数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 270-276

ベクトル値 DC 計画問題の最適性条件

新潟大学大学院自然科学研究科　北條　真弓 (Mayumi Hojo)
新潟大学大学院自然科学研究科　田中　環 (Tamaki Tanaka)
新潟大学大学院自然科学研究科　山田　修司 (Syuuji Yamada)
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

Abstract

本論文では、2 つのベクトル値錐凸関数の差で表されるベクトル値 DC 関数を定義し、その性質を紹介する。また, DC 関数の性質を用いて DC 計画問題の最適性条件を与える。

1 導入

多くの多極値問題は, 目的関数がふたつの凸関数の差 (dc 関数) で表せる関数に帰着できる [4]。$\mathbb{R}$ を実数とし X, Y を実ベクトル空間, C を Y の凸錐とする。E を X の凸部分集合とする。もし,

$$f(x) = g(x) - h(x),\ \forall x \in E \tag{1}$$

をみたす E 上のふたつの実数値凸関数 g, h が存在するらば, 実数値関数 $f : E \to \mathbb{R}$ を E 上の dc 関数とよぶ。$E = X$ のとき, f は単純に "dc" という。(1) を E 上 f の dc 分解とよび, $E = X$ のとき, (1) を dc 分解という。dc 計画問題の解法には, 外部近似法や分枝・限定法などのいくつかのアルゴリズムが提案されている。一方, いくつかの dc 関数から構成されるベクトル値関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と,$\mathbb{R}^n$ 内の単位球から生成されるゲージ関数 $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ の合成について,Blanquero と Carrizosa [1] は, 合成関数 $\gamma \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ もまた dc 関数であることを示した。一般的に, 凸錐を用いて定義したベクトル値関数について, その凸性の考え方はたくさんある ([5] を参照)。このような凸性は, 錐凸性としてあたえられ, 典型的な方法は, 関数のエピグラフの凸性で定義する方法である ([7] を参照)。$f : X \to Y$ とする。もし, すべての x_1, $x_2 \in X$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対し,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_C \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

ならば f を X 上の C-凸関数とよぶ。これは f のエピグラフ epi(f) が凸であることと同値である。本論文では, 目的関数がふたつの錐凸関数の差 (DC 関数) で表されるベクトル値 DC 計画問題について研究を行い, この問題に, ある最適性条件を与える。本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では, 実数値 dc 関数の性質と, ベクトル値 DC 関数の同様の性質について述べる。第 3 章では, Blanquero と Carrizosa [1] が示した合成関数 $\gamma \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ がまた dc 関数になるという考えについて説明する. この考え [1] を基に,DC 関数と Gerstewitz (Tammer) の sublinear スカラー化関数 [3] もまた dc 関数になることを示す。第 4 章では, DC 関数の性質を用いて dc 計画問題に最適性条件を与える。

2 準備

本論文を通して，X と Y を実ベクトル空間，C を Y の凸錐とする。ただし，順序を $\leq_C$: $x, y \in X$

$$x \leq_C y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in C$$

で与える。Y の部分集合 A は $0 \in A$ とする。もしすべての $x \in Y$，$t \in [0, \delta]$ に対し，$tx \in A$ をみたす $\delta > 0$ が存在するとき，A は absorbing という。Y を位相ベクトル空間とするとき，$A \subset Y$ の位相的内部と位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{int}\, A$ と $\mathrm{cl}\, A$ とする。以下の定義から始めよう。

定義 2.1. 大域的最適化問題は，以下の形をしているときに dc 計画問題または dc 計画とよぶ。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & x \in E, \\ & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{2}$$

ただし，E は X の閉凸部分集合で，$f_i : X \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, m$ はそれぞれ dc 関数とする。

dc 関数の族は，凸関数，凹関数や凸でも凹でもない関数を含む。

補題 2.1 (Horst, Pardalos and Thoai [4]). X をベクトル空間とし，$f, f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ を *dc* 関数とすると，以下の関数もまた *dc* 関数である :

(i) 任意の $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$ につて，$x \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$;

(ii) $x \mapsto \max_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$, $x \mapsto \min_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$;

(iii) $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto \max\{0, f(x)\}$ *and* $x \mapsto \min\{0, f(x)\}$;

(iv) $x \mapsto \prod_{i=1}^m f_i(x)$.

ベクトル値関数の定義を与える。

定義 2.2. X と Y を実ベクトル空間とし，$f : X \to Y$ とすると，

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leq_C y\}$$

は f のエピグラフとよばれる。

ここで，ふたつの錐凸関数の差で表される関数（DC 関数）の一般的な考え方を紹介する。

定義 2.3. X と Y を実ベクトル空間とする。もし，

$$f(x) = p(x) - q(x), \ \forall x \in X$$

をみたす C -凸関数　p と q が存在するならば，$f : X \to Y$ は DC 関数とよばれる。

3 DC 関数のスカラー化

この章では，Blanquero と Carrizosa の方法 [1, Prop.1.1] を用いたゲージと dc 関数の合成について紹介する。通常の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とし，$Y = \mathbb{R}^n$ とする。

定義 3.1. 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が $0 \in S$ をみたすとする。S のゲージ $\gamma_S : \mathbb{R}^n \mapsto (-\infty, +\infty]$ を次のように定義する。

$$\gamma_S(x) := \inf\{t > 0 \mid x \in tS\}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

S が absorbing のとき，γ_S は S で生成される Minkowski 汎関数である。定理 14.5[8] より，以下の補題を示す。

補題 3.1. S を Y の閉凸 *absorbing* 集合とすると，ゲージ γ_S は以下のようにかける。

$$\gamma_S(x) = \max\{\langle u', x\rangle \mid u' \in S^\circ\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

ただし S° は S の極集合であり，$S^\circ := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x\rangle \leq 1, \ \forall x \in S\}$。

$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ に関する特別な DC 関数 f について以下の定理がわかっている。

定理 3.1 (Blanquero と Carrizosa [1]). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合，$\gamma_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を閉凸単位球 $B \subset \mathbb{R}^n$ から生成されるゲージ関数，$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$，$f = (f_1, \ldots, f_n)$ とする。f_i はそれぞれが dc 分解

$$f_i = f_i^+ - f_i^-$$

をもつ dc 関数から成るとする。ただし f_i^+，f_i^- を $\mathbb{R}^n_+$-凸関数とする。すべての $i = 1, \ldots, n$, について，

$$M_i := \max\{\gamma_B(e_i), \gamma_B(-e_i)\},$$

ただし e_i は $\mathbb{R}^n$ の i 番目の単位ベクトルとする。$\gamma_B \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ は dc 関数で，$\gamma_B \circ f$ のひとつの dc 分解は

$$\gamma_B \circ f = g - h,$$

ただし $g = \gamma_B \circ f + \sum_{i=1}^{n} M_i(f_i^+ - f_i^-)$，$h = \gamma_B \circ f + \sum_{i=1}^{n} M_i(f_i^+ + f_i^-)$ で与えられる。

一般的な DC 関数について，命題 3.1 と同様に考える。すなわち，sublinear 関数と DC 関数を合成するスカラー化の手法を用いる。ここで，多面凸錐 C を以下のように定義する。

$$C := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, z\rangle \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m\},$$

ただし $c_i \neq \theta$ $(i = 1, \ldots, m)$。

本論文の主要結果を得るために，次の補題が必要である。

補題 3.2. X を実ベクトル空間とする。C-凸関数 $p : X \to \mathbb{R}^n$，$i \in \{1, \ldots, m\}$ について $g^{(i)} : X \to \mathbb{R}$ を

$$g^{(i)}(x) := \langle c_i, p(x)\rangle, \ \forall x \in X$$

と定義すると，$g^{(i)}$ はそれぞれの $i = 1, \ldots, m$ で凸関数である。

Proof. $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\lambda g^{(i)}(x_1) + (1-\lambda)g^{(i)}(x_2) - g^{(i)}\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \\
&= \big\langle c_i, \lambda p(x_1) + (1-\lambda)p(x_2) - p\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big)\big\rangle
\end{aligned}$$

を得る。関数 p が C-凸関数のとき

$$\lambda p(x_1)+(1-\lambda)p(x_2)-p\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)\in C。$$

それぞれの $i=1,\dots,m$ について

$$\big\langle c_i, \lambda p(x_1)+(1-\lambda)p(x_2)-p\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)\big\rangle \geq 0。$$

だから,

$$g^{(i)}\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)\leq \lambda g^{(i)}(x_1)+(1-\lambda)g^{(i)}(x_2)。$$

よって $g^{(i)}$ は $i=1,\dots,m$ で凸関数である。 □

$k\in \operatorname{int} C$ が存在するとき, $c^i(k)\in\mathbb{R}^n$ を以下のように定義する。

$$c^i(k):=\frac{1}{\langle c_i,k\rangle}c_i,\ i=1,\dots,m。$$

補題 3.2 の証明において, $\langle c_i,k\rangle>0$ より任意の C-凸関数 $p:X\to\mathbb{R}^n$ について, 写像 $x\mapsto\langle c^i(k),p(x)\rangle$ は凸写像である。

命題 3.1. Gerstewitz (Tammer) [3] が定義した以下の sublinear 関数

$$\varphi_k(y):=\inf\big\{t\in\mathbb{R}\ \big|\ y\in tk-C\big\},\ \forall y\in\mathbb{R}^n$$

は, 次のようにかける。

$$\varphi_k(y)=\max_{i=1,\dots,m}\langle c^i(k),y\rangle,\ \forall y\in\mathbb{R}^n。$$

Proof. 任意の $y\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$ について, φ_k の定義より, $t_\varepsilon k-y\in C$ と $t_\varepsilon<\varphi_k(y)+\varepsilon$ をみたす $t_\varepsilon\in\mathbb{R}$ が存在する。$t_\varepsilon k-y\in C$ より $i=1,2,\dots,m$ について $\langle c_i,t_\varepsilon k-y\rangle\geq 0$ であるので,

$$t_\varepsilon\langle c_i,k\rangle\geq\langle c_i,y\rangle$$

さらに

$$t_\varepsilon\geq\frac{1}{\langle c_i,k\rangle}\langle c_i,y\rangle=\langle c^i(k),y\rangle$$

だから

$$t_\varepsilon\geq\max_{i=1,\dots,m}\langle c^i(k),y\rangle。$$

$t_\varepsilon<\varphi_k(y)+\varepsilon$ より

$$\varphi_k(y)+\varepsilon>t_\varepsilon\geq\max_{i=1,\dots,m}\langle c^i(k),y\rangle。$$

$\varepsilon>0$ とすると

$$\varphi_k(y)\geq\max_{i=1,\dots,m}\langle c^i(k),y\rangle$$

である。逆に, $y\in\mathbb{R}^n$ とし, $\hat{t}=\max_{i=1,\dots,m}\langle c^i(k),y\rangle$ とする。任意の $i=1,\dots,m$ について

$$\hat{t} \geq \langle c^i(k), y \rangle = \frac{1}{\langle c_i, k \rangle} \langle c_i, y \rangle$$

だから

$$\langle c_i, \hat{t}k - y \rangle \geq 0$$

であり

$$\hat{t}k - y \in C。$$

φ_k の定義より

$$\varphi_k(y) \leq \hat{t} = \max_{i=1,\ldots,m} \langle c^i(k), y \rangle。$$

よって示された。 □

命題 3.1，補題 3.2， 2.1 を用いて以下の結果を得る。

定理 3.2. X を実ベクトル空間，$f : X \to \mathbb{R}^n$ を DC 関数とし，f の DC 分解を以下で与える。

$$f(x) = p(x) - q(x),\ \forall x \in X。$$

ただし p， q は C-凸関数とすると，

$$(\varphi_k \circ f)(x) = \max_{i=1,\ldots,m} \langle c^i(k), f(x) \rangle,\ \forall x \in X。$$

さらに $\varphi_k \circ f$ は dc 関数である。

Proof. 命題 3.1 より，$x \in X$ について

$$\begin{aligned}(\varphi_k \circ f)(x) &= \varphi_k(f(x)) \\ &= \max_{i=1,\ldots,m} \langle c^i(k), f(x) \rangle \\ &= \max_{i=1,\ldots,m} \{\langle c^i(k), p(x) \rangle - \langle c^i(k), q(x) \rangle\}。\end{aligned}$$

補題 3.2 から $\langle c^i(k), p(x) \rangle$ と $\langle c^i(k), q(x) \rangle$ は凸関数である。よって $\langle c^i(k), p(x) \rangle - \langle c^i(k), q(x) \rangle$ は dc 関数である。補題 2.1 より，$\varphi_k \circ f$ は dc 関数である。 □

4 最適性条件

この章では DC 関数の性質を用いて dc 計画問題の最適性条件を示す。

E を $\mathbb{R}^n$ の閉凸部分集合とする。ひとつの重要な dc 計画問題は以下であたえられる。

$$\omega_0 := \inf\{g(x) - h(x) \mid x \in E\}, \tag{3}$$

ただし g, h は $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数とする。

$$\omega_0 := g(x^*) - h(x^*) = \inf\{g(x) - h(x) \mid x \in E\}$$

をみたす $x^* \in E$ と $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき，問題 (3) は解をもつ。以下の結果は，問題 (3) にひとつの最適性条件を与える。

定理 4.1 (Horst, Pardalos and Thoai [4]). もし問題 *(3)* が解をもつとすると，$x^* \in E$ が最適解である必要十分条件は

$$\inf\{-h(x)+t \mid x \in E,\ t \in \mathbb{R},\ g(x)-t \leq g(x^*)-t^*\} = 0$$

をみたす $t^* \in \mathbb{R}$ が存在することである。

つぎに，有効点の応用として $\operatorname{int} C$ に関する下限点の考え方を与える。

定義 4.1 (Tanaka [6]). A を空でない $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。以下のふたつの条件

(i) $w^* \in \operatorname{cl} A$;
(ii) *for any* $a \in A$ *with* $a \neq w^*$，$w^* - a \notin \operatorname{int} C$。

をみたすとき，$w^* \in \mathbb{R}^n$ を $\operatorname{int} C$ に関する A の有効点とよぶ。$\operatorname{int} C$ に関する A の有効点集合を $\operatorname{Inf} A$ とする。

本論文の主定理を示す前に，命題 3.1 中の Gerstewitz (Tammer) の sublinear スカラー化関数 φ_k が次の性質をもつことをもう一度確認する。

補題 4.1 (Göpfert, Tammer, Riahi and Zălinescu [2]). Y を実ベクトル空間，C を Y の真閉凸錐，$k \in \operatorname{int} C$ とすると，すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ について

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_k(y) < \lambda\} = \lambda k - \operatorname{int} C$$

をみたす φ_k は連続関数である。

ここで，　本論文の主定理を示す。

定理 4.2. A を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合，$w^* \in \operatorname{cl} A$，$k \in \operatorname{int} C$ とすると，

$$w^* \in \operatorname{Inf} A \Leftrightarrow \inf\{\varphi_k(y) \mid y \in A - w^*\} = 0。$$

Proof. $\beta := \inf\{\varphi_k(y) \mid y \in A - w^*\}$ とする。はじめに，$w^* \in \operatorname{Inf} A$ と仮定する。$w^* \in \operatorname{cl} A$ のとき $a_n \to w^*$（$n \to +\infty$）をみたす $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A$ が存在する。φ_k の連続性 (補題 4.1) と命題 3.1 より

$$\begin{aligned}
\beta &= \inf\{\varphi_k(y) \mid y \in A - w^*\} \\
&\leq \inf\{\varphi_k(a_n - w^*) \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \lim_{n \to +\infty} \varphi_k(a_n - w^*) \\
&= \varphi_k(0) = 0
\end{aligned}$$

であるから，$\beta \leq 0$. 次に $\beta = 0$ を示す。もし $\beta < 0$ ならば，β の定義より $\varphi_k(a_0 - w^*) < 0$ をみたす $a_0 \in A$ が存在するので，補題 4.1 より $a_0 - w^* \in -\operatorname{int} C$。これは，$w^*$ の有効性つまり，定義 4.1(ii) に矛盾する。よって $\beta = 0$。

次に，逆を示す。$\beta = 0$ と仮定する。もし $w^* \notin \operatorname{Inf} A$ とすると，$a - w^* \in -\operatorname{int} C$ をみたす $a \in A$ with $a \neq w^*$ が存在する。

$$0 \cdot k - \operatorname{int} C = -\operatorname{int} C \ni a - w^*$$

のとき，補題 4.1 から $\varphi_k(a - w^*) < 0$ を得る。一方 $\beta = 0$ より，すべての $a \in A$ について $\varphi_k(a - w^*) \geq 0$ である。これは矛盾であるので，$w^* \in \operatorname{Inf} A$。 □

$f : X \to \mathbb{R}^n$ を DC 関数とし，以下の問題を考える。

$$w \in \mathrm{Inf}\{f(x) \mid x \in X\}。 \tag{4}$$

もし

$$w^* \in \mathrm{Inf}\{f(x) \mid x \in X\} \quad , \quad f(x^*) = w^*$$

をみたす $x^* \in X$，$w^* \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき，問題 (4) は解をもつ。

定理 4.3. もし問題 (4) が解をもつならば，以下をみたす $t^* \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$\inf\{-h_{w^*}(x) + t \mid x \in X,\ t \in \mathbb{R},\ g_{w^*}(x) - t \leq g_{w^*}(x^*) - t^*\} = 0$$

ただし $\varphi_k(f(x) - w^*)$ の分解 g_{w^*}，h_{w^*} は凸関数とする。

Proof. f を DC 関数のとき，命題 3.2 より $\varphi_k(f(x) - w^*)$ は dc 関数である。定理 4.1 より，

$$w^* \in \mathrm{Inf}\{f(x) \mid x \in X\} \Leftrightarrow \inf\{\varphi_k(f(x) - w^*) \mid x \in X\} = 0。$$

だから

$$\begin{aligned} 0 &= \inf\{\varphi_k(f(x) - w^*) \mid x \in X\} \\ &= \inf\{g_{w^*}(x) - h_{w^*}(x) \mid x \in X\}。 \end{aligned}$$

定理 4.1 より

$$\inf\{-h_{w^*}(x) + t \mid x \in X,\ t \in \mathbb{R},\ g_{w^*}(x) - t \leq g_{w^*}(x^*) - t^*\} = 0$$

をみたす $t^* \in \mathbb{R}^n$ が存在する。よって示された。 □

References

[1] R. Blanquero and E. Carrizosa, *Optimization of the norm of a vector-valued DC function and applications*, J. Optim. Theory Appl. **107** (2000), 245–260.

[2] A. Göpfert, C. Tammer, H. Riahi and C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] Chr. Gerstewitz (Tammer), *Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung*, Wiss. Zeitschr. TH Leuna-Merseburg **25** (1983), 357–364 (in German).

[4] R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai, *Introduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[5] T. Tanaka, *Cone-convexity of vector-valued function*, Sci. Rep. Hirosaki Univ. **37** (1990), 170–177.

[6] T. Tanaka, *Approximately efficient solution in vector optimization*, J. Multi-Criteria Decision Anal. **5** (1996), 271–278.

[7] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[8] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[9] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.