数理解析研究所講究録
第 1819 巻 2012 年 93-102

相互情報量の漸近的な表現について

宮本 拓歩
福島工業高等専門学校

1 序

自由エントロピー論は, Voiculescu により導入され, 作用素環論におけるいくつかの重要な問題を解決に導いている. 自由エントロピー自体の研究も進み, 論文 [3] において, 軌道自由エントロピーの概念が導入された. 日合-Petz は軌道自由エントロピーのアイデアをもとに, 古典確率論における相互情報量の新しい定義を与え, Boltzmann-Gibbs エントロピー (離散確率変数に対しては, Shannon エントロピー) との間に, 然るべき関係式が成り立つことを示した ([4]). 本稿では, 自由エントロピーの基本事項を確認した後, 軌道自由エントロピーを準備して, 論文 [3] の主結果の一つを述べる. この軌道アプローチの "離散化" として, 相互情報量が置換による微小状態集合の体積の log の漸近極限で表現されることを紹介する.

2 相互情報量

この節では, 本稿で中心的な役割を果たす相互情報量についてまとめておこう. (Ω, P) を古典確率空間とする. $(X_1, \dots, X_n)$ を (Ω, P) 上の古典実確率変数の n 個の組で, $X_i \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, P)$, $1 \le i \le n$ を満たすものとする. $\mu_{(X_1,\dots,X_n)}$ を $(X_1, \dots, X_n)$ の結合分布とする. また, 各 $1 \le i \le n$ に対して μ_{X_i} を X_i の分布とする. このとき, 積測度 $\mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n}$ に対する $\mu_{(X_1,\dots,X_n)}$ の**相対エントロピー (Kullback-Leibler ダイバージェンス)** は

$$S(\mu_{(X_1,\dots,X_n)}, \mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n}) := \begin{cases} \displaystyle\int \log \frac{\mathrm{d}\mu_{(X_1,\dots,X_n)}}{\mathrm{d}(\mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n})} \,\mathrm{d}\mu_{(X_1,\dots,X_n)} \\ \qquad\qquad \left(\mu_{(X_1,\dots,X_n)} \ll \mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n} \text{のとき}\right), \\ +\infty \qquad (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる. また, **Boltzmann-Gibbs エントロピー**は次のように定義される :

$$H(X_1, \dots, X_n) := \begin{cases} \displaystyle -\int_{\mathbb{R}^n} p(x_1, \dots, x_n) \log p(x_1, \dots, x_n) \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ \qquad\qquad \left(\mu_{(X_1,\dots,X_n)} \ll \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \;\&\; p := \frac{\mathrm{d}\mu_{(X_1,\dots,X_n)}}{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n} \text{のとき}\right), \\ -\infty \qquad (\text{その他}). \end{cases}$$

各 $1 \le i \le n$ について, $H(X_i) > -\infty$ のとき

$$S(\mu_{(X_1,\dots,X_n)}, \mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n}) = -H(X_1, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^{n} H(X_i) \tag{1}$$

が成り立つ. ところで, 二つの古典実確率変数 X, Y の**相互情報量**は

$$I(X;Y) := S(\mu_{(X,\ Y)}, \mu_X \otimes \mu_Y)$$

で定義される. ゆえに, X, Y が Boltzmann-Gibbs エントロピーが有限な古典確率変数であれば, 相互情報量は

$$I(X;Y) = -H(X,Y) + H(X) + H(Y) \tag{2}$$

と表現されることに注意しよう.

3 自由独立性

自由エントロピー論の話に移ろう. まずはじめに, 自由確率論を展開する枠組みをまとめておく. 非可換な確率空間は次のように代数的に定義される. $\mathcal{A}$ を単位元 1 を持つ $*$-環 (可換でもよい), φ を $\mathcal{A}$ 上の状態, つまり, 任意の $a \in \mathcal{A}$ に対し $\varphi(a^*a) \geq 0$, 及び $\varphi(1) = 1$ を満たす $\mathcal{A}$ 上の線形汎関数とする. このとき, 組 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を**非可換確率空間**という. 特に, $\mathcal{A}$ が C*-環のときは $(\mathcal{A}, \varphi)$ を **C*-確率空間**, $\mathcal{A}$ が von Neumann 環のときは φ を正規状態とし, $(\mathcal{A}, \varphi)$ を **W*-確率空間**という. また, W*-確率空間を考える場合, φ は忠実正規トレース状態とすることが多く, 本稿でも φ がトレースであることを仮定する. **非可換確率変数**は $\mathcal{A}$ の自己共役作用素 $a = a^*$ で与えられる.

例 3.1 (Ω, P) を確率空間とする.

- 期待値 $E(X) = \int_\Omega X(\omega)\ \mathrm{d}P(\omega)$ により, $(L^\infty(\Omega), E)$ は W*-確率空間である.
- M_N を $\mathbb{C}$ 上の $N \times N$-行列環, tr_N を M_N 上の正規化されたトレースとする. 任意の $1 \leq p < \infty$ に対して, p 次モーメントが有限である Ω 上の可測関数全体を L とする. すなわち, $L := \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\Omega)$. このとき, 成分が L の元である $N \times N$-行列 (これをランダム行列という) の全体 $M_N(L) = M_N \otimes L$ は $*$-環になる. M_N 上に τ_N を

  $$\tau_N(X) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(X_{ii}) = E(\mathrm{tr}_N(X))$$

  により定義すると, τ_N はトレースであり, $(M_N(L), \tau_N)$ は非可換確率空間となる.

次に, 自由確率論において最も基本的な概念の一つである自由独立性について述べる. 非可換確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi)$ において, $\mathcal{A}$ の (1 を含む) 部分環の族 $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ が**自由独立**であるとは, 任意の $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$, $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$ に対して,

$$a_j \in \mathcal{A}_{i_j},\ \varphi(a_j) = 0\ (1 \leq j \leq k) \Longrightarrow \varphi(a_1 a_2 \cdots a_k) = 0$$

であるときをいう. また, $\mathcal{A}$ の元の集合 $\{a_i\}_{i\in I}$ が自由独立であるとは, a_i と 1 で生成される部分環の族 $\{\mathrm{Alg}\,\langle a_i\rangle\}_{i\in I}$ が自由独立であるときをいう. $\mathcal{A}$ の元 $\{a_i\}_{i\in I}$ が自由独立であるとき, これらの元の混合モーメント $\varphi(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$ $(i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k)$ は各 a_i のモーメント $\varphi(a_i^m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ により決まることに注意する.

例 3.2 a, bを自由独立な$\mathcal{A}$の元とする.

- $\varphi((a-\varphi(a)1)(b-\varphi(b)1))=0$ より $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.
- $\varphi((a-\varphi(a)1)(b-\varphi(b)1)(a-\varphi(a)1))=0$ より $\varphi(aba)=\varphi(a^2)\varphi(b)$.
- 同様の計算より $\varphi(abab)=\varphi(a^2)\varphi(b)^2+\varphi(a)^2\varphi(b^2)-\varphi(a)^2\varphi(b)^2$.

したがって, 自由独立性とは個々の非可換確率変数のモーメントから混合モーメントを計算するルールを与えていると考えられ, 標語的に

"自由確率論 = 非可換確率空間 + 自由独立性"

と解釈することが可能である. 自由独立性の計算ルールは通常の古典確率論における (テンソル積) 独立性とは大きく異なっている. しかし, 自由確率論において, 古典確率論のアナロジーと考えることができる様々な現象を見ることができる. 例えば, 自由確率論においても中心極限定理などが成り立つ. ただし, 古典確率論における中心極限定理の極限分布の密度関数は正規分布 (Gauss 分布) となるが, 中心極限定理の自由確率論版では半円分布 (Wigner 分布) が現れる. これは, (テンソル積) 独立性と自由独立性の計算ルールの違いが顕著に表れる好例である.

この節の最後に, 古典確率論と自由確率論とのアナロジーをまとめておく.

	古典確率論	自由確率論
確率空間	(Ω, P)	$(\mathcal{A}, \varphi)$
確率変数	$X \in L^\infty(\Omega)$	$a=a^* \in \mathcal{A}$
期待値	$E(X)=\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega)$	$\varphi(a)$
独立性	(テンソル積) 独立性	自由独立性
極限定理	正規分布 (Gauss 分布)	半円分布 (Wigner 分布)

(Ω は測度空間, P は確率測度)

4 自由エントロピーと軌道自由エントロピー

本節では, Voiculescu により導入された自由エントロピーと日合-宮本-植田による軌道自由エントロピーの定義とその性質について述べる. $(\mathcal{M}, \tau)$ を W*-確率空間とする. $N\times N$-エルミート行列の全体を M_N^{sa} で表す. まず, M_N^{sa} 上に "Lebesgue"測度を導入しよう. M_N^{sa} は次の対応 Φ_N:

$$M_N^{sa} \ni A \longleftrightarrow \big((A_{ii})_{1\le i\le N},\ (\sqrt{2}\,\mathrm{Re}A_{ij})_{i<j},\ (\sqrt{2}\,\mathrm{Im}A_{ij})_{i<j}\big) \in \mathbb{R}^{N^2}$$

により自然にユークリッド空間 $\mathbb{R}^{N^2}$ と等距離同型になる. 今, $\mathbb{R}^{N^2}$ 上の Lebesgue 測度を $\lambda_{\mathbb{R}^{N^2}}$ としたとき, M_N^{sa} 上の "Lebesgue"測度 Λ_N を $\lambda_{\mathbb{R}^{N^2}}\circ\Phi_N$ によって定義する. すなわち,

$$\mathrm{d}\Lambda_N = 2^{N(N-1)/2}\prod_{i=1}^N \mathrm{d}A_{ii}\prod_{i<j}\mathrm{d}(\mathrm{Re}A_{ij})\,\mathrm{d}(\mathrm{Im}A_{ij}).$$

$(X_1,\ldots,X_n)$を$\mathcal{M}$の自己共役作用素のn個の組とする．各$N,m\in\mathbb{N}$, $\delta>0$と$0<R\le+\infty$に対して，$(X_1,\ldots,X_n)$の**微小状態の集合**$\Gamma_R(X_1,\ldots,X_n;N,m,\delta)$とは，$N\times N$-エルミート行列の$n$個の組$(A_1,\ldots,A_n)$で，

- 任意の$i=1,2,\ldots,n$に対して，$\|A_i\|_\infty\le R$；
- 任意の$1\le i_1,\ldots,i_r\le n$, $1\le r\le m$に対して，

$$|\mathrm{tr}_N(A_{i_1}\cdots A_{i_r})-\tau(X_{i_1}\cdots X_{i_r})|<\delta$$

を満たすnN^2次元ユークリッド空間$(M_N^{sa})^n$の部分集合をいう．$(X_1,\ldots,X_n)$の**自由エントロピー**$\chi(X_1,\ldots,X_n)$は，微小状態の集合$\Gamma_R(X_1,\ldots,X_n;N,m,\delta)$を"Lebesgue"測度$\Lambda_N^{\otimes n}$で測って，各パラメータ$N,m,\delta,R$の極限をとったものとして定義する：

$$\chi_R(X_1,\ldots,X_n;m,\delta):=\limsup_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N^2}\log\Lambda_N^{\otimes n}\left(\Gamma_R(X_1,\ldots,X_n;N,m,\delta)\right)+\frac{n}{2}\log N\right];$$

$$\chi_R(X_1,\ldots,X_n):=\inf_{m\in\mathbb{N},\,\delta>0}\chi_R(X_1,\ldots,X_n;m,\delta);$$

$$\chi(X_1,\ldots,X_n):=\sup_{R>0}\chi_R(X_1,\ldots,X_n).$$

以下で，自由エントロピーの基本的な性質をまとめておこう ([6, 7, 1]).

(1) $R\ge\max_{1\le i\le n}\|X_i\|_\infty$ならば$\chi_R=\chi$．また，$\chi=\chi_\infty$；

(2) $\chi(X_1,\ldots,X_n)\le\dfrac{n}{2}\log\dfrac{2\pi e\tau(X_1^2+\cdots+X_n^2)}{n}\ (<+\infty)$；

(3) (劣加法性) $\chi(X_1,\ldots,X_k,X_{k+1},\ldots,X_n)\le\chi(X_1,\ldots,X_k)+\chi(X_{k+1},\ldots,X_n)$；

(4) (上半連続性) $\mathcal{M}$の非可換確率変数のn個の組$(X_1^{(k)},\ldots X_n^{(k)})$の列が，$k\to\infty$のとき$(X_1,\ldots,X_n)$にモーメントの意味で収束しているとする．さらに，$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|X_i^{(k)}\|<+\infty$であるとき，

$$\chi(X_1,\ldots,X_n)\ge\limsup_{k\to\infty}\chi(X_1^{(k)},\ldots X_n^{(k)});$$

(5) (1変数の場合) μを非可換確率変数$X\in\mathcal{M}$の分布とする．このとき，

$$\chi(X)=\iint\log|s-t|\,\mathrm{d}\mu(s)\,\mathrm{d}\mu(t)+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\log(2\pi);$$

(6) $X_1,\ldots,X_n$が自由独立ならば，$\chi(X_1,\ldots,X_n)=\chi(X_1)+\cdots+\chi(X_n)$．さらに，各$i=1,2,\ldots,n$について$\chi(X_i)>-\infty$であるならば，逆も成り立つ．

性質(6)より，自由エントロピーは自由独立性に対して非常に良く振る舞うことがわかる．自由エントロピーが，自由確率論におけるエントロピーと呼ぶにふさわしい一端が見てとれる．自由エントロピーの定義において，行列空間のサイズNに対する極限の存在がわからないため，lim sup で代用している．このことにより，自由エントロピーは基本的な

性質でさえ成り立つかどうかわからない状況にある. 例えば, 二つの非可換確率変数の族 $X_1,\dots,X_k$ と $X_{k+1},\dots,X_n$ が自由独立であるとき,

$$\chi(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_n)=\chi(X_1,\dots,X_k)+\chi(X_{k+1},\dots,X_n)$$

が成り立つどうかわかっていない (一般には, $\limsup(a_n+b_n)=\limsup a_n+\limsup b_n$ が成り立たないことをイメージすると良い). しかしながら, 1 変数の場合の上記性質 (5) は大偏差原理を用いて証明されていて, パラメータ N に対する極限が存在することがわかっている.

ところで, 自由エントロピーの性質 (5) から, 一つの射影作用素 p に対して $\chi(p)=-\infty$ であるので, 劣加法性 (3) より, 射影作用素の n 個の組 $(p_1,\dots,p_n)$ に対する自由エントロピーは, いつでも $-\infty$ であることが分かる.

Voiculescu は論文 [8] において, 行列の微小状態集合を用いないアプローチ, すなわち非可換多元環上の微分子を用いて自由エントロピー χ^* を定義した. さらに, 論文 [9] において, Voiculescu はこの微小状態集合を用いないアプローチを発展させて, 部分環に対する自由相互情報量 i^* を導入し, これが特に射影作用素に対しても意味を持つことを言及した. そこでは, 射影作用素に対する微小状態集合を用いた自由エントロピーの定義を見直すことを提案し, そのアイデアについても言及している. このことをもとにして, 日合と植田は射影作用素にうまく適合した自由エントロピーを正確に定義し, その基本性質を調べた ([5]). さらに, この射影に対する自由エントロピーの定義を, 一般の非可換確率変数に拡張したものが軌道自由エントロピー χ_{orb} である ([3]). 以下で軌道自由エントロピーを準備しよう.

$\mathrm{U}(N)$ を $N\times N$-ユニタリ行列の群とし, $\gamma_{\mathrm{U}(N)}$ を $\mathrm{U}(N)$ 上の Haar 測度とする. $\mathbb{R}^N$ の元 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_N)$ で $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_N$ を満たすものの全体を $\mathbb{R}^N_{\geq}$ で表す. ここで, $(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N_{\geq}$ は対角成分が $(1,1)$-成分から $x_1,\dots,x_N$ の順で並ぶ対角行列と同一視できることに注意する. $(X_1,\dots,X_n)$ を $\mathcal{M}$ の自己共役作用素の n 個の組とする. 各 $N,m\in\mathbb{N}$ と $\delta>0$ に対して, $\Gamma_{\mathrm{orb},R}(X_1,\dots,X_n;N,m,\delta)$ を $N\times N$-ユニタリ行列の n 個の組 $(U_1,\dots,U_n)\in\mathrm{U}(N)^n$ で, ある対角行列 $D_1,\dots,D_n\in\mathbb{R}^N_{\geq}$ に対して,

$$(U_1D_1U_1^*\dots,U_nD_nU_n^*)\in\Gamma_R(X_1,\dots,X_n;N,m,\delta)$$

を満たすものの全体として定義する. このとき, $\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)$ を以下のように定義する:

$$\chi_{\mathrm{orb},R}(X_1,\dots,X_n):=\lim_{\substack{m\to\infty\\ \delta\searrow 0}}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\log\gamma_{\mathrm{U}(N)}^{\otimes n}(\Gamma_{\mathrm{orb},R}(X_1,\dots,X_n;N,m,\delta));$$
$$\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n):=\sup_{R>0}\chi_{\mathrm{orb},R}(X_1,\dots,X_n).$$

もう一つ自由エントロピー的な量を用意しよう. 各 $N\in\mathbb{N}$, $1\leq i\leq n$ に対して $\xi_i(N)\in M_N^{sa}$ を, $N\to\infty$ のときモーメントの意味で $\xi_i(N)$ が X_i に収束するように選び, 収束列 $\xi_i=\{\xi_i(N)\}$ の n 個の組 $(\xi_1,\dots\xi_n)$ を固定する (このような列はいつでもとれることに注意する). $\Gamma_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n:\xi_1(N),\dots,\xi_n(N);N,m,\delta)$ を $N\times N$-ユニタリ行列の n 個の組 $(U_1,\dots,U_n)\in\mathrm{U}(N)^n$ で,

$$(U_1\xi_1(N)U_1^*\dots,U_n\xi_n(N)U_n^*)\in\Gamma_\infty(X_1,\dots,X_n;N,m,\delta)$$

を満たすものの全体とする. このとき, $\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n:\xi_1,\dots,\xi_n)$ を

$$\begin{aligned}&\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n:\xi_1,\dots,\xi_n)\\&:=\lim_{\substack{m\to\infty\\ \delta\searrow 0}}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\log\gamma_{\mathrm{U}(N)}^{\otimes n}(\Gamma_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n:\xi_1(N),\dots,\xi_n(N);N,m,\delta))\end{aligned}$$

と定義する. この量は先に述べた日合-植田による射影作用素にうまく適合した自由エントロピー ([5]) の自然な一般化と見なすことができる.

2種類の自由エントロピー的な量を準備したが, これらの量は等しいことが示されている.

命題 4.1 ([3]) 近似列の n 個の組 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ の取り方によらずに,

$$\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)=\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n:\xi_1,\dots,\xi_n)$$

が成り立つ.

したがって, これらの量を同じ記号 χ_{orb} で表し, $\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)$ を $(X_1,\dots,X_n)$ の**軌道自由エントロピー**という.

χ_{orb} の性質として, χ と同様に劣加法性や上半連続性が成り立つ. さらに, $\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)\le 0$ であり, 任意の非可換確率変数 $X\in\mathcal{M}$ に対して $\chi_{\mathrm{orb}}(X)=0$ であることが定義より直ちにわかる.

軌道自由エントロピー χ_{orb} と自由エントロピー χ との間には以下のような関係式が成り立つ.

定理 4.2 ([3])

$$\chi(X_1,\dots,X_n)=\chi_{\mathrm{orb}}(X_1,\dots,X_n)+\sum_{i=1}^{n}\chi(X_i).$$

この定理より, $\chi(X),\ \chi(Y)>-\infty$ である二つの非可換確率変数 $X,\ Y\in\mathcal{M}$ に対して,

$$-\chi_{\mathrm{orb}}(X,Y)=-\chi(X,Y)+\chi(X)+\chi(Y)$$

という関係式が得られる. 2節の等式 (2) を思い出すと, $-\chi_{\mathrm{orb}}$ は古典確率論における相互情報量 I の自由確率論的対応物と見なすことができる.

5 "離散化"

日合-Petz は4節における軌道自由エントロピーのアイデアを古典確率論に応用することにより, 置換による微小状態の集合を用いて, 相互情報量の新しい定義を与えた. 以下で, 日合-Petz の結果について紹介しよう. まずはじめに, 記号を準備する. 以下では, $\mathbb{R}^N$ の元で昇べきの順に並べたものの全体を $\mathbb{R}^N_{\le}$ で表す. $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$ の平均値を $\kappa_N(\mathbf{x}):=N^{-1}\sum_{j=1}^N x_j$ で定義する. $(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)\in(\mathbb{R}^N)^n$, $\mathbf{x}_i=(x_{i1},\dots,x_{iN})\in\mathbb{R}^N$, $1\le i\le n$ に対して,

$$\mathbf{x}_{i_1}\cdots\mathbf{x}_{i_k}:=(x_{i_11}\cdots x_{i_k1},x_{i_12}\cdots x_{i_k2},\dots,x_{i_1N}\cdots x_{i_kN})\in\mathbb{R}^N$$

とする. 各 $N, m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ に対して, $\Delta(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ を $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN}) \in \mathbb{R}^N$ $(1 \le i \le n)$ の n 個の組 $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\mathbb{R}^N)^n$ ですべての $1 \le i_1, \dots, i_k \le n$, $1 \le k \le m$ に対して,

$$|\kappa_N(\mathbf{x}_{i_1} \cdots \mathbf{x}_{i_k}) - \mathbf{E}(X_{i_1} \cdots X_{i_k})| < \delta$$

を満たすもの全体とする. また, $R > 0$ に対して, $\Delta_R(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ を各 $1 \le i \le n$ について $\mathbf{x}_i \in [-R, R]^N$ を満たす n 個の組

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \Delta(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$$

とする. 次の結果は, Sanov の大偏差原理の応用として得られる.

命題 5.1 任意の $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $R \ge \max_{1 \le i \le n} \|X_i\|_\infty$ に対して, 極限

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \lambda_N^{\otimes n}(\Delta(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta))$$

が存在する. ここで, λ_N は $\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度である. さらに, Boltzmann-Gibbs エントロピーについて,

$$H(X_1, \dots, X_n) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ \delta \searrow 0}} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \lambda_N^{\otimes n}(\Delta(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta))$$

が成り立ち, これは $R \ge \max_{1 \le i \le n} \|X_i\|_\infty$ の取り方のよらない.

S_N を N 次対称群とする. $\mathbb{R}^N$ 上への S_N の作用は, $\sigma \in S_N$ と $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して,

$$\sigma(\mathbf{x}) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(N)})$$

で与えられる. 各 $N, m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $R > 0$ に対して, $\Delta_{\mathrm{sym},R}(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ を S_N の n 個の組 $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ で, ある $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\mathbb{R}^N_{\le})^n$ が存在して,

$$(\sigma_1(\mathbf{x}_1), \dots, \sigma_n(\mathbf{x}_n)) \in \Delta_R(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$$

を満たすもの全体とする. また, $\Delta_{\mathrm{sym},\infty}(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ は上の定義において, $\Delta_R(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ の代わりに $\Delta(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ を用いて定義されたものとする. このとき, 各 $R > 0$ に対して,

$$I_{\mathrm{sym},R}(X_1 \dots, X_n) := -\lim_{\substack{m \to \infty \\ \delta \searrow 0}} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \gamma_{S_N}^{\otimes n}(\Delta_{\mathrm{sym},R}(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta))$$
$$\bar{I}_{\mathrm{sym},R}(X_1 \dots, X_n) := -\lim_{\substack{m \to \infty \\ \delta \searrow 0}} \liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \gamma_{S_N}^{\otimes n}(\Delta_{\mathrm{sym},R}(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta))$$

と定義する. ここで, γ_{S_N} は S_N 上の一様確率測度である.

$$0 \le I_{\mathrm{sym},R}(X_1 \dots, X_n) \le \bar{I}_{\mathrm{sym},R}(X_1 \dots, X_n)$$

が成り立つことに注意する. $I_{\mathrm{sym},\infty}$ や $\bar{I}_{\mathrm{sym},\infty}$ も $\Delta_{\mathrm{sym},\infty}$ を用いて, 同様に定義する.

各 $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ に対して, $\xi_i(N) \in \mathbb{R}^N_{\leq}$ を, $N \to \infty$ のときモーメントの意味で $\xi_i(N)$ が X_i に収束するように選び (つまり, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $N \to \infty$ のとき $\kappa_N(\xi_i(N)^k) \to \mathbf{E}(X_i^k)$), その収束列 $\xi_i = \{\xi_i(N)\}$ を固定する. $\Delta_{\mathrm{sym}}(X_1, \dots, X_n : \xi_1(N), \dots, \xi_n(N); N, m, \delta)$ を N 次対称群の n 個の組 $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_N^n$ で,

$$(\sigma_1(\xi_1(N)) \dots, \sigma_n(\xi_n(N))) \in \Delta(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$$

を満たすものの全体とする. このとき,

$$\begin{aligned}
&I_{\mathrm{sym}}(X_1, \dots, X_n : \xi_1, \dots, \xi_n) \\
&\quad := -\lim_{\substack{m \to \infty \\ \delta \searrow 0}} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \gamma_{S_N}^{\otimes n}(\Delta_{\mathrm{sym}}(X_1, \dots, X_n : \xi_1(N), \dots, \xi_n(N); N, m, \delta))
\end{aligned}$$

と定義する. また, $\bar{I}_{\mathrm{sym}}(X_1, \dots, X_n : \xi_1, \dots, \xi_n)$ は上の定義で, lim sup の代わりに lim inf を用いて定義されたものとする. このとき, 上で定義された量は次の命題の意味で等価となる.

命題 5.2 ([4]) $R \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|_\infty$ と近似列の n 個の組 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ の取り方によらずに,

(1) $I_{\mathrm{sym},\infty}(X_1 \dots, X_n) = I_{\mathrm{sym},R}(X_1 \dots, X_n) = I_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n : \xi_1, \dots, \xi_n)$

(2) $\bar{I}_{\mathrm{sym},\infty}(X_1 \dots, X_n) = \bar{I}_{\mathrm{sym},R}(X_1 \dots, X_n) = \bar{I}_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n : \xi_1, \dots, \xi_n)$

が成り立つ.

したがって, 上の命題において, (1) における等価な量を $I_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n)$, (2) における等価な量を $\bar{I}_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n)$ で表し, それぞれ $(X_1 \dots, X_n)$ の**相互情報量**, **上相互情報量**という. この "相互情報量" という用語は以下の定理で正当化される.

定理 5.3 ([4])

$$\begin{aligned}
H(X_1, \dots, X_n) &= -I_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n H(X_i) \\
&= -\bar{I}_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n H(X_i).
\end{aligned}$$

証明の概略を述べよう. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^N$ について, $i \neq j$ のとき $s_i \neq s_j$ であれば, ある $\sigma \in S_N$ とある $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N_{\leq}$ が存在して, 一意的に $\mathbf{s} = \sigma(\mathbf{x})$ と書ける. よって, λ_N-測度 0 の閉集合を除いて, 次の対応が得られる:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^N & \cong & \mathbb{R}^N_{\leq} \times S_N \\
\mathbf{s} & \longleftrightarrow & (\mathbf{x}, \sigma) \\
\lambda_N & \longleftrightarrow & \lambda_N|_{\mathbb{R}^N_{\leq}} \otimes (S_N \text{ 上の個数測度})
\end{array}$$

この対応のもとで, 各$m \in \mathbb{N}$と$\delta > 0$に対して, ある$m' \in \mathbb{N}$と$\delta' > 0$が存在して, 十分大きなNについて,

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}(\Delta_R(X_i; N, m', \delta') \cap \mathbb{R}^N_{\le})\Big) \times \Delta_{\mathrm{sym},R}(X_1, \dots, X_n; N, m', \delta')$$

の元$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \sigma_1, \dots, \sigma_n)$で, ある$(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \in (\mathbb{R}^N_{\le})^n$が存在して

$$(\sigma_1(\mathbf{y}_1), \dots, \sigma_n(\mathbf{y}_n)) \in \Delta_R(X_1, \dots, X_n; N, m', \delta')$$

となるものをとると, $(\sigma_1(\mathbf{x}_1), \dots, \sigma_n(\mathbf{x}_n)) \in \Delta_R(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)$ であることがわかる. よって,

$$\sum_{i=1}^{n} H(X_i) - I_{\mathrm{sym}}(X_1, \dots, X_n) \le \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \lambda_N^{\otimes n}(\Delta_R(X_1, \dots, X_n; N, m, \delta)).$$

逆の不等式は, より簡単であるから省略する.

自由エントロピーはBoltzmann-Gibbsエントロピーの自由確率論的対応物であり, 微小状態の集合については, $\mathbb{R}^N$-ベクトル, N次対称群がそれぞれ, 自由確率論における$N \times N$-エルミート行列とユニタリ群$\mathrm{U}(N)$に対応している. この対応関係から, 日合-Petzによる相互情報量の新しい定義が, 自由確率論における軌道アプローチの "離散化" と呼ぶにふさわしいものであることがわかる.

2節の等式 (1) に注意すると, 次の系が得られる.

系 5.4 各$1 \le i \le n$について$H(X_i) > -\infty$であるとき,

$$I_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n) = \bar{I}_{\mathrm{sym}}(X_1 \dots, X_n) = S(\mu_{(X_1, \dots, X_n)}, \mu_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{X_n})$$

が成り立つ.

以上の議論は, Boltzmann-Gibbsエントロピーの代わりにShannonエントロピーを用いても, 同様の結果が導かれる. 最後に, 本稿では詳しく述べないが, この日合-Petzの研究を推し進めて, 日合-宮本 ([2]) は置換からなる離散微小状態の集合を用いてポテンシャルに対する相互圧力を導入し, この相互圧力と通常の圧力および相互情報量との間に成り立つ関係式を見出だしている.

参考文献

[1] Belinschi, S. T. and Bercovici, H., A property of free entropy, *Pacific J. Math.* **211** (2003), no. 1, 35–40.

[2] Hiai, F. and Miyamoto, T., A new approach to mutual information. II, Banach Center Publications **89** (2010), 143–163.

[3] Hiai, F., Miyamoto, T. and Ueda, Y., Orbital Approach to Microstate Free Entropy, *Internat. J. Math.* **20** (2009), 227–273.

[4] Hiai, F. and Petz, D., A new approach to mutual information, Banach Center Publ. **78** (2007), 151–164.

[5] Hiai, F. and Ueda, Y., Notes on microstate free entropy of projections, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), no. 1, 49–89.

[6] Voiculescu, D., The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, II, *Invent. Math.* **118** (1994), 411–440.

[7] Voiculescu, D., The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, IV: Maximum entropy and freeness, in *Free Probability Theory*, D.V. Voiculescu (ed.), Fields Inst. Commun. **12**, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 293–302.

[8] Voiculescu, D., The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory, V: Noncommutative Hilbert transforms, *Invent. Math.* **132** (1998), 189–227.

[9] Voiculescu, D., The analogue of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory VI: Liberation and mutual free information, *Adv. Math.* **146** (1999), 101–166.