数理解析研究所講究録
第 1820 巻 2012 年 1-10

ハイブリッド写像の不動点定理と平均収束定理
Fixed point and ergodic theorems for hybrid mappings

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 47H25.
Keywords and phrases. 非拡大写像, nonspreading 写像, hybrid 写像, 不動点定理, 平均収束定理

概要

本稿では, 文献 [2] で得られた結果と文献 [1, 3, 4] で得られた結果の一部を紹介する。また, 一般化されたハイブリッド写像に関する一考察を述べる。

1 序論

ここでは, 文献 [2] と直接関係する先行研究を紹介しながら, 文献 [2] の結果との関係を概説する。

まず, 文献 [2] の先行研究として, 次の非拡大写像の不動点定理および平均収束定理が重要である。

定理 1.1 (Pazy [11]). H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を非拡大[*1]写像とする。このとき, $\{T^n x\}$ が有界となる $x \in C$ が存在するならば, T は不動点をもつ。つまり, $z = Tz$ となる $z \in C$ が存在する。

定理 1.2 (Baillon [5]). H, C, T は定理 1.1 と同じとする。さらに, T は不動点をもつと仮定し, $x \in C$ に対して, 点列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = x,\ z_2 = \frac{x + Tx}{2},\ z_3 = \frac{x + Tx + T^2 x}{3},\ \ldots \tag{1.1}$$

で定義する。このとき, $\{z_n\}$ は T の不動点に弱収束する。

定理 1.1 より, C が有界閉凸集合ならば, 非拡大写像 $T\colon C \to C$ は常に不動点を持つことがわかる。

[*1] 写像 $T\colon C \to C$ が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。ここで, $\|\cdot\|$ は H のノルムである。

最近, 非拡大写像とは異なる種類の写像に対しても, 定理 1.1 のような不動点定理や定理 1.2 のような平均収束定理が成り立つことが示された。それらを表にまとめてみると次の通りである。

写像 T	不動点定理	平均収束定理
[8] の意味で nonspreading*2	文献 [8]	文献 [10]
[14, 15] の意味で hybrid*3	文献 [14, 16]	文献 [15]

この中で特に, 高橋渉先生の講演 [14] は, [2] をまとめる直接的なきっかけを与えてくれたという意味で重要である。

文献 [2] では, これらの先行研究の結果を統一的に議論するため, λ-hybrid という写像を導入している。λ-hybrid 写像については, この後の 3 節で説明する。4 節の λ-hybrid 写像の不動点定理 (定理 4.1) は, 定理 1.1 および文献 [8, 14, 16] の不動点定理を統合したものである。また, λ-hybrid 写像の平均収束定理 (定理 4.3) は, 定理 1.2 および文献 [10, 15] の平均収束定理を統合したものになっている。

2 準備

以下, $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像とする。

C を H の空でない部分集合とする。写像 $T\colon C \to H$ の不動点の集合を, $F(T)$ で表す。つまり, $F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$ である。写像 $T\colon C \to H$ が擬非拡大 (quasi-nonexpansive) であるとは, $F(T)$ が空ではなく, すべての $x \in C$ と $z \in F(T)$ に対して, $\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$ が成り立とうときをいう。擬非拡大写像 $T\colon C \to H$ の不動点集合は閉凸であることが知られている。写像 $T\colon C \to H$ が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して, $\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$ が成り立とうときをいう。

C が閉凸のとき, 各 $x \in H$ に対して, $\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する。その点 z を $P_C(x)$ と表し, P_C を H から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶ。距離射影 P_C は堅非拡大であることが知られている。

---

*2 すべての $x, y \in C$ に対して, $2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - Ty\|^2 + \|y - Tx\|^2$ が成り立つとき, 写像 $T\colon C \to C$ は nonspreading [8] であるという。

*3 すべての $x, y \in C$ に対して, $3\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|x - Ty\|^2 + \|y - Tx\|^2$ が成り立つとき, 写像 $T\colon C \to C$ は hybrid [14, 15] であるという。

この節の最後に, Ray の定理 [12] を述べる。

定理 2.1 (Ray [12]). C を H の空でない閉凸部分集合とし, すべての非拡大写像 $T\colon C \to C$ が不動点をもつ[*4]と仮定する。このとき, C は有界である。

3 λ-hybrid 写像

本節では, λ-hybrid 写像の定義とその例を紹介する。以下, C を H の空でない部分集合とし, λ を実数とする。

写像 $T\colon C \to H$ が λ-hybrid である [2] とは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1-\lambda)\langle x - Tx, y - Ty\rangle \tag{3.1}$$

が成り立つときをいう。ここで, すべての $x, y \in H$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x - Tx, y - Ty\rangle = \|x - Ty\|^2 + \|Tx - y\|^2 \tag{3.2}$$

が成り立つことから, 式 (3.1) は

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - Ty\|^2 + \|y - Tx\|^2 - 2\lambda\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$

または

$$(2-\lambda)\|Tx - Ty\|^2 \leq (1-\lambda)\big(\|x - Ty\|^2 + \|y - Tx\|^2\big) + \lambda\|x - y\|^2 \tag{3.3}$$

と同値であることがわかるので, こちらを定義式と考えてもよい。

定義から, 次のことが容易にわかる。

- T が 0-hybrid 写像ならば, T は [8] の意味で nonspreading であり,
- T が 1/2-hybird 写像ならば, T は [15] の意味で hybrid であり,
- T が 1-hybrid 写像ならば, T は非拡大であり,
- T が不動点をもつ λ-hybrid 写像ならば, 擬非拡大であり,
- $\lambda > 1$ のとき, λ-hybrid 写像は恒等写像である[*5]。

λ-hybrid 写像のもっとも重要な例の一つが, 堅非拡大写像である。

[*4] このとき, C は, 非拡大写像に関して不動点性を持つという。

[*5] 式 (3.1) で $x = y$ のとき, $0 \leq 2(1-\lambda)\|x - Tx\|^2$ となることから容易にわかる。

例 3.1 ([2, Lemma 3.1]). T が堅非拡大写像で $0 \le \lambda \le 1$ ならば, T は λ-hybrid である。

[16, Theorem 5.8] では, 2/3-hybrid 写像を扱っている。

例 3.2 ([2, Example 3.3]). すべての $x, y \in C$ に対して

$$2\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 \tag{3.4}$$

が成り立つとする [16]。このとき, 写像 $T\colon C \to C$ は, 2/3-hybrid である。

証明. $x, y \in C$ とする。式 (3.4) より

$$2\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2$$

と

$$2\|Ty - Tx\|^2 \le \|y - x\|^2 + \|Ty - x\|^2$$

が成り立つ。これらの和を計算すると

$$\begin{aligned} 4\|Tx - Ty\|^2 &\le 2\|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2 \\ &= 3\|x - y\|^2 + \|Tx - Ty\|^2 + 2\langle x - Tx, y - Ty\rangle \end{aligned}$$

となり

$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2\left(1 - \frac{2}{3}\right)\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$

を得る。したがって, T は 2/3-hybrid である。 □

次の例が示す通り, λ-hybrid 写像は一般に連続とは限らない。

例 3.3 ([2, Example 3.4]). $\lambda \in [0, 1)$ に対して

$$\alpha = \frac{\lambda(1-\lambda) + \sqrt{2(1-\lambda)}}{1-\lambda^2}$$

とおく。このとき, $\alpha > 1$ となる[*6]。また, $B = \{x \in H : \|x\| \le \alpha\}$ とし, 写像 $T\colon H \to H$ を

$$Tx = \begin{cases} 0 & (x \in B); \\ x/\|x\| & (x \in H \setminus B) \end{cases}$$

で定義する。このとき, T は λ-hybrid である[*7]。

[*6] $\lambda \in [0, 1)$ のとき, $\alpha \ge \frac{\sqrt{2(1-\lambda)}}{1-\lambda^2} = \frac{\sqrt{2}}{(1+\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$ である。

[*7] 詳しくは, [2, Example 3.4] の証明を参照して欲しい。

4 不動点定理および平均収束定理

ここでは, 文献 [2] で得られた λ-hybrid 写像の不動点定理および平均収束定理を述べる。定理 1.1 および文献 [8, 14, 16] の結果を統合したものが次の定理 4.1 である。

定理 4.1 ([2, Theorem 4.1]). C を H の空でない閉凸部分集合, λ を実数, $T\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}x \tag{4.1}$$

で定義する。ここで $T^0 = I$ とする。もし, $\{T^n x\}$ が有界ならば, $\{z_n\}$ の弱収積点*8は T の不動点である。したがって, このとき, T は不動点をもつ。

定理 4.1 より, 直ちに次の系を得る。

系 4.2. C を H の空でない閉凸部分集合, λ を実数, $T\colon C \to C$ を λ-hybrid 写像とする。このとき, C が有界ならば, T は不動点をもつ。

次の平均収束定理は, 定理 1.2 および文献 [10, 15] の結果を統合したものである。

定理 4.3 ([2, Theorem 5.2]). C を H の空でない閉凸部分集合, λ を実数, $T\colon C \to C$ を不動点をもつ λ-hybrid 写像, P を H から $F(T)$ の上への距離射影, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.1) で定義する。このとき, $\{z_n\}$ は $\{PT^n x\}$ の極限に弱収束する。

定理 4.1 および次の補助定理を使い, 定理 4.3 を証明してみよう。

補助定理 4.4 ([2, Lemma 5.1]). C を H の空でない閉凸部分集合, λ を実数, $T\colon C \to C$ を擬非拡大写像, P を H から $F(T)$ の上への距離射影, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.1) で定義する。このとき, 次が成り立つ。

(1) 点列 $\{PT^n x\}$ は強収束する。
(2) $\{z_n\}$ のすべての弱収積点が不動点であるならば, $\{z_n\}$ は $\{PT^n x\}$ の極限に弱収束する。

---
*8 $\{z_n\}$ の弱収束する部分列の極限

定理 4.3 の証明. 写像 T は擬非拡大だから, $\{T^n x\}$ は有界である。実際, u を T の不動点とすると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|T^n x\| \leq \|T^n x - u\| + \|u\| \leq \|x - u\| + \|u\|$$

である。よって, 定理 4.1 より, $\{z_n\}$ のすべての弱収積点は T の不動点である。したがって, 補助定理 4.4 により, $\{z_n\}$ は $\{PT^n x\}$ の極限に弱収束することがわかる。 □

5 定義域の不動点性と有界性

次の定理より, λ-hybrid 写像の定義域について, 不動点性と有界性が同値になることがわかる。

定理 5.1 ([2, Theorem 6.2]). C を H の空でない閉凸部分集合, $\lambda \in [0,1]$ とし, すべての λ-hybrid 写像 $T\colon C \to C$ が不動点をもつ[*9]と仮定する。このとき, C は有界である。

定理 5.1 で $\lambda = 1$ の場合が Ray の定理 (定理 2.1) であるから, 定理 5.1 は Ray の定理の一般化であるが, その証明は次の定理 (Ray の定理から得られる) を使うと容易である。

定理 5.2. C を H の空でない閉凸部分集合とし, すべての堅非拡大写像 $T\colon C \to C$ が不動点をもつと仮定する。このとき, C は有界である。

証明. 非拡大写像 $S\colon C \to C$ が与えられたとき, 写像 T を $T = (I + S)/2$ で定義する。すると, T は C から C への写像で, 堅非拡大であり[*10], さらに $F(T) = F(S)$ であることが容易に確認できる。仮定より, $F(T) \neq \emptyset$ であるから, $F(S) \neq \emptyset$ である。よって, 任意の非拡大写像 S が不動点をもつ。したがって, 定理 2.1 より C は有界である。 □

例 3.1 より, $\lambda \in [0,1]$ のとき, すべての堅非拡大写像は λ-hybrid であるから, 定理 5.2 より, 定理 5.1 が得られる。

6 λ-hybrid 写像の研究のその後

ここでは, λ-hybrid 写像に関するその他の研究結果を紹介する。また, λ-hybrid 写像の一般化についての一考察を述べる。

[*9] このとき, C は, λ-hybrid 写像に関して不動点性を持つという。

[*10] 例えば, [6, Theorem 12.1] を参照するとよい。

6.1 その他の結果

文献 [3] では, λ-hybrid 写像列に対する不動点定理や平均収束定理を示した。また, [1] では, λ-hybrid 写像の不動点近似に関する強収束定理が得られている。さらに, λ-hybrid 写像を Banach 空間へ一般化し, その写像についての不動点定理を扱ったのが [4] である。

6.2 generalized hybrid 写像

λ-hybrid 写像の一般化には様々なものがあるが, 文献 [7] で議論されている generalized hybrid 写像はその一つである。ここでは, λ-hybrid 写像と generalized hybrid 写像の関係, および, generalized hybrid 写像の基本性質をまとめておく。

以下, C を H の空でない部分集合, α および β を実数とする。写像 $T\colon C \to H$ が (α,β)-generalized hybrid 写像である [7] とは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\alpha \|Tx - Ty\|^2 + (1-\alpha)\|x - Ty\|^2 \leq \beta \|Tx - y\|^2 + (1-\beta)\|x - y\|^2 \qquad (6.1)$$

が成り立つときをいう。

(α,β)-generalized hybrid 写像は, λ-hybrid 写像の一般化である。実際, λ を実数, $T\colon C \to H$ を λ-hybird 写像とするとき, (3.3) より, すべての $x, y \in C$ に対して

$$(2-\lambda)\|Tx - Ty\|^2 + (\lambda - 1)\|x - Ty\|^2 \leq (1-\lambda)\|Tx - y\|^2 + \lambda \|x - y\|^2$$

が成り立つ。したがって, T は $(2-\lambda, 1-\lambda)$-generalized hybrid である。

ところが, 次の命題が示す通り, 一部の (α,β)-generalized hybrid 写像は, 恒等写像または, ある λ-hybrid 写像になってしまう。

命題 6.1. C を H の空でない部分集合, α および β を実数, $T\colon C \to H$ を (α,β)-generalized hybrid 写像とする。このとき, 次が成り立つ。

(1) $\alpha + \beta - 1 < 0$ ならば, $T = I$ である。
(2) $\alpha + 1 - \beta > 0$ ならば, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して, T は λ-hybrid である。

証明. 式 (6.1) で $x = y$ とすると, $(\alpha + \beta - 1)\|Tx - x\|^2 \geq 0$ となる。したがって, $\alpha + \beta - 1 < 0$ のとき, すべての $x \in C$ に対して $Tx = x$ となり, (1) が示せた。

次に (2) を示す。$x, y \in C$ とする。定義より, (6.1) と

$$\alpha \|Ty - Tx\|^2 + (1-\alpha)\|y - Tx\|^2 \leq \beta \|Ty - x\|^2 + (1-\beta)\|y - x\|^2$$

が成り立つ。これらの両辺を加えて整理すると

$$2\alpha \|Tx - Ty\|^2 \leq (\alpha - (1-\beta))(\|Tx - y\|^2 + \|y - Tx\|^2) + 2(1-\beta)\|x - y\|^2$$

となり, 等式 (3.2) に注意すると

$$(\alpha + 1 - \beta)\|Tx - Ty\|^2 \leq (\alpha + 1 - \beta)\|x - y\|^2 + 2(\alpha + \beta - 1)\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$

を得る。したがって, $\alpha + 1 - \beta > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 + 2\frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha + 1 - \beta}\langle x - Tx, y - Ty\rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 + 2\left(1 - \frac{2(1-\beta)}{\alpha + 1 - \beta}\right)\langle x - Tx, y - Ty\rangle\end{aligned}$$

となる。ゆえに, T は $2(1-\beta)/(\alpha+1-\beta)$-hybrid である。 □

さらに, H の部分集合 C から C の中への generalized hybrid 写像については, 次のこともわかる。

命題 6.2. C を H の空でない部分集合, α と β を実数, $T\colon C \to C$ を (α, β)-generalized hybrid 写像とする。このとき, 次が成り立つ。

(1) $\alpha = 0$ および $\beta = 1$ ならば, T は等長である。
(2) $1 - \beta - \alpha(1-\alpha) < 0$ ならば, $T = I$ である。

証明. まず, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ とすると, (6.1) より, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|x - Ty\| = \|y - Tx\| \tag{6.2}$$

が成り立つ。$Tx \in C$ であるから, (6.2) で $y = Tx$ とすると, $\|x - T^2x\| = \|Tx - Tx\| = 0$ となり, $T^2 = I$ であることがわかる。したがって, 再び (6.2) より

$$\|Tx - Ty\| = \|y - TTx\| = \|y - T^2x\| = \|y - x\|$$

が, すべての $x, y \in C$ に対して成り立つので, T は等長である。

次に, $1 - \beta - \alpha(1-\alpha) < 0$, $x \in C$ とする。$Tx \in C$ であるから, (6.1) より

$$\alpha\|Tx - T^2x\|^2 + (1-\alpha)\|x - T^2x\|^2 \leq (1-\beta)\|x - Tx\|^2 \tag{6.3}$$

が成り立つ。等式

$$\alpha \left\|Tx - T^2x\right\|^2 + (1-\alpha)\left\|x - T^2x\right\|^2 \\ = \left\|\alpha Tx + (1-\alpha)x - T^2x\right\|^2 + \alpha(1-\alpha)\left\|x - Tx\right\|^2$$

が成り立つことに注意すると, (6.3) より

$$0 \le \left\|\alpha Tx + (1-\alpha)x - T^2x\right\|^2 \le [(1-\beta) - \alpha(1-\alpha)]\left\|x - Tx\right\|^2$$

を得る。したがって, $T = I$ である。 □

命題 6.1 および 6.2 から, (α, β)-generalized hybrid 写像の研究においては

$$\alpha < 0 \text{ かつ } -\alpha + 1 \le \beta \le \alpha^2 - \alpha + 1 \text{ の場合}$$

または

$$\alpha \ge 2 \text{ かつ } \alpha + 1 \le \beta \le \alpha^2 - \alpha + 1 \text{ の場合}$$

が研究対象ということになろう[*11]。

参考文献

[1] K. Aoyama, *Halpern's iteration for a sequence of quasinonexpansive type mappings*, Nonlinear Mathematics for Uncertainty and Its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, Springer, Berlin, 2011, pp. 387–394.

[2] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[3] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ-hybrid mappings*, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization **2** (2011), 85–92.

[4] ______, *Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 4387–4391.

[5] J.-B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), Aii, A1511–A1514 (French, with English summary).

[*11] これ以外の場合については, 恒等写像や λ-hybrid 写像に帰着されてしまうため。

[6] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511.

[8] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[9] ______, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[10] Y. Kurokawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonspreading mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 1562–1568.

[11] A. Pazy, *Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space*, Israel J. Math. **9** (1971), 235–240.

[12] W. O. Ray, *The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 531–537.

[13] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[14] ______, *Equilibrium Problems, Nonlinear Operators and Fixed Point Theorems*, A keynote lecture in the 9th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, July 16–22, 2009.

[15] ______, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.

[16] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 457–472.