数理解析研究所講究録
第 1819 巻 2012 年 71-76

収縮射影法における作用素と射影の独立性

東邦大学・理学部　木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Faculty of Science, Toho University

1 はじめに

ヒルベルト空間における非拡大写像の不動点近似は, 不動点の存在定理と並んで非線形解析の中でも盛んに研究が進められている分野の一つである. 代表的な近似の方法として Mann 型や Halpern 型と呼ばれるアルゴリズムがある中, 2008 年に Takahashi-Takeuchi-Kubota はハイブリッド法と呼ばれる射影を用いたアルゴリズムを変形し, 後に収縮射影法と呼ばれる新しいアルゴリズムを提案した. この手法は, 従来のハイブリッド法や Halpern 型アルゴリズムと同様に, 与えられた点から最も近い不動点への強収束点列が得られるという特徴をもっている.

2008 年の収縮射影法による強収束定理はその後, さまざまな形で一般化がなされている. 代表的なものとして Takahashi-Zembayashi [9], Plubtieng-Ungchittrakool [7], Qin-Cho-Kang [8], Wattanawitoon-Kumam [11] 等が挙げられるが, これらはいずれも一様凸かつ一様滑らかなバナッハ空間への拡張であった.

2009 年, Kimura-Takahashi [5] は閉凸集合列の Mosco 収束の概念を用いた新しい証明法を提案し, 収縮射影法による点列の強収束性を証明した. この証明法は, バナッハ空間に仮定する条件をより弱いものにすることが可能になっただけでなく, 点列生成に利用される射影を, 不動点近似の対象となる作用素の性質と独立して選択できることを明らかにしている.

本稿ではこの独立性に注目し, バナッハ空間における二種類の射影, すなわち metric projection と generalized projection に対し, これらを混合して用いても点列の強収束性に近い性質が得られることを考察する.

Key words and phrases. Approximation, fixed point, relatively nonexpansive mapping, shrinking projection method, metric projection, generalized projection, Mosco convergence.
2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09.

2 準備

本節では, 次節で使用するいくつかの写像についての定義と性質を述べる.

本稿において登場する空間はすべて実バナッハ空間である. 回帰的で狭義凸かつ滑らかなバナッハ空間 E に対し, 2 変数関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を, $x, y \in E$ に対して

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

で定義する. ここで J は E 上の双対写像, すなわち, $y \in E$ に対し

$$Jy = \{y^* \in E^* : \|y\|^2 = \langle y, y^*\rangle = \|y^*\|^2\}$$

で定義されるものである. E が回帰的で狭義凸かつ滑らかな場合, J は E から E^* への一価写像であり, さらに全単射となることも知られている. このとき, J の逆写像 $J^{-1} : E^* \to E$ は E^* 上の双対写像 J^* と一致する.

E の空でない閉凸集合 C に対し, 写像 $S : C \to C$ が relatively nonexpansive [1, 2, 3, 6] であるとは, 次の 2 条件をみたすことをいう.

- S の不動点の集合は空でなく, S の漸近的不動点の集合と一致する;
- $x \in C$ と S の不動点 $z \in C$ に対して $\phi(z, Sx) \le \phi(z, x)$ が成り立つ.

ここで, $z \in C$ が S の不動点であるとは $z = Sz$ が成り立つことであり, $u \in C$ が S の漸近的不動点であるとは, u に弱収束する点列 $\{u_n\} \subset C$ が存在して, $\lim_{n\to\infty} \|u_n - Su_n\| = 0$ をみたすことである.

回帰的で狭義凸かつ滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸集合 C を考える. このとき任意の $x \in E$ に対し

$$\|p_x - x\|^2 = \inf_{p \in C} \|p - x\|^2$$

をみたす点 $p_x \in C$ が一意に存在する. x にこの p_x を対応させる写像を C に関する metric projection という. 一方,

$$\phi(\pi_x, x) = \inf_{p \in C} \phi(p, x)$$

をみたす $\pi_x \in C$ も一意に存在する. x にこの π_x を対応させる写像を C に関する generalized projection という. 本稿では, 空でない閉凸集合 C への metric projection および generalized projection をそれぞれ P_C と Π_C であらわす.

3 射影の独立性に関する考察

本節では, Kimura-Takahashi [5] の結果をもとに, relatively nonexpansive 写像族の共通不動点定理における射影選択の独立性を考察する.

最初の定理は metric projection を用いた収縮射影法による生成点列の強収束定理である.

定理 3.1 (Kimura-Takahashi [5]). 回帰的で狭義凸なバナッハ空間 E が, Fréchet 微分可能なノルムをもち, Kadec-Klee 条件をみたすとする. C を E の閉凸集合とし, $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C から C への relatively nonexpansive 写像の族で共通不動点の集合 F が空でないとする. $\{\alpha_n\}$ を閉区間 $[0,1]$ の数列で $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたすとする. $x \in E$ を任意にとり, 点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する. $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_\lambda x_n) \quad (\lambda \in \Lambda), \\
C_{n+1} &= \left\{ z \in C : \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \le \phi(z, x_n) \right\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x
\end{aligned}
$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ に強収束する.

この定理の証明では, 集合列 $\{C_n\}$ が Mosco 収束することを用いて, 次に示す Tsukada の定理 [10] から点列 $\{x_n\}$ の強収束性を示し, $\{y_n(\lambda)\}$ の定義を用いて極限が共通不動点となることを示す.

定理 3.2 (Tsukada [10]). E を回帰的かつ狭義凸なバナッハ空間で Kadec-Klee 条件をみたすものとし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸集合の列とする. このとき, $\text{M-}\lim_{n\to\infty} C_n = C_0$ が存在して空でないならば, 任意の $x \in E$ に対して $\{P_{C_n} x\}$ は $P_{C_0} x \in C$ に強収束する.

一方, Tsukada の定理に対応する generalized projection の結果として, 次の定理が得られている.

定理 3.3 (Ibaraki-Kimura-Takahashi [4]). E を回帰的かつ狭義凸で滑らかなバナッハ空間で Kadec-Klee 条件をみたすものとし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸集合の列とする. このとき, $\text{M-}\lim_{n\to\infty} C_n = C_0$ が存在して空でないならば, 任意の $x \in E$ に対して

$\{\Pi_{C_n}x\}$ は $\Pi_{C_0}x \in C$ に強収束する.

この定理を用いることで, 次の結果も得られる.

定理 3.4 (Kimura-Takahashi [5]). E, C, $\{S_\lambda\}$, F, $\{\alpha_n\}$ については定理 3.1 と同様とし, $x \in E$ を任意にとり, 点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する. $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_\lambda x_n) \quad (\lambda \in \Lambda), \\
C_{n+1} &= \left\{ z \in C : \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \leq \phi(z, x_n) \right\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &= \Pi_{C_{n+1}} x
\end{aligned}
$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F x \in C$ に強収束する.

これらの収束定理において, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, C_{n+1} の構成は $C_1, C_2, \ldots, C_n$ に依存していることに注意せよ. すなわち, x_{n+1} はそれ以前のステップにおける点列と集合列の構成方法につねに依存している. したがって, 点列の構成で用いる射影として, metric projection と generalized projection を混合して用いた場合, たとえ片方の写像の使用回数が有限回だったとしても, 収束性が自明ではない.

しかしながら, 証明を注意深く追っていくことによって次の定理が成り立つことがわかる.

定理 3.5. 回帰的で狭義凸なバナッハ空間 E が, Fréchet 微分可能なノルムをもち, Kadec-Klee 条件をみたすとする. C を E の閉凸集合とし, $\{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を C から C への relatively nonexpansive 写像の族で共通不動点の集合 F が空でないとする. $0 < \alpha < 1$ とし, $\{\alpha_n\}$ を閉区間 $[0, \alpha]$ の数列とする. また, I を自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合とする. $x \in E$ を任意にとり, 点列 $\{x_n\}$ を以下のように定義する. $x_1 \in C$, $C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
y_n(\lambda) &= J^*(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JS_\lambda x_n) \quad (\lambda \in \Lambda), \\
C_{n+1} &= \left\{ z \in C : \sup_{\lambda \in \Lambda} \phi(z, y_n(\lambda)) \leq \phi(z, x_n) \right\} \cap C_n, \\
x_{n+1} &= \begin{cases} P_{C_{n+1}} x & (n+1 \in I) \\ \Pi_{C_{n+1}} x & (n+1 \notin I) \end{cases}
\end{aligned}
$$

とする. このとき, 次のいずれかが成り立つ.

(i) I が有限集合のとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F x \in C$ に強収束する;
(ii) $\mathbb{N} \setminus I$ が有限集合のとき, $\{x_n\}$ は $P_F x \in C$ に強収束する;
(iii) I と $\mathbb{N} \setminus I$ がともに無限集合のとき, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i} : n_i \in I\}$ は $P_F x \in C$ に強収束し, $\{x_{m_j} : m_j \in \mathbb{N} \setminus I\}$ は $\Pi_F x \in C$ に強収束する.

証明は本質的に定理 3.1 や定理 3.4 と同様なので省略する. この結果は, 収縮射影法においては不動点を求める写像に, 点列生成で使用する射影が依存していないことだけではなく, 各ステップで採用する射影もそれ以降のステップに大きな影響を与えないことを示している.

同様の性質を従来のハイブリッド法による点列生成がもっているかどうかについては未解決だが, 非常に興味深い問題といえるであろう.

参考文献

[1] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[2] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **24** (2003), 489–508.

[3] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[4] T. Ibaraki, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operators in Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2003), 621–629.

[5] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[6] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[7] S. Plubtieng and K. Ungchittrakool, *Hybrid iterative methods for convex feasibility problems and fixed point problems of relatively nonexpansive mappings in*

Banach spaces, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art. ID 583082, 19.

[8] X. Qin, Y. J. Cho, and S. M. Kang, *Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces*, J. Comput. Appl. Math. **225** (2009), 20–30.

[9] W. Takahashi and K. Zembayashi, *Strong convergence theorem by a new hybrid method for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art. ID 528476, 11.

[10] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.

[11] K. Wattanawitoon and P. Kumam, *Strong convergence theorems by a new hybrid projection algorithm for fixed point problems and equilibrium problems of two relatively quasi-nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **3** (2009), 11–20.