京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学 KYOTO UNIVERSITY

Title	バナッハ空間における準非拡大写像に関する不動点定理 (独立性と従属性の数理 : 函数解析学の視点から)
Author(s)	茨木, 貴徳
Citation	数理解析研究所講究録 (2012), 1819: 59-64
Issue Date	2012-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/194633
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
第 1819 巻 2012 年 59-64

バナッハ空間における準非拡大写像に関する不動点定理
(FIXED POINT THEOREMS FOR GENERALIZED NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
名古屋大学情報連携統括本部†
(INFORMATION AND COMMUNICATIONS HEADQUARTERS, NAGOYA UNIVERSITY)

1. はじめに

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つことと定義する. 同様に, T が堅非拡大写像 (firmly nonexpansive mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty\rangle$$

が成り立つことと定義する. 堅非拡大写像ならば非拡大写像であることは容易にわかる. このとき, T の不動点 (fixed point) 全体の集合を $F(T)$ で表すこととする. 1975 年に Baillon は非拡大写像の不動点に関する Cesáro 平均を用いた次の定理を得た.

定理 1.1 ([4]). C をヒルベルト空間 H の空でない有界閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. このとき, C の任意の元 x に対して,

$$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は T の不動点へ弱収束する. このとき, C の任意の元 x に対して,

$$Qx = \operatorname*{w\text{-}lim}_{n\to\infty} S_n x$$

とおくと, Q は C から $F(T)$ の上への $Q^2 = Q$ となる, 非拡大写像で,

(1) $QT^n = T^n Q = Q,\ n \in \mathbb{N}$
(2) $Qx \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$

を満たす. ただし, $\overline{\mathrm{co}}\, A$ は A の凸包の閉包である.

この定理は, Baillon の非線形エルゴード定理として有名である. また, 非拡大写像の概念は距離射影 (metric projection) と呼ばれる概念と深い関わりを持つ. ここで, H から C の上への距離射影 (metric projection) P_C とは, 任意の H の元 x に対して次で定義される.

$$P_C x = \operatorname*{argmin}_{y\in C} \|x - y\|.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H10, Secondary 47H09, 47H07.
Key words and phrases. 準非拡大写像, 堅準非拡大写像, 不動点, 非線形射影, バナッハ空間.
† 2011 年 4 月より鶴岡工業高等専門学校 (Tsuruoka National College of Technology).

この距離射影は次の重要な性質を持っている．すなわち H の元 x と C の元 x_0 に対して, $x_0 = P_C x$ であることの必要十分条件は, 任意の C の元 y に対して

$$\langle x - x_0, x_0 - y \rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つことである．この性質を用いると P_C が非拡大写像になることがわかる．

一方, Baillon の非線形エルゴード定理はこの研究以降, 多くの研究者によってバナッハ空間で議論する研究が行われてきた ([3,5,6,8–10,19,23] を参照). 距離射影の概念はバナッハ空間の場合にも拡張される．バナッハ空間での距離射影 (metric projection) とサニー非拡大射影 (sunny nonexpansive retraction) の 2 つの射影は古くから知られていた. 1996 年に Alber [1] は第 3 の射影である準距離射影 (generalized projection) の概念を導入した．さらに近年, 茨木-高橋 [11,13] は第 4 の射影であるサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) の概念を導入した．これらバナッハ空間の非線形射影は, ヒルベルト空間と同様にそれぞれ非拡大の性質を持っていることも知られている ([2,11,13,24,25] を参照).

距離射影	$\Rightarrow$	距離写像 (metric operator)
準距離射影	$\Rightarrow$	擬非拡大写像 (relatively nonexpansive mapping)
サニー非拡大射影	$\Rightarrow$	非拡大写像 (nonexpansive mapping)
サニー準非拡大射影	$\Rightarrow$	準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping)

本論文では, 筆者らが近年研究してきた準非拡大写像を利用して, バナッハ空間での不動点定理の研究を行う．まず, 始めにバナッハ空間での新しい非拡大写像である堅準非拡大写像, 準非拡大写像及び関連する非線形射影であるサニー準非拡射影に関して議論する．次にこれらの写像に関する不動点定理を議論する．

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする．E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x+y\| < 2$ が成り立つことである．同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである．

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ．

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ．いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える．

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう．このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう．任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという．任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという．(2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという．このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう．

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([7,24,25] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;

(2) $x, y \in E$ と $x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$ に対して, $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$ である;
(3) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
すなわち, $x \neq y \Rightarrow Jx \cap Jy = \emptyset$;
(4) E が狭義凸であるための必要十分条件は,
$x^* \in Jx$, $y^* \in Jy$, $x \neq y \Rightarrow \langle x-y, x^*-y^* \rangle > 0$ である;
(5) E が回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる.
すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(6) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(7) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

3. 準非拡大写像とサニー準非拡大射影

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1,18,22] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x,y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y, z に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x-z, Jz - Jy \rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x,y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が堅準非拡大写像 (firmly generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して,

$$V(x, Tx) + V(Tx, p) \leq +V(x,p)$$

がつねに成り立つことと定義する ([12, 14] を参照). また, T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して,

$$V(Tx, p) \leq V(x,p)$$

がつねに成り立つことと定義する ([11, 13] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である. これらの写像に関しては次のような結果が得られている.

補助定理 3.1 ([12, 14]). C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C への堅準非拡大写像とする. このとき, T は準非拡大写像である.

補助定理 3.2 ([12–14]). C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C へ写像とする. このとき, T が堅準非拡大写像であることの必要十分条件は, 任意の C の元 x, y に対して,

$$\langle x - Tx, JTx - Jp \rangle \geq 0 \tag{3.1}$$

が成り立つことである.

C の元 p が T の 漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, $\{x_n\}$ が p に弱位相の意味で収束し $\lim_{n\to\infty}(x_n - Tx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の漸近的不動点の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. 漸近的不動点の集合に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.3 ([16,21]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T)$ が空集合でないとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \hat{F}(T)$ となる.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, $R^2 = R$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 3.4 ([11,13]). *E を滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R を E から D の上への射影とする. このとき, R がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の E の元 x と D の元 y に対して,*

$$\langle x - Rx, JRx - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかな狭義凸バナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([11,13] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の結果が知られている.

定理 3.5 ([20]). *E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.*

(1) *D はサニー準非拡大レトラクトである;*
(2) *JD は閉凸集合である.*

このとき, D は閉集合となる.

4. 不動点定理

本節では, 準非拡大写像及び堅準非拡大写像の不動点定理について考察する. まず, 初めに茨木-高橋 [16] は準非拡大写像の不動点集合に関して次の定理を得た.

定理 4.1 ([16]). *E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像する. このとき, $F(T)$ は E のサニー準非拡大レトラクトである.*

次に, 準非拡大写像に関する Baillon 型の非線形エルゴード定理を議論するがその前に以下の 2 つの補助定理が必要となる.

補助定理 4.2 ([17]). *E を回帰的で一様 Gâteaux 微分可能なノルムを持つ狭義凸バナッハ空間とし, D を E のサニー準非拡大レトラクトとする. R を E から D の上へのサニー準非拡大射影とすると, R はデミ閉 (demiclosed) となる. すなわち, E の点列 $\{x_n\}$ が x_0 へ強収束し, $\{Rx_n\}$ が y_0 へ弱収束するならば, $Rx_0 = y_0$ である.*

補助定理 4.3 ([15]). *E が滑らかで一様凸なバナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像とする. R を E から $F(T)$ の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, 任意の E の元 x に対して, 点列 $\{RT^n x\}$ は $F(T)$ の元へ強収束する.*

この 2 つの補助定理を利用すると堅準非拡大写像に関する Baillon 型の非線形エルゴード定理を得ることができた.

定理 4.4 ([17]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間とし, T を E から E への堅準非拡大写像で, $\hat{F}(T) = F(T)$ を満たすものとする. R を E から $F(T)$ の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, E の任意の元 x に対して, $\{T^n x\}$ は T の不動点へ弱収束する. このとき, E の任意の元 x に対して,

$$Qx = \operatorname*{w\text{-}lim}_{n\to\infty} T^n x$$

とおくと, Q は R から $F(T)$ の上への $Q^2 = Q$ となる, 準非拡大写像で,

(1) $QT^n = T^n Q = Q, \ n \in \mathbb{N}$

(2) $Qx \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$

を満たす. ただし, $\overline{\mathrm{co}}\,A$ は A の凸包の閉包である.

References

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.

[4] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[5] J. B. Baillon, *Comportement asymptotique des itérés de contractions non linéaires dans les espaces L^p*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), 157–159.

[6] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), no. 2-3, 107–116.

[7] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[8] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 229–249.

[9] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach space*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269–1281.

[10] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space*, Pacific J. Math. **112** (1984), 333–346.

[11] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007), 929–944.

[13] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[14] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonlinear operators of firmly nonexpansive type in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds.), Yokohama Publishers, 2009, 49–62.

[15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 21–32.

[16] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Contemp. Math., **513**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 169–180.

[17] T. Honda, T. Ibaraki and W. Takahashi, *Duality theorems and convergence theorems for nonlinear mappings in Banach spaces and applications*, Int. J. Math. Stat. **6** (2010), 46–64.

[18] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[19] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **103** (1984), 387–394.

[20] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[21] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[22] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[23] S. Reich, *Nonlinear evolution equations and nonlinear ergodic theorems*, Nonlinear Anal. **1** (1977), pp. 319–330.

[24] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[25] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[26] W. Takahashi, *Proximal point algorithms and four nonlinear mappings in Banach spaces*, The 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, March 27 - 31, 2009.

[27] W. Takahashi, *Equilibrium problems, nonlinear operators and fixed point theorems*, The 9th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, National Changhua University of Education, Changhua, Taiwan, July 16 - 22, 2009.