数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 168-172

バナッハ空間の skew 定数について[1]

三谷健一 (Ken-Ichi Mitani)
岡山県立大学 情報工学部
(Department of Systems Engineering, Okayama Prefectural University)

斎藤吉助 (Kichi-Suke Saito)
新潟大学 理学部
(Department of Mathematics, Niigata University)

高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)
岡山県立大学 名誉教授
(Okayama Prefectural University, Professor Emeritus)

本研究では, X を $\dim X \geq 2$ なる実バナッハ空間とする. また $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ とする. Fitzpatrick-Reznick[5] は X の skewness を定義した:

$$s(X) = \sup\left\{\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\| - \|y+tx\|}{t} : x, y \in S_X\right\}.$$

Ritt[9] によって導入された generalized inner product

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \quad (x, y \in X)$$

を用いると $s(X)$ は

$$s(X) = \sup\left\{\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle : x, y \in S_X\right\}$$

となる. 任意のバナッハ空間 X に対して $0 \leq s(X) \leq 2$. X がヒルベルト空間ならば, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は X の内積になるから $s(X) = 0$ である. またこの逆も成立する ([5]). X^* を X の双対空間とすると $s(X^*) = s(X)$. さらに $2 < p < \infty$ ならば

$$s(L_p) = \max_{t>0} \frac{2(t - t^{p-1})}{1 + t^p}.$$

---

[1]2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B20.
Keywords. James constant. skewness. the modulus of convexity. uniformly non-square.

また, $s(L_1) = s(L_\infty) = 2, s(L_2) = 0$ ([5]). バナッハ空間 X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在して

$$x, y \in S_X, \quad \left\|\frac{x-y}{2}\right\| > 1 - \delta \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$$

であるときを言う. バナッハ空間 X の James 定数 $J(X)$ を

$$J(X) = \sup\left\{ \min\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right) : x, y \in S_X \right\}$$

と定義する ([6]). 任意のバナッハ空間 X に対して $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$. X がヒルベルト空間ならば, $J(X) = 2$. 明らかに X が uniformly non-square であることと $J(X) < 2$ は同値. バナッハ空間 X の modulus of smoothness $\rho_X(\tau)$ を

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{ \frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1 : x, y \in S_X \right\}$$

と定義する. X が uniformly non-square であることと $\rho_X(1) < 1$ は同値 ([8]). 本研究はバナッハ空間 X における skewness と modulus of smoothness, James 定数との関係を与えることを目的とする.

Baronti-Papini[3] は X の skewness を $\rho_X(1)$ を使って次のように評価した.

定理 1 ([3]) X をバナッハ空間とする. このとき

$$s(X) \leq 2\rho_X(1).$$

上の不等式の等号条件を考える. X がヒルベルト空間ならば $s(X) = 0$ と $\rho_X(1) = \sqrt{2} - 1$ より $s(X) < 2\rho_X(1)$. さらに X が uniformly convex のとき

定理 2 ([3]) X が *uniformly convex* ならば

$$s(X) < 2\rho_X(1).$$

X が uniformly non-square ならば $s(X) = 2$, $\rho_X(1) = 1$ より $s(X) = 2\rho_X(1)$. しかしこの逆は成立しない. 実際, Day-James ℓ_∞-ℓ_1 space, 即ち次のノルムを持つ空間 $\mathbb{R}^2$ とする:

$$\|x\| = \begin{cases} \|x\|_\infty & \text{if} \quad x_1x_2 \geq 0 \\ \|x\|_1 & \text{if} \quad x_1x_2 \leq 0 \end{cases}, \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2).$$

これを X_0 とする. 明らかに X_0 は uniformly non-square である. また $\rho_{X_0}(1) = \frac{1}{2}$, $s(X_0) = 1$([8, 10]) より $s(X_0) = 2\rho_{X_0}(1)$.

Takahashi-Kato[11] は $\rho_X(1)$ と $J(X)$ の関係を次のように示した.

定理 3 ([11]) X をバナッハ空間とする. このとき

$$\rho_X(1) \leq 2\Big\{1 - \frac{1}{J(X)}\Big\}.$$

従って, 上記の結果を合わせると次が得られる.

定理 4 X をバナッハ空間とする. このとき

$$s(X) \leq 4\{1 - \frac{1}{J(X)}\}.$$

上の不等式の等号条件を考える. X が uniformly convex ならば, 定理 2 より

$$s(X) < 4\{1 - \frac{1}{J(X)}\}.$$

X が uniformly non-square でないならば, $s(X) = J(X) = 2$ より

$$s(X) = 2 = 4\{1 - \frac{1}{J(X)}\}.$$

Day-James ℓ_∞-ℓ_1 space のとき, これを X_0 とおくと $s(X_0) = 1$, $J(X_0) = 3/2$ より

$$s(X_0) = 1 < \frac{4}{3} = 4\{1 - \frac{1}{J(X_0)}\}.$$

また, $s(X)$ は $J(X)$ を使って下から評価できる.

補題 5 X をバナッハ空間とする. このとき任意の $0 < t \leq 1$ なる t に対して

$$s(X) \geq \frac{2(J(X) - 2 + t - t^2)}{t(1+t)}.$$

上の不等式の右辺を $f(t)$ とおく. $f(t)$ の最大値を計算することにより次が得られる.

定理 6 X をバナッハ空間とする．このとき

$$s(X) \geq 2 + 4(2 - J(X)) - 4\sqrt{(2 - J(X))(4 - J(X))}.$$

定理 4 と定理 6 を合わせると以下が得られる．

定理 7 X をバナッハ空間とする．このとき

$$2 + 4(2 - J(X)) - 4\sqrt{(2 - J(X))(4 - J(X))} \leq s(X) \leq 4\left\{1 - \frac{1}{J(X)}\right\}.$$

上の定理より明らかに $s(X) = 2$ と $J(X) = 2$ は同値．従って

系 8 ([5]) X をバナッハ空間とする．このとき X が *uniformly non-square* であることと $s(X) < 2$ は同値である．

参考文献

[1] D Amir, *Characterizations of inner product spaces,* Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, 1986.

[2] B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[3] M. Baronti and P. L. Papini, *Projections, skewness and related constants in real normed spaces,* Math. Pannonica, **3** (1992), 31–47.

[4] E. Casini, *About some parameters of normed linear spaces,* Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **80** (1986), 11–15.

[5] S. Fitzpatrick and B. Reznick, *Skewness in Banach spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **275** (1983), 587–597.

[6] J. Gao and K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces,* J. Aust. Math. Soc., A **48** (1990), 101–112.

[7] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces,* Ann. of Math., **80** (1964), 542-550.

[8] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan–von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces,* Stud. Math., **144** (2001), 275–295.

[9] R. K. Ritt, *A generalization of inner product,* Michigan Math. J., **3** (1955), 23–26.

[10] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces: a unified approach,* Proceedings of the 2nd international symposium on Banach and function spaces II, Kitakyushu, Japan, September 14–17, 2006. Yokohama Publishers. 191–220 (2008).

[11] Y. Takahashi and M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann–Jordan and James constants of a Banach space,* J. Math. Anal. Appl., **359** (2009), 602–609.