項ツリーは再結合しない．再結合しない２項ツリーは２のべき乗で時間とともに状態数が増加してしまう．我々がシミュレーションしようとする５０年から１００年間の状態数は計算不可能な数になる．

そこで，図２のような５年間は同じ状態が続いた後に，上昇か下落の２項確率が発生するモデルを考える．０のノードから５年間は式 (2.5) に従って，積立額 $R(t)$ をインフレ率上昇の場合とインフレ率下落の場合を計算する．５年後のノード１では上昇と下落の５年間の計算を進める．シミュレーションでは２０１５年から２０７５年まで６０年間の計算によって積立額 $R(T)$ を求めた．

3.2　必要積立額

目標年にそのときの給付が実行可能となる積立額を確保する必要積立額の確率プロセス $S(t)$ は，終端 T では

$$S(T) = \max(s(b,T), R(T))$$

である．オプション価格モデルの Backward calculation によってこれを求める．コントロールを行わない必要積立額のプロセスは (2.11) から上昇と下落を ω_u, ω_d とすると，時間間隔 Δt に対し

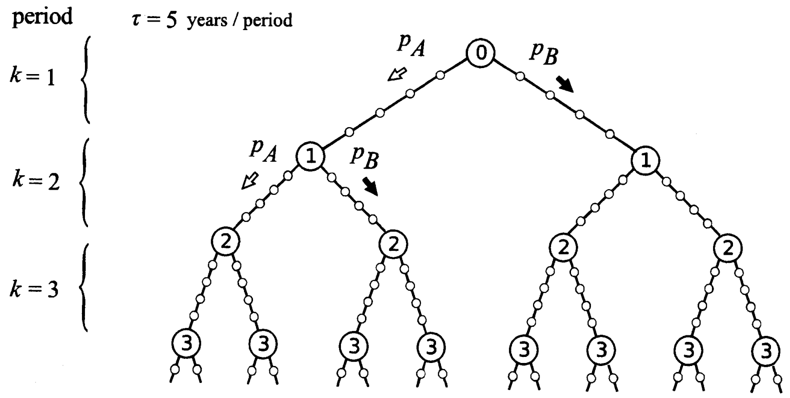

図２：５年ごとの分岐２項ツリー

て (2.12) に対するヘッジ戦略は連立方程式

$$\begin{cases} S(t+\Delta t, \omega_u) & = (1 + r(t,\omega_u)\Delta t)S(t) + \psi(t)e^{\int_0^t x(s)ds}(1 + x(t,\omega_u)\Delta t) \\ S(t+\Delta t, \omega_d) & = (1 + r(t,\omega_d)\Delta t)S(t) + \psi(t)e^{\int_0^t x(s)ds}(1 + x(t,\omega_d)\Delta t) \end{cases}$$

を満たす．ここで経済パラメターはインフレ率が状態変数であるとした表３の設定から

$$\Delta p(t) := r(t,\omega_u) - r(t,\omega_d) = x(t,\omega_u) - x(t,\omega_d)$$

とおけるから

$$S(t) = \frac{S(t+\Delta t,\omega_u) - S(t+\Delta t,\omega_d)}{\Delta p(t)\Delta t} - \psi(t)e^{\int_0^t x(s)ds} \tag{3.1}$$

となり，このようにして終端である $S(T)$ から時間をさかのぼって次々と $S(t)$ を求め，初期時点の必要積立額 $S(0)$ が求められる．図２においてこの Backward calculation は５年間隔で目標年から初期に遡り計算する．そのための精度の悪化は避けられない．しかしこの計算方法は，期待値が最小となる同値マルチンゲール測度を選択するという (2.12) の方法の近似でもある．

3.3 シミュレーション結果

２０１５年をシミュレーション開始年としそのときの厚生年金積立額を $R(0) = 1.40$（百兆円）とする．これは，財政検証レポートにおける 2015 年の推定積立残高である．平均寿命は中位とし，出生中位，高位，低位について２項ツリーによる計算結果を次の表４にまとめた．目標年を２０３５年，２０５５年、２０７５年とし、それぞれの年度までの給付を可能とする２０１５年における必要積立額を示している．経済変化の組合せのは (S,D),(I,D),(I,S) とし、(S,D) における S はインフレ率が中位の 1%の標準的経済シナリオが上昇ケースで D がインフレ率が −0.5% でデフレ経済シナリオが下落ケースを表す．また，(I,D) はインフレ率 3%のインフレ経済とデフレ経済シナリオの組合せであり，(I,S) はインフレ経済と中位インフレの標準経済の組合せを示す．

オプションのヘッジ戦略からの必要積立額の計算は，政策変数によって年金収支をコントロールしていないので，いずれの計算結果も必要積立額は予定額の１４０兆円に比べて大きすぎる値である．シミュレーションの目的は経済変動のシナリオを単一のパスで予測するのではなく２つのシナリオの確率的組合せの影響を考察することにあり，次のような傾向にまとめられる．

第１の 明らかな結果は，出生高位である場合はいずれの年度を目標にしても最も２０１５年の必要積立額が小さいことである．これは年金の保険料収入が被保険者数に依存することからである．

第２の結果はインフレーション I を含むシナリオ組合せは，必要積立額を減少することはない．インフレによって，賃金と運用利率を増加するとしても給付が賃金上昇率と連動しているので，必要積立額の減少には寄与しない．

第３に２０７５年まで厚生年金が給付可能となるための最小積立額の２０１５年の額は (S,D) であり，５年ごとに標準的経済状態とデフレ経済が組合わさる場合である．

表 4：2015 年の必要積立額　（単位　100 兆円）

	出生中位			出生高位			出生低位		
year	(S,D)	(I,D)	(I,S)	(S,D)	(I,D)	(I,S)	(S,D)	(I,D)	(I,S)
2035	2.38	2.63	3.03	2.26	2.49	2.87	2.51	2.77	3.19
2055	7.12	8.70	11.72	6.30	7.68	10.31	7.91	9.68	13.07
2075	13.12	17.64	27.30	10.79	14.40	22.62	15.15	20.45	32.46

References

[1] Bayraktar, E,M., Moore, K., Young, V, Minimizing the probability of lifetime ruin under borrowing constraints
Insurance: Mathematics and Economics 41(2007),196-221.

[2] Dutta J.; Kapur S.; Orszag J.M.. Source: Economics Letters, Volume 69, Number 2, November 2000 , pp. 201-206(6).

[3] National Institute of Population and Social Security Research, Annual report 2012.1,http://www.ipss.go.jp

[4] 平成２１年度財政検証結果レポートー「国民年金および厚生年金に係る財政の現状及び見通し」（詳細版）ー，厚生労働省年金局数理課，平成２２年３月　pp1-496

[5] 厚生年金・国民年金　平成１６年財政再計算結果，厚生労働省年金局数理課，平成１７年３月 pp1-451

[6] 財政検証年金プログラム http://www.mhlw.go.jp，厚生労働省年金局数理課，平成２２年３月