数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 226-230

On projection algorithm for convex feasibility problems

秋田県立大学 システム科学技術学部* 松下 慎也†(Shin-ya Matsushita)
徐 粒 (Li Xu)
Department of Electronics and Information Systems
Akita Prefectural University

1 はじめに

集合 C と D を Hilbert 空間 H に含まれる集合とする。本論文では複数の集合の共通部分を見つける問題 (制約可能性問題) を考える。集合 C と D に関する制約可能性問題は以下の条件

$$u\in C\cap D \tag{1.1}$$

を満たす $u\in H$ を見つける問題となる。制約可能性問題とは、所望する条件をすべてを満足する解を見つけるための数理モデルであり、工学において現れる様々な問題を表現することができる ([12, 8] 参照)。ここで、任意の $x\in H$ に対して

$$\|x-x_0\|=\min_{y\in C}\|x-y\|$$

を満たす C の点 x_0 が一意に存在する。H から C の上への距離射影 $P_C: H\rightarrow C$ を $P_C(x)=x_0$ と定義する。P_C は以下の性質を持つ事が知られている : 任意の $x,y\in H$ の対して

$$\|P_C(x)-P_C(y)\|^2\leq\|x-y\|^2-\|(I-P_C)(x)-(I-P_C)(y)\|^2 \tag{1.2}$$

([9, 10] 参照)。制約可能性問題 (1.1) は写像 P_CP_D の不動点問題として表すことができる:

$$P_CP_D(u)=u. \tag{1.3}$$

射影が持つ性質 (1.2) に焦点を当てることで、制約可能性問題を解決する求解法として射影法が考案されている。射影法は von Neumann [11] によって研究され、次のような結果が得られている。

定理 1.1 (von Neumann [11]) C と D を H の閉部分空間とする。点列 $\{x_n\}$ を以下の方法で生成する。

$$x_0\in H,\quad x_{2n+1}=P_C(x_{2n})\ \text{ and }\ x_{2n+2}=P_D(x_{2n+1})\ \ (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.4}$$

このとき、$\{x_n\}$ は $P_{C\cap D}(x_0)$ に強収束する。

さらに Bregman [5] は集合 C と D が閉凸集合のとき、$\{x_n\}$ が $C\cap D$ の点に弱収束することを証明している。また、Hundal [7] によって Hilbert 空間において射影法が強収束しないような閉凸集

* 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4
† e-mail: matsushita@akita-pu.ac.jp home page: http://web.sc.eis.akita-pu.ac.jp/~matsushita/

合の例が与えられている。射影法の理論研究は、集合が複数の場合や Banach 空間における研究など様々な条件のもとで現在も活発におこなわれている ([1, 6, 9, 10] 参照)。

一方、射影法の収束に関して集合間の幾何学的な構造と点列の収束効率が密接に関係していることが知られている [6]。Bauschke と Kruk [4] は射影法の収束の効率化を目指し、以下のような求解法について研究をおこなった。

$$x_0 \in H,\ \ x_{2n+1} = R_C(x_{2n}) \ \text{ and } \ x_{2n} = P_D(x_{2n+1}) \ \ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ここで $R_C = 2P_C - I$ とする。Bauschke と Kruk は集合 C が閉凸錐で obtuse(2 章で解説する) であるとき $\{x_n\}$ が $C \cap D$ の要素に収束することを示している。ただし Bauschke と Kruk の結果は有限次元で示されている。また、閉凸錐を並行移動した場合、一般に obtuse でないような例が作れてしまう。

本研究では Bauschke と Kruk の研究に動機づけられて、制約可能性問題を一般化した以下の問題について考える。

$$\text{find} \ \ u \in (e + C) \cap D, \tag{1.5}$$

ただし $e \in H$ とする。ここでは問題 (1.5) を解決するための求解法を提案し、求解法から構成される点列が (1.5) の解に弱収束することを示す。

2 準備

本論文を通して H を実 Hilbert 空間とし、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ と $\| \cdot \|$ を H の内積とノルムとする。C を H の空でない集合とする。C が閉凸錘のとき集合 C^* を

$$C^* = \{y \in H : \langle x, y \rangle \geq 0 \ \ (\forall x \in C)\}$$

とする。閉凸錐 C が $C^* \subset C$ を満たすとき C は obtuse [4] という。閉凸錐で obtuse な集合として次の例が知られている。

例 2.1

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

とする。このとき $\mathbb{R}^n_+$ は obtuse である。ここで、$\mathbb{R}^2_+$ をベクトル $(1,1)^T$ で平行移動した集合 $(1,1)^T + \mathbb{R}^2_+$ は obtuse でない事が比較的容易に示せる。ここで、a^T はベクトル a の転置をあらわす。

例 2.2

$$\mathbb{S}^n_+ = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = A, x^T A x \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)\}$$

とする。このとき $\mathbb{S}^n_+$ は obtuse である。

例 2.3

$$\mathrm{SOC}(n) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq t^2, t \geq 0\}$$

とする。このとき $\mathrm{SOC}(n)$ は obtuse である。

$x \in H$ とする。距離射影には次のような性質がある ([1, 6, 9, 10, 4] 参照)。

(i)
$$\langle y - P_C(x), x - P_C(x)\rangle \leq 0 \ (\forall y \in C): \tag{2.1}$$

(ii)
$$P_{x+C}(y) = P_C(y-x) + x \ (\forall y \in C). \tag{2.2}$$

(iii) C を obtuse とし、$R_C = 2P_C - I$ とする。ただし、I を恒等写像とする。このとき
$$R_C(x) \in C \quad (\forall x \in H) \tag{2.3}$$

3 主結果

問題 (1.5) を解決するために以下の方法で構成される点列 $\{x_n\}$ を考える。
$$x_0 \in H, \quad x_{2n+1} = R_{e+C}(x_{2n}) \ \text{ and } \ x_{2n+2} = P_D(x_{2n+1}) \ \ (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.1}$$
ここで、$R_{e+C} = 2P_{e+C} - I$ である。

主定理を証明するために次の補助定理が必要である。

補助定理 3.1 $R_{e+C} = 2P_{e+C} - I$ とする。このとき R_{e+C} は非拡大写像、つまり
$$\|R_{e+C}(x) - R_{e+C}(y)\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in H)$$
となる。

補助定理 3.2 $\{x_n\}$ を (3.1) の方法から構成された点列とし、$u \in (e+C) \cap D$ とする。このとき
$$\|x_{2n+2} - u\|^2 + \|x_{2n+1} - x_{2n+2}\|^2 \leq \|x_{2n+1} - u\|^2 \quad (\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{3.2}$$
が成り立つ。

補助定理 3.3 C を obtuse とし、$e \in H$ とする。このとき
$$R_{e+C}(x) \in e + C \quad (\forall x \in H).$$

証明の概略

R_{e+C} の定義と (2.2) より
$$\begin{aligned} R_{e+C}(x) &= (2P_{e+C} - I)(x) \\ &= 2P_{e+C}(x) - x \\ &= 2(P_C(x-e) + e) - x \\ &= e + 2(P_C - I)(x - e). \end{aligned}$$
ここで C は obtuse より $R_{e+C}(x) \in e + C$. ■

上記で示された補助定理を用いることで、次の収束定理を証明する。

定理 3.1 C を H の obtuse な閉凸錐、D を H の閉凸集合、$e \in H$、$(e+C)\cap D \neq \emptyset$ とする。点列 $\{x_n\}$ を以下のように構成する。

$$x_0 \in H,\ \ x_{2n+1} = R_{e+C}(x_{2n})\ \ \text{and}\ \ x_{2n+2} = P_D(x_{2n+1})\ \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

このとき点列 $\{x_n\}$ は $(e+C)\cap D$ に含まれる点 $\bar{u}$ に弱収束する。

証明の概略

$v \in (e+C)\cap D$ とする。補助定理 3.1 と補助定理 3.2 より、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|x_{2n+2} - v\|^2 + \|x_{2n+1} - x_{2n+2}\|^2 &\leq \|x_{2n+1} - v\|^2 \\ &\leq \|x_{2n} - v\|^2\end{aligned}$$

となる。これより $\{x_{2n}\}$ は有界で $\{\|x_{2n} - v\|^2\}$ は単調減少列となる。この結果より

$$\|x_{2n+1} - x_{2n+2}\|^2 = \|x_{2n+1} - P_D(x_{2n+1})\|^2 \to 0\ \ (n \to \infty) \tag{3.3}$$

も成り立つ。

次に $\{x_n\}$ のすべての弱収積点が $(e+C)\cap D$ に含まれる事を示す。$\{x_{n_i}\}$ を $\bar{x} \in H$ に弱収束する $\{x_n\}$ の部分列とする。ここで次の二つの場合を考える。

(i) $\{x_{n_i}\}$ のある部分列 $\{x_{2n_{i_j}+1}\}$ が存在して $x_{2n_{i_j}+1} = R_{e+C}(x_{2n_{i_j}})$ $(\forall j \in \mathbb{N})$ となる場合。このとき $\{x_{2n_{i_j}+1}\} \subset e+C$ より $\bar{x} \in e+C$ となる。一方、(3.3) より $\bar{x} \in D$ も成り立つ。したがって $\bar{x} \in (e+C)\cap D$。

(ii) $\{x_{n_i}\}$ のある部分列 $\{x_{2n_{i_j}}\}$ が存在して $x_{2n_{i_j}} = P_D(x_{2n_{i_j}-1})$ $(\forall j \in \mathbb{N})$ となる場合。この場合も (i) と同様な議論で $\bar{x} \in (e+C)\cap D$ がいえる。

最後に $\{x_n\}$ が $(e+C)\cap D$ のある点に弱収束することを示す。ここで (3.3) より、$\{x_{2n+1}\}$ が $(e+C)\cap D$ のある点に弱収束することを示せば十分である。$\{x_{2k_n+1}\}$ と $\{x_{2l_n+1}\}$ を $\{x_{2n+1}\}$ の部分列で $x_{2k_n+1} \rightharpoonup u_1$ と $x_{2l_n+1} \rightharpoonup u_1$ (ただし $u_1, u_2 \in (e+C)\cap D$) が成り立つものとする。いま $\{\|x_{2n+1} - u_i\|\}$ $(i = 1, 2)$ には極限が存在するのでその値をそれぞれ α_1, α_2 とする。一方、ノルムの性質より

$$\|x_{2n+1} - u_1\|^2 = \|x_{2n+1} - u_2\|^2 + \|u_2 - u_1\|^2 + 2\langle x_{2n+1} - u_2, u_2 - u_1\rangle$$

が成り立つ。x_{2n+1} のところに x_{2k_n+1}, x_{2l_n+1} をそれぞれ代入して極限をとると

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \|u_2 - u_1\|^2,\ \ \alpha_1 = \alpha_2 + \|u_2 - u_1\|^2$$

が得られるので $u_1 = u_2$ が成り立つ。■

参考文献

[1] Alber, Y. I.: Metric and generalized projection operators in Banach spaces:properties and applications. in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and

Monotone Type (A. G. Kartsatos ed.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 178, Marcel Dekker, New York, 15-50 (1996)

[2] J.-P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis.* John Wiley & Sons, New York 1984.

[3] H. H. Bauschke, J. V. Burke, F. R. Deutsch, H. S. Hundal and J. D. Vanderwerff, *A new proximal point iteration that converges weakly but not in norm*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) 1829-1835.

[4] H. H. Bauschke and S. G. Kruk, *Reflection-projection method for convex feasibility problems with an obtuse cone*, J. Optim. Theory Appl. **120** (2004) 503-531.

[5] L. M. Bregman, *The method of successive projection for ¡nding a common point of convex sets*, Sov. Math. Dokl. **6** (1965) 688-692.

[6] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer, New York, NY, (2001).

[7] H. S. Hundal, *An alternating projection that does not converge in norm*, Nonlinear Anal. **57** (2004) 35-61.

[8] H. Stark and Y. Yang, *Vector Space Projections: A Numerical approach to Signal and Image Processing*, Neural Nets, and Optics, John wiley & Sons, 1998.

[9] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.

[10] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[11] J. von Neumann, *Functional Operators II: The Geometry of Orthogonal Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950

[12] D. C. Youla and H. Webb, *Image Restoration by the method of convex projections: Part1-Theory*, IEEE Transactions on Medical Imaging, (1982), 81-94.