

### 3 規準二人ゼロ和行列ゲームに対する行列の分類

## Classification of Matrices for Tricriteria Two-Person Zero-Sum Matrix Game

成蹊大学工学部情報科学科 樋口 政和 (MASAKAZU HIGUCHI)  
Department of Information and Computer Science,  
Seikei University

新潟工科大学学習支援センター 木村 健志 (KENJI KIMURA)  
Niigata Institute of Technology

新潟大学大学院自然科学研究科 田中 環 (TAMAKI TANAKA)  
Department of Mathematical Science,  
Graduate School of Science and Technology,  
Niigata University

**概要:** 将来の状態を予測し、数学的あるいは統計的に最善の意志決定を導き出す理論を決定理論といい、意志決定者が複数いる場合を特にゲーム理論という。ゲーム理論において、単一の評価規準に基づき複数の意思決定者が最適な決定を模索することをスカラーゲーム (古典ゲーム) と呼ぶ。これに対して、複数の評価規準に基づき決定が行われるゲームを多規準ゲームと呼ぶ。古典ゲームにおいて代表的な単一規準の二人ゼロ和行列ゲームでは、ミニマックス定理が成立し、ゲームが確定する。多規準二人ゼロ和行列ゲームでは、複数規準を評価するための指標を導入し、それに基づいて利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値を定義した場合、それらが同値となる保証はない。しかしながら、ミニマックス定理に準ずるいくつかの定理は確立されている。すなわち、ゲーム解析において、利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値を解析することはゲームを解くための手掛かりとなり得る。

本稿では、多規準二人ゼロ和行列ゲームにおけるミニマックス値およびマックスミニ値を容易に得るために、3次元の決定空間においてそのゲームの $2 \times 2$ 行列の場合について、それらの行列を複数のカテゴリで特徴付けを行っている。

**キーワード:** ゲーム理論, 多規準二人ゼロ和行列ゲーム, ベクトル値関数, ミニマックス問題。

## 1 研究背景

多規準ゲームの研究において近年、広く用いられているベクトル値ミニマックス値・マックスミニ値および鞍点の概念は 1980 年代に考案された。それらの概念は、1970 年代に提案されたベクトル最適化における支配解の考えに基づいている。そして、今日に至るまで、この分野において多数の定義や理論が構築されてきた。ここで重要なことは、ベクトル同士の比較を用いて、古典ゲームにおける利得関数のミニマックス値・マックスミニ値の概念を拡張した場合、従来の結果までは拡張されない。つまり、古典ゲームでの有用な結果がそのまま多規準ゲームへと拡張されるわけではないということである。例えば、古典ゲームにおいて代表的な単一規準の二人ゼロ和行列ゲームでは、ゲーム理論の発展に多大な貢献を果たしたミニマックス定理が成立しゲームが確定する。多

規準二人ゼロ和行列ゲームでは、ベクトル同士の評価指標を用いて利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値を定義した場合、それらが同値となる保証はない。

この分野におけるここ数年の研究では、多規準二人ゼロ和ゲームにおいて、ミニマックス定理に準ずるいくつかの定理が確立されている [1]。また、そのゲームについて、ミニマックス値およびマックスミニ値の同値性に関する研究も行なわれている [3]。ゲームの解析では、利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値を解析することはゲームを解くための手掛かりとなり得る。このように多規準二人ゼロ和ゲームをその利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値の観点から解析することは、この分野において重要な課題である。

単一規準の行列ゲームでは、プレイヤー達の利得評価は実数空間で決定されるため、利得関数のミニマックス値およびマックスミニ値は容易に得ることができる。複数規準の行列ゲームでは、利得の評価は多次元の決定空間で行なわれるため、ミニマックス値およびマックスミニ値を得るのは困難である。そこで、筆者らは多規準二人ゼロ和行列ゲームにおけるそれらの値を容易に求めるために、2次元の決定空間においてそのゲームの  $2 \times 2$  行列の場合について、それらの行列を利得関数が持つ包絡線を手掛かりに複数のカテゴリで特徴付けた [2]。これにより、利得関数の像を視覚的に分類することができ、視覚的観点からのミニマックス値およびマックスミニ値へのアプローチが可能となった。

一方において、[4] で線形ベクトル最適化問題とある種多規準二人ゼロ和行列ゲームとの同値性、それを用いた解の最適性条件についての研究が行われた。そこでの有用な結果は、非常に複雑な条件が設定されているが、利得関数の像についての視覚的・図形的な観点から眺め直した場合、どのような表現・結果になるのかは興味深いところである。

本稿では、3次元の決定空間において多規準二人ゼロ和行列ゲームの  $2 \times 2$  行列の場合について、それらの行列に対する特徴付けを行なう。行列の特徴付けは、ある特定の利得点の動きに着目して行なわれる。それにより得られる結果は、2次元決定空間における  $2 \times 2$  行列をもつ多規準行列ゲームの場合と同様になるが、以前よりも見通しの良い結果として与えられる。また、以前得られた結果の包絡型に関して、より詳細な分類が与えられる。

## 2 多規準二人ゼロ和行列ゲーム

我々は、あるゲーム  $\Gamma = (X, Y, -f, f)$  を考える。ここで、 $X$  と  $Y$  はそれぞれ  $k$  次元空間、 $l$  次元空間の混合戦略の集合とする。すなわち、

$$X = \{x \in R^k \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^t, \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0\} \quad (1)$$

$$Y = \{y \in R^l \mid y = (y_1, y_2, \dots, y_l)^t, \sum_{i=1}^l y_i = 1, y_1, y_2, \dots, y_l \geq 0\} \quad (2)$$

である。 $f$  はこのゲームの利得関数であり、 $f: X \times Y \rightarrow R^n$  とする。つまり、 $f$  はベクトル値関数である。各プレイヤーの利得についてはゼロ和が成立しており、プレイヤー 1 の利得関数は  $-f$  であるので、プレイヤー 1 は最小化プレイヤーとなり、プレイヤー 2 は最大化プレイヤーとなる。ここで、 $f$  として、次の行列型の関数、

$$f(x, y) = (x^t A_1 y, x^t A_2 y, \dots, x^t A_n y)^t, \quad A_i \text{ は } k \times l \text{ 行列 } (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

を考える。このとき、 $\Gamma$  を多規準二人ゼロ和行列ゲームと呼ぶ。

### 3 ベクトル値利得関数

本稿では,  $k = l = 2$ ,  $n = 3$  の場合について, 多規準二人ゼロ和行列ゲームの利得関数の像に対する特徴付けを行なう. ここで,

$$f(x, y) = (x^t A y, x^t B y, x^t C y)^t, \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表すことにする. 各行列のあるひとつの成分は, 平行移動定数として表すことができるので, その成分を0としても一般性を失わない. また,

$$P_k = (a_k, b_k, c_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (6)$$

とおく.  $P_k$  は3次元空間上のひとつの点を表す.

$X$  と  $Y$  は混合戦略の集合なので, 利得関数の像は  $P_1, P_2, P_3$ , 原点  $O$  の4点を端点とする図形となる.  $x$  を  $X$  の端点  $e_1^X = (1, 0)^t$  に固定させたとき,  $Y$  の端点  $e_1^Y = (1, 0)^t$ ,  $e_2^Y = (0, 1)^t$  に対する利得点はそれぞれ  $P_1, P_2$  となる. よって,  $y$  が  $e_1^Y$  から  $e_2^Y$  まで変化すると, 決定空間上に  $P_1$  から  $P_2$  へ向かう線分が形成される. また,  $x$  を  $X$  の端点  $e_2^X = (0, 1)^t$  に固定させたとき,  $e_1^Y, e_2^Y$  に対する利得点はそれぞれ  $O, P_3$  となる. よって,  $y$  が  $e_1^Y$  から  $e_2^Y$  まで変化すると, 決定空間上に  $O$  から  $P_3$  へ向かう線分が形成される.  $x$  を  $e_1^X$  から  $e_2^X$  まで変化させると,  $P_1$  は  $O$  へ,  $P_2$  は  $P_3$  へ向かってそれぞれ動くので,  $P_1$  ( $O$ ) 方向から  $P_2$  ( $P_3$ ) 方向へ向かう線分群が形成されることになる (図1参照).

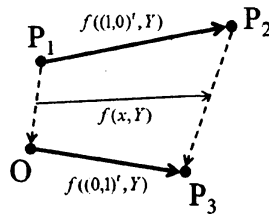


図1: パラメータ変化による利得点の動き

### 4 利得関数の像に対する特徴付け

前節より, 利得関数の像は  $P_1, P_2, P_3, O$  の4点から形成される. そこで, 我々はそれら4点の位置関係から利得関数の像を特徴付ける. 具体的には, 3点  $O, P_1, P_3$  を固定し,  $P_2$  の存在領域により利得関数の像の形を考えていく.

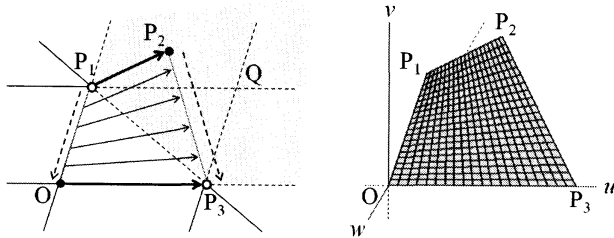
#### 4.1 4点在同一平面上にある場合

$P_1, P_2, P_3$  の位置ベクトルをそれぞれ  $p_1, p_2, p_3$  とすると, ある実数  $s, t$  を用いて  $p_2 = sp_1 + tp_3$  と表現できる.

- Case 1.  $P_2$  が、直線  $OP_1$ ,  $OP_3$ ,  $P_1P_3$  のすべてに関して  $Q$  を含む領域に存在するとき、利得関数の像は一般の四角形となる (図 2 参照). このとき、

$$s > 0, t > 0, s + t > 1, s \neq 1, t \neq 1 \tag{7}$$

である.



例 1

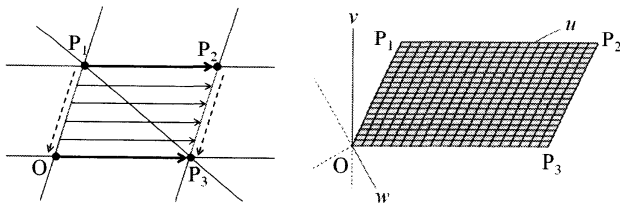
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

図 2: 一般四角形

- Case 2.  $P_2$  が、 $P_1$  を通り直線  $OP_3$  に平行な直線と  $P_3$  を通り直線  $OP_1$  に平行な直線の交点のとき、利得関数の像は平行四辺形となる (図 3 参照). このとき、

$$s = 1, t = 1 \tag{8}$$

である.



例 2

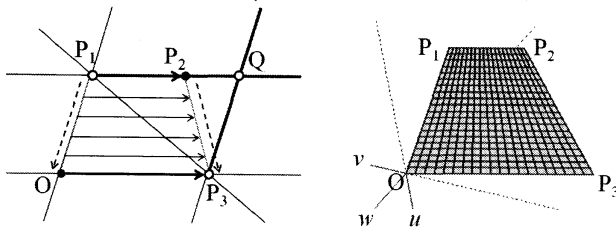
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

図 3: 平行四辺形

- Case 3.  $P_2$  が、 $P_1$  を端点とする  $Q$  を含む半直線上、または、 $P_3$  を端点とする  $Q$  を含む半直線上の点 (ただし、 $P_1$ ,  $P_3$ ,  $Q$  を除く) のとき、利得関数の像は台形となる (図 4 参照). このとき、

$$s = 1, t > 0, t \neq 1 \text{ or } s > 0, t = 1, s \neq 1 \tag{9}$$

である.



例 3

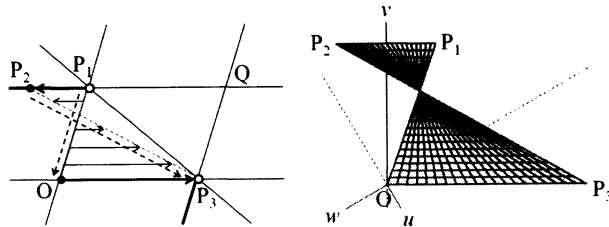
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

図 4: 台形

- Case 4.  $P_2$  が、直線  $P_1Q$  において  $P_1$  を端点とする  $Q$  を含まない半直線上、または、直線  $P_3Q$  において  $P_3$  を端点とする  $Q$  を含まない半直線上の点 (ただし、 $P_1, P_3$  を除く) のとき、利得関数の像はバタフライ形となる (図5参照)。このとき、

$$s = 1, t < 0 \text{ or } s < 0, t = 1 \tag{10}$$

である。



例 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

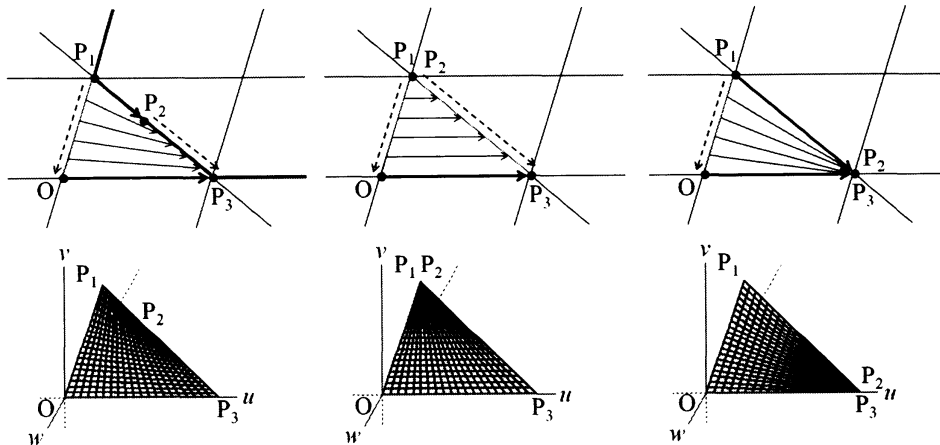
図 5: バタフライ形

- Case 5.  $P_2$  が、直線  $OP_1$  において  $P_1$  を端点とする  $O$  を含まない半直線上、または、直線  $OP_3$  において  $P_3$  を端点とする  $O$  を含まない半直線上、または、線分  $P_1P_3$  上の点のとき、利得関数の像は三角形となる (図6参照)。このとき、

$$s \geq 1, t = 0 \text{ or } s = 0, t \geq 1 \text{ or} \tag{11}$$

$$s > 0, t > 0, s + t = 1 \tag{12}$$

である。  $P_2$  が  $P_1, P_3$  以外の点の場合、利得関数を形成する線分群はある包絡曲線を形成する。よって、このときと  $P_2$  が  $P_1, P_3$  と一致するときの利得点の動きは本質的に異なる。



例 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 7

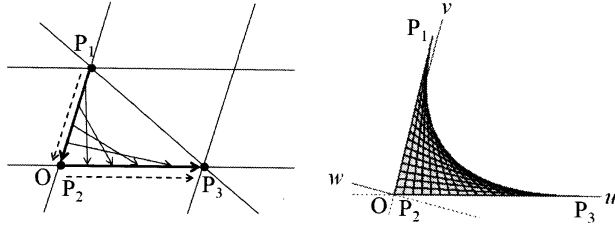
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

図 6: 三角形

- Case 6.  $P_2$  が,  $O$  と一致するとき, 利得関数の像は逆扇形となる (図7参照). このとき,

$$s = 0, t = 0 \tag{13}$$

である.



例 8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

図 7: 逆扇形

- Case 7.  $P_2$  が, 直線  $OP_1$ ,  $OP_3$  の両方に関して  $Q$  を含む領域かつ直線  $P_1P_3$  に関して  $Q$  を含まない領域, または, 直線  $OP_1$  に関して  $Q$  を含まない領域かつ直線  $P_1P_3$  に関して  $Q$  を含む領域, または, 直線  $OP_3$  に関して  $Q$  を含まない領域かつ直線  $P_1P_3$  に関して  $Q$  を含む領域, または, 直線  $OP_1$ ,  $OP_3$  の両方に関して  $Q$  を含まない領域 (いずれも境界点は含まず), または, 直線  $P_1P_3$  において線分  $P_1P_3$  を除いた部分, または,  $P_1$  を端点とする  $O$  を含む半直線上, または,  $P_3$  を端点とする  $O$  を含む半直線上 (ただし,  $O$  を除く) に存在するとき, 利得関数の像は折り込み形となる (図8参照). このとき,

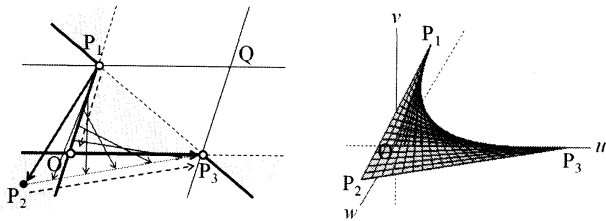
$$s > 0, t > 0, 0 < s + t < 1 \text{ or} \tag{14}$$

$$s > 1, t < 0, s + t \geq 1 \text{ or} \tag{15}$$

$$s < 0, t > 1, s + t \geq 1 \text{ or} \tag{16}$$

$$s < 1, t = 0 \text{ or } s = 0, t < 1 \text{ or } s < 0, t < 0 \tag{17}$$

である.



例 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

図 8: 折り込み形

- Case 8.  $P_2$  が, 直線  $OP_1$ ,  $P_1P_3$  の両方に関して  $Q$  を含まない領域かつ直線  $OP_3$  に関して  $Q$  を含む領域, または, 直線  $OP_1$  に関して  $Q$  を含む領域かつ直線  $OP_3$ ,  $P_1P_3$  の両方に関して  $Q$  を含まない領域 (ただし, 境界上と直線  $P_1Q$  上と直線  $P_3Q$  上の点を除く) に存在するとき, 利得関数の像は準バタフライ形となる (図9参照). このとき,

$$s > 1, t < 0, s + t < 1 \text{ or } s < 0, t > 1, s + t < 1 \text{ or} \tag{18}$$

$$0 < s < 1, t < 0 \text{ or } s < 0, 0 < t < 1 \tag{19}$$

である.

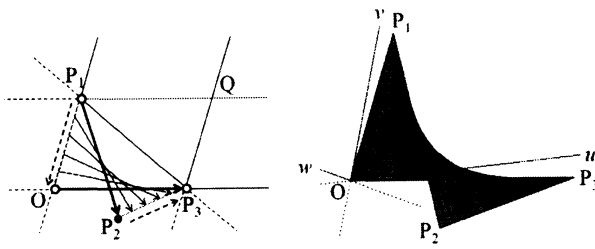


図 9: 準バタフライ形

例 10

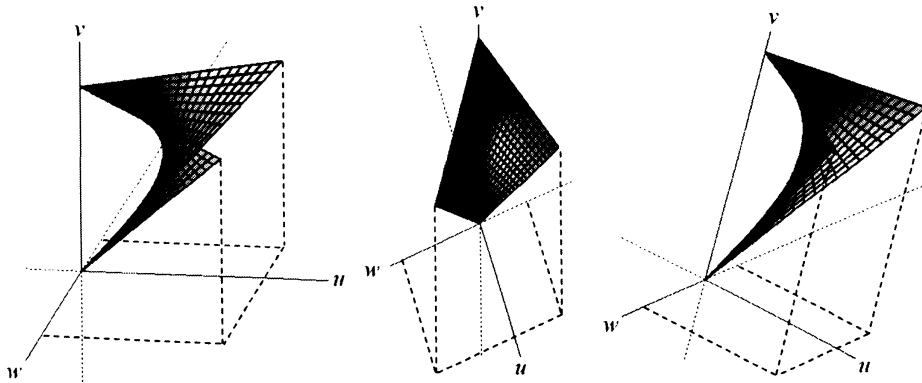
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Case 9. 4 点が一直線上にあるとき, 利得関数の像は線分となる.
- Case 10. 4 点が一致するとき, 利得関数の像は一点となる.

利得関数の像の端点である 4 点が同一平面上にある場合は, 本質的には 2 次元の場合と同じである. Case 1, Case 5 の一部, Case 6 から Case 8 では, 利得関数を形成する線分群はある包絡曲線を形成する. [2] では, これらをすべて包絡型というカテゴリーに特徴付けていた. そのように考えると, ここで得られた結果は [2] の結果と同様になる. しかしながら, [2] では包絡型に対して詳細な解析は与えられておらず, 本稿の利得点の動きからの解析によって包絡型の各パターンに特徴付けが与えられたという点において今回の結果は以前より見通しが良くなったと言える.

#### 4.2 4 点が同一平面上にない場合

利得関数の像は, 捻れを伴う図形となる. このとき, 利得関数を形成する線分群はある包絡曲面を形成する. この場合は, 視点の位置によって利得関数の像は一意的の形に見えない. 例えば, 3 次元空間に形成された利得関数の像に対して適当な軸回転を施すと, 準バタフライ形, 一般の四角形, 折り込み形, などのように見える (図 10 参照). 本稿では, このような場合を総称して, 包絡形と呼ぶことにする.  $P_1, P_2, P_3$  の位置ベクトルをそれぞれ  $p_1, p_2, p_3$  とすると, このとき,  $p_2 = sp_1 + tp_3$  を満たす  $s, t$  は存在しない.



例 11  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

図 10: 包絡形

## 5 まとめ

本稿では, 3次元の決定空間において多規準二人ゼロ和行列ゲームの $2 \times 2$ 行列の場合について, それらの行列に対する特徴付けを行なった. 行列の特徴付けは, ある特定の利得点の動きに着目して行なった. その結果, 利得関数の像に対して一般四角形, 平行四辺形, 台形, バタフライ形, 三角形, 逆扇形, 折り込み形, 準バタフライ形, 線分, 一点, 包絡形の11パターンの特徴付けが与えられた.

## 謝辞

本研究の一部は, 科学研究費(基盤研究C No.21540121)の援助を受けていることをここに記し, 謝意を表します.

## 参考文献

- [1] T. Tanaka, Vector-Valued Minimax Theorems in Multicriteria Games, *New Frontiers of Decision Making for the Information Technology Era*, World Scientific, pp.75–99, 2000.
- [2] M. Higuchi and T. Tanaka, Classification of Matrices by Means of Envelops for bicriteria Matrix Games, *International Journal Mathematics, Game Theory, and Algebra*, Nova Science Publishers, New York, vol.12, pp.371-378, 2002.
- [3] M. Higuchi and T. Tanaka, On Minimax and Maximin Values in Multicriteria Games, *Multi-Objective Programming and Goal-Programming: Theory and applications*, Springer-Verlag, Berlin, pp.141-146, 2003.
- [4] J. M. Hong, M. H. Kim and G. M. Lee, On linear vector program and vector Matrix Game equivalence, *Optimization Letters*, DOI 10.1007/s11590-010-0237-3.