

不動点近似についてのささやかな疑問と模索

高橋非線形解析研究所 竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)

Takahashi Institute for Nonlinear Analysis

1 Introduction

著者は 2006 年に、高橋渉先生の [18] を教科書に [16] と [17] を参考書として不動点近似の学習を始めました。学習の際には、既存の理論と証明を著者自身が自然で分かりやすいと思える形に引き戻して理解するように努めていますが、学習の当初から疑問に感じることや学習するうちに疑問に思うことが出てきました。本稿では、この疑問点のいくつかと著者の模索について記述したいと思います。高橋渉先生との共同研究で得られた結果 [20] を扱い、実 Hilbert 空間で議論を行います。著者の論稿は、初学者を読者として想定しなるべく証明を付ける様にしていますが、本稿で扱う内容は必ずしも初学者向けではなく証明も多くの場合は省略しています。

C を実 Hilbert 空間 H の空ではない部分集合とし、 T を C から H への写像とします。 T の不動点の存在を仮定し或いは仮定しないまま、近似点列を構成し、この点列が不動点へ収束することを確認する議論を不動点近似と呼びます。本稿では次の約束をします。 N を正の整数、 R を実数とします。 H を実 Hilbert 空間とし、内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ norm を $\| \cdot \|$ とします。 C を H の部分集合とし、 T を C から H への写像とします。まず、不動点 (fixed point) の集合 $F(T)$ 、吸引点 (attractive point) の集合 $A(T)$ 、吸引不動点 (attractive fixed point) の集合 $A_F(T)$ を次の様に定義します。

- (1) $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$,
- (2) $A(T) = \{u \in H : \|Tx - u\| \leq \|x - u\| \text{ for } x \in C\}$,
- (3) $A_F(T) = \{u \in C : \|Tx - u\| \leq \|x - u\| \text{ for } x \in C\}$.

このとき、 $A_F(T) = A(T) \cap C \subset F(T)$ は自明です。

- (4) 任意の $x, y \in C$ について $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ を満たす T を非拡大写像と呼びます。
- (5) $\phi \neq A_F(T) = F(T)$ を満たす T を擬非拡大写像と呼びます。
- (6) $A(T) \neq \phi$ を満たす T を吸引写像と呼びます。

不動点が存在する非拡大 (nonexpansive) 写像及び擬非拡大 (quasi-nonexpansive) 写像は吸引 (attracted) 写像です。単に $A(T) \neq \phi$ と記述します。不動点近似の議論で頻繁に使用される距離射影について説明します。 H を実 Hilbert 空間とし、 D を H の空ではない閉凸部分集合とします。このとき、 H から D への写像 P_D が存在し、 $x \in H$ とすれば

- (7) $\langle x - P_Dx, P_Dx - y \rangle \geq 0 \quad \text{for } \forall y \in D,$
 $\|x - P_Dx\| = \inf\{\|x - y\| : y \in D\},$
 $\|P_Dx - P_Dy\| \leq \|x - y\| \quad \text{for } \forall y \in H$

を満たします。 P_D を H から D への距離射影と呼びます。

2 疑問と模索

本稿の主題に関わり、著者の中で密接に関連している疑問点を列挙します。

1. 何故 C に閉集合であることと凸集合であることを仮定するのか？
2. 擬非拡大 (quasi-nonexpansive) 写像という概念は不自然ではないか？
3. 不動点近似の理論は自然な考え方なのか？
4. Baillon の mean convergence theorem の仮定は不自然ではないか？

2.1 近似点列

もし、次の様な H の点列 $\{b_n\}$ と $\{w_n\}$ が生成できる場合は、 $\{b_n\}$ を Baillon タイプの点列 $\{w_n\}$ を Mann タイプの点列と呼ぶことにします。 $\{r_n\} \subset \mathbf{R}$ は $r_n \in [a, b] \subset (0, 1)$ を満たす実数列とします。

$$v_1 \in C, \quad v_{n+1} = T_n v_n, \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k, \quad w_1 \in C, \quad w_{n+1} = r_n + (1 - r_n) T w_n.$$

ここまでの条件だけでは、当然このような点列が生成できる保証はありません。この他に、強収束の議論で Browder タイプの点列と Halpern タイプの点列がよく使用されます。Hilbert 空間での Browder タイプの点列の収束は、集合列が明示されていないだけで構造的に Hybrid 法とよばれるタイプの収束に含まれます。Hybrid 法とは、集合列を構成し、初期点からこの集合列への射影が不動点に収束する近似点列となるようにする方法です。Halpern タイプの点列の収束は、Browder タイプの点列との対比によって示されます。したがって、Hilbert 空間での強収束は構造的には Hybrid 法とその仲間しか議論されていません (C に compact を仮定するなど特殊なケースは除きます)。弱収束の議論では、Mann タイプの点列が最も頻繁に使用されます。しかし、著者は Baillon タイプの点列が応用上はともかく理論的には重要な点列だと考えます。この様に著者が考える理由は本稿の議論で明らかになると思います。本稿では、ほとんど Baillon タイプの点列 $\{b_n\}$ についてのみ議論します。

2.2 C の条件

従来の不動点近似の議論の多くは、 C と T に次の条件を仮定します。

- (a) C は H の凸集合, (b) C は H の閉集合, (c) T は C から C への自己写像

C に (a)(b) を仮定すれば、 C は H の弱閉集合となります。 C と T にこの様な仮定を置く理由は、多くの場合次の点にあると考えられます。

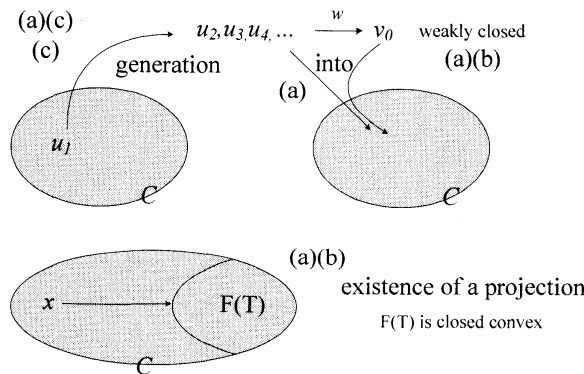
- (A) 近似点列 $\{u_n\}$ の生成を保証する。
- (B) 近似点列 $\{u_n\}$ が C の点列であることを保証する。
- (C) $F(T)$ が閉凸集合であること、 $F(T)$ への距離射影の存在を保証する。
- (D) $\{u_n\}$ が v_0 に弱収束 (強収束) すれば、 $v_0 \in C$ を保証する。

(A) の点列の生成を保証する条件ですが、Baillon タイプの点列の生成には C が凸集合であることも閉集合であることも必要ありません。(c) の条件、 T が C 上の自己写像であることだけを必要とします。この条件は、初期点に関わらず点列が生成できるために不可欠な条件ですから本稿では常にこの条件を仮定します。Mann タイプの点列の生成には C がある種の凸性を持つこと条件 (a) が必要で

す。この点で、Baillon タイプの点列と Mann タイプの点列には大きな相違があります。ただし、条件 (a) そのものが必ずしも必要とは限らず、次の様なケースも Mann タイプの点列を生成できます。

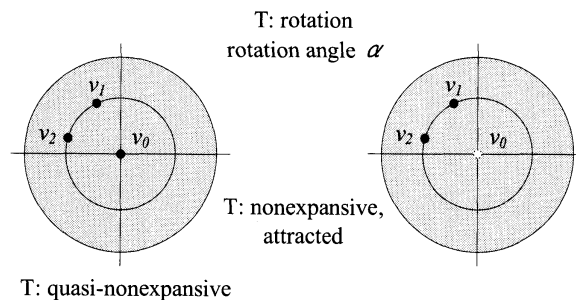
- Q を有理数の集合とします。
- $H = \mathbb{R}$, $C = (0, 1) \cap Q$, $u_1 \in C$, $\{\alpha_n\} \subset [a, b] \cap Q \subset (0, 1) \cap Q$ とします。
- $\{u_n\}$ を $u_{n+1} = \alpha_n u_n + (1 - \alpha_n) T u_n$ で生成します。

点列の生成が保証されれば、通常の不動点近似の議論は次の様に進みます。(B) の生成した点列 $\{u_n\}$ が C の点列であることを保証するために、この時点で、Baillon タイプの点列であっても C にある種の凸性が必要になります。(C)(D) については、 $\{u_n\}$ がある $v_0 \in F(T) \subset C$ に収束するために、 $F(T)$ が閉凸集合であることと C が弱閉であることを必要とします。このとき条件 (a)(b)、 C が閉凸集合であることが必要になります。ただし、 $F(T)$ が閉凸集合であることが重要なのではなく、 H から C への射影が存在することが本質的に重要です。 $F(T)$ が閉凸でなくても射影が存在することはあります。 $F(T)$ が閉凸集合であることは射影の存在を保証します。



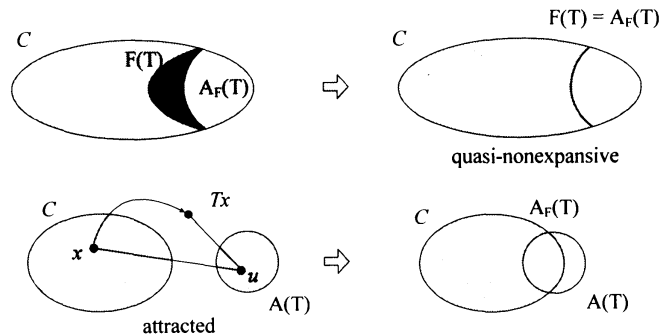
2.3 Quasi-nonexpansive という概念

擬非拡大 (quasi-nonexpansive) 写像という概念については最初から拭いきれない違和感を感じました。 $H = \mathbb{R}^2$ とし v_0 を中心とする半径 1 の閉円を C とします。 T を v_0 を中心とする回転角 α の回転とします。 v_0 は原点と考えていただいて結構です。次の図を参照してください。



このとき、 T は明らかに非拡大写像であり同時に擬非拡大写像で吸引写像です。 v_0 が唯一の不動点であることも明らかだと思います。右図の様に C から 1 点 v_0 を除くと、 T の性質は何も変わらないにも関わらず、 T は擬非拡大写像ではなくなってしまいます。 T が非拡大写像であり吸引写像である

という性質は変化しません。つまり、擬非拡大写像は非拡大写像の素直な拡張概念ではないことになります。\$T\$ を \$C\$ 上の非拡大自己写像とします。既存の知識では、\$C\$ が閉凸集合であることを仮定し、軌道 \$\{v_n\}\$ が有界となる初期点 \$v_1\$ が1つ存在するときに、この非拡大写像 \$T\$ が擬非拡大写像となることが、Baillon の mean convergence theorem によって保証されます。これより少し狭くなりますが、分かりやすい条件は \$C\$ が有界閉凸集合のときです。吸引写像も総てのケースで非拡大写像の拡張概念となる訳ではありません。しかし、擬非拡大写像と吸引写像では、非拡大写像をカバーする \$C\$ の条件が大幅に異なります。\$T\$ による軌道 \$\{v_n\}\$ が有界となる初期点 \$v_1\$ が1つ存在すれば、本稿で扱う高橋渉先生と著者が得た結果によって吸引写像は非拡大写像の拡張概念になります。やはり少し狭くなりますが、\$C\$ が有界であれば吸引写像は非拡大写像の拡張概念です。擬非拡大写像という概念の不自然さは、不動点近似の枠組みがおかしいのではないかという疑念に繋がります。特殊なケースを除いて、不動点近似の議論は擬非拡大写像及び擬非拡大写像に帰着できる枠組みの中で行われているからです。Banach 空間での不動点近似の議論も、やはり同様の考え方で不動点近似の枠組みが成立しています。Banach 空間では、不動点近似にノルムを使用するとは限りませんので、擬非拡大写像といった場合は語弊があります。



図の上段の様に、従来の不動点近似の議論は実質的には吸引不動点 $v_0 \in A_F(T)$ への近似を議論しています。吸引不動点以外の不動点への近似は手つかずの荒野です。吸引不動点ではない不動点だけを持つ写像の例は簡単に構成できます。事実がこの様であるならば、上図下段の様に、従来の不動点近似の枠組みの不動点集合 $F(T)$ を吸引点集合 $A(T)$ に換えて、吸引点近似の枠組みで考える方が著者は自然だと思えます。吸引点の集合 $A(T)$ を考え、吸引点への近似点列を構成します。この近似点列は \$C\$ の点である必要はありません。この点列が吸引点 $v_0 \in A(T)$ に収束するとき、たまたま $v_0 \in C$ であれば、 v_0 は吸引不動点 $A_F(T)$ の要素になります。この意見は従来の議論を否定するものではありません。吸引不動点 $A_F(T)$ の方が吸引点 $A(T)$ よりも条件が強いわけですから、 $A_F(T)$ の性質は分かるけれど、 $A(T)$ についてはよく分からないという状況が現れます。特に、Banach 空間の議論などではこの点が顕著だと予想されます。考え方の基本的な枠組みについての意見です。

2.4 Baillon の mean convergence theorem

Theorem 2.1 (Baillon [2]). \$C\$ を \$H\$ の空ではない閉凸集合とし、\$T\$ を \$C\$ から \$C\$ への非拡大写像とします。\$\{v_n\}\$ と \$\{b_n\}\$ を、任意の \$n \in \mathbb{N}\$ について

$$v_1 \in C, \quad v_{n+1} = Tv_n, \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$$

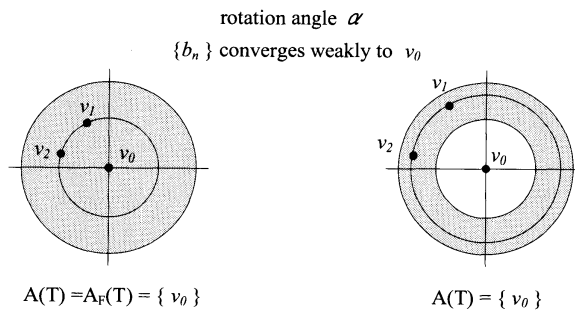
で定義された点列とします。このとき、\$\{v_n\}\$ が有界であれば

- (1) $F(T)$ は C の空ではない閉凸集合,
- (2) $\exists v_0 \in F(T) : b_n \xrightarrow{w} v_0, P v_n \rightarrow v_0$

が成立します。ただし、 P は H から $F(T)$ への距離射影です。

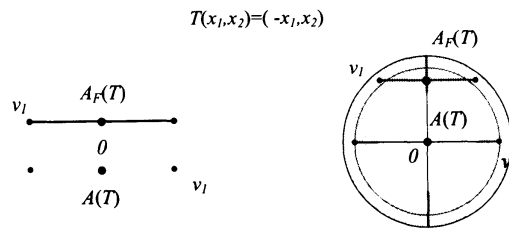
この定理は Baillon の mean convergence theorem と呼ばれます。また、非線形エルゴード定理と呼ばれることもあります。この定理に著者は2つの違和感を持ちました。1つはエルゴード定理という名称です。もう1つは C が閉集合で凸集合という定理の仮定です。著者は僅かですが工学の経験を持ちます。エルゴード性という、反射的に、ある図形上の(周期的な)ポアンカレ回帰の様なものを想像します。つまり、軌道 $\{v_n\}$ が(均等に)ある図形上に稠密に分布するような姿を想像します。この定理は、 T が縮小写像の場合など軌道 $\{v_n\}$ が一か所に集中するようなケースもカバーします。エルゴード定理という名称と定理の実質が一致していないのではないかという感覚を持ちました。

また、この定理を初めて見たときに、著者は直観的に b_m を軌道 $\{v_n\}$ の m 個の点の重心としてイメージしました。もし、軌道 $\{v_n\}$ がある図形の上に均等に稠密に分布すれば、 T に何らかの条件が必要だとしても、軌道の m 個の点の重心 b_m は図形の重心に収束して当然と思われまます。図形の重心は、この図形や C の中にあるとは限りません。また、図形の重心が C の中にあるとしても、 C が凸であることや、 C にはっきりした縁(ふち)があるかなどということとは無縁です。つまり、Baillon の定理から、この仮定を除いてしまっても $\{b_n\}$ は収束すると思われまます。Baillon の定理の仮定は、異常に狭い範囲の集合に C を限定しているように思われまます。ただし、図形の重心は C の中にあるとは限りませんから、収束先は不動点とは限りません。この直観を補強する簡単な例を2つ示します。 v_0 を中心とした回転 T を考えています。 T は明らかに非拡大写像です。 v_1 を初期点とすれば、左図では、Baillon の定理によって点列 $\{b_n\}$ は $v_0 \in F(T)$ に収束します。左図の閉円板の真ん中をくり抜いたものが右図です。見やすい様に軌道を少し外側に寄せています。このとき、点列 $\{v_n\}$ と $\{b_n\}$ を取り巻く状況は何も変化しません。図形に穴が開いたかどうかなどはこの収束に無関係なはずです。右図でも $\{b_n\}$ は v_0 に収束するはずです。軌道がエルゴード的かどうかということとも無関係です。唯一異なる点は、 $v_0 \notin F(T)$ という事です。この収束を議論する場合 C の凸性は無縁です。



もっと簡単な例を考えます。次図の様に左右を入れ替える非拡大写像 T を考えます。図の左の様に、 C が2点だけのケースでも、 $\{b_n\}$ は明らかに中点に収束します。軌道 $\{v_n\}$ は2点を交互に周回します。中点は不動点ではありませんが吸引点です。右図の様に、真ん中に穴の開いたトーラス C を考えます。軌道 $\{v_n\}$ は2点を交互に周回しますが、初期点 v_1 の位置によって、 $\{b_n\}$ は不動点に収束する場合と吸引点に収束する場合があります。初期点の位置によって、中点が C の中にある場合とない場合がありますから当然です。吸引点 $A(T)$ は、この円の垂直な直径を含む対称の軸になりま

す。また、吸引不動点 $A_F(T)$ は、この軸がトラスと重なる部分で、上下に分割された2つの線分になります。図では太線で書いてあります。



もう1つ重要な点は、このような収束を考えると意味があるのかということです。しかし、ここに挙げた例だけでも、吸引点より不動点が重要だとは、一概には言い切れないと著者には思われます。

3 Baillon の定理の拡張

吸引点と吸引点の集合 $A(T)$ の持つ重要な性質を提出します。次の Lemma は、研究者なら誰もが知っていて誰も抜き出さなかったものだと思います。

Lemma 3.1. C を実 Hilbert 空間 H の空ではない集合とし、 T を C 上の自己写像とします。 $u \in A(T)$ とするとき、 $\|x_0 - u\| = \min\{\|x - u\| : x \in C\}$ を満たす $x_0 \in C$ が唯一存在すれば、 $x_0 \in F(T)$ です。

Proof. $Tx_0 \in C$, $\|Tx_0 - u\| \leq \|x_0 - u\|$ と仮定より $Tx_0 = x_0$ です。 □

C に閉凸を仮定し、この Lemma を見慣れた形にすると次の系になります。

Lemma 3.2. C を実 Hilbert 空間 H の空ではない閉凸部分集合とし、 T を C から C への写像とします。このとき、 $A(T) \neq \emptyset$ ならば $F(T) \neq \emptyset$ です。

Proof. 仮定より $u \in A(T)$ が存在します。 C は空ではない閉凸集合ですから、 H から C への距離射影 P_C が存在します。このとき、 $x_0 = P_C u \in C$ が一意に決まり、Lemma 3.1 の条件を満たします。 □

Lemma 3.1, 3.2 は非常に簡単な事実ですが、不動点近似の議論の多くはこの簡単な事実に依存しています。大袈裟にいうと、Brouwer の不動点定理とは異なるもう1つの不動点原理です。Brouwer の不動点定理は、通常は R^n の有界閉凸集合 C と C 上の連続な自己写像 f の不動点を問題にします。しかし、この凸性は本質的ではなく位相的な条件だけを使用する不動点原理です。不動点近似の議論で使用される C と T の性質は位相同型な変形に耐えません。Lemma 3.1, 3.2 は、この様な状況下での不動点原理で Brouwer の定理とは性質が異なります。話を見やすくするため C を閉凸とします。 $u \in C$ の場合、任意の $x \in C$ について $\|Tx - u\| \leq \|x - u\|$ から、 $x = u$ として $\|Tu - u\| \leq 0$ を導く手法は、不動点近似では常套的なものです。この場合、 u は吸引不動点です。 $u \notin C$ の場合に、 $x_0 = P_C u$ は吸引不動点とは限りません。吸引点 u を見つければ、吸引不動点ではない不動点 x_0 を見つけられる可能性があります。次の Lemma は、吸引点の集合 $A(T)$ の持つ重要な性質を記述します。吸引点の集合は、 $A(T) = \emptyset$ の場合を含めて自動的に閉凸集合になるという顕著な性質を持ちます。

Lemma 3.3. C を実 Hilbert 空間 H の空ではない部分集合とし、 T を C から H への写像とします。このとき、 $A(T)$ は閉凸集合です。

Proof. $A(T)$ が閉集合であることを示します。 $\{z_n\} \subset A(T)$ を $z \in H$ に収束する点列、 $x \in C$ とします。任意の $\varepsilon > 0$ について充分大きな n をとると、 $\|z - z_n\| < \varepsilon/2$, $\|x - z_n\| < \|x - z\| + \varepsilon/2$ となります。したがって、 $z_n \in A(T)$ ですから

$$\|z - Tx\| \leq \|z - z_n\| + \|z_n - Tx\| \leq \|z - z_n\| + \|z_n - x\| < \|z - x\| + \varepsilon$$

となって、 $z \in A(T)$ です。 $A(T)$ が凸集合を示します。 $z_1, z_2 \in A(T)$, $\alpha \in [0, 1]$, $z = \alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2$ とします。 $x \in C$ とすれば

$$\begin{aligned} \|z - Tx\|^2 &= \|\alpha(z_1 - Tx) + (1 - \alpha)(z_2 - Tx)\|^2 \\ &= \alpha\|z_1 - Tx\|^2 + (1 - \alpha)\|z_2 - Tx\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|z_1 - z_2\|^2 \\ &\leq \alpha\|z_1 - x\|^2 + (1 - \alpha)\|z_2 - x\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|z_1 - z_2\|^2 \\ &= \|\alpha(z_1 - x) + (1 - \alpha)(z_2 - x)\|^2 = \|z - x\|^2. \end{aligned}$$

したがって、 $z \in A(T)$ となります。 □

Hilbert 空間の不動点近似の議論では、 C が閉凸集合であることを仮定し $F(T)$ が閉凸集合であることを導きます。この Lemma の意味するところは、 $F(T)$ が閉凸集合であることは $A(T)$ が閉凸集合であることの反映だということになります。また、 $A(T)$ が閉凸集合であることから、 H から $A(T)$ への距離射影が存在します。つまり、 $F(T)$ が介在しませんから、 C が閉集合であることや凸集合であることをまったく仮定せずに、 Baillon タイプの点列 $\{b_n\}$ の吸引点近似の議論が展開できることとなります。この様にして、高橋渉先生と著者は次の定理 [20] を得ました。

Theorem 3.4 (Takahashi-Takeuchi [20]). C を H の空ではない集合とし、 T を C から C への *generalized hybrid* 写像とします。 $\{v_n\}$ と $\{b_n\}$ を、任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$v_1 \in C, \quad v_{n+1} = Tv_n, \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$$

で定義された点列とします。このとき、 $\{v_n\}$ が有界であれば

- (1) $A(T)$ は C の空ではない閉凸集合,
- (2) $\exists v_0 \in A(T) : b_n \xrightarrow{w} v_0, Pv_n \rightarrow v_0$

が成立します。ただし、 P は H から $A(T)$ への距離射影です。

generalized hybrid と呼ばれる写像族について説明します。2008 年頃から、高橋先生、青山先生、高坂先生、茨木先生、家本先生、他によって非拡大写像以外の有用な写像族の研究が進められていました： [1], [4]–[6], [10], [11]。2010 年に、P.Kocourek, W.Takahashi, J.-C.Yao [9] は *generalized hybrid* と呼ばれる写像族の概念を提出しました。 C を実 Hilbert 空間 H の空ではない部分集合とし、 T を C 上の自己写像とします。ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して、任意の $x, y \in C$ について

$$\alpha\|Tx - Ty\|^2 + (1 - \alpha)\|x - Ty\|^2 \leq \beta\|Tx - y\|^2 + (1 - \beta)\|x - y\|^2$$

を満たす写像 T は、 (α, β) -*generalized hybrid* と呼ばれます。彼らはこの写像族が *nonexpansive*, *non-spreading*, *hybrid* などの有用な写像族を包含する広範な族であることを示し、 C が閉凸で $\{T^n x\}$ が有界である様な $x \in C$ が存在すれば $F(T) \neq \emptyset$ であり、 Baillon タイプの不動点への近似定理が成立する

ことを示しました [9]。本稿で提出した定理は、この定理の拡張にあたり、その性質から *generalized hybrid* を越えて更に広い範囲の写像族に該当すると思われます。

付記: 2.4 節の最初の例で、回転角 α が円周の n 等分角でない場合に、この軌道 $\{v_n\}$ はエルゴード性を持ちます。軌道はこの円周の稠密な部分集合を構成します。19 世紀初頭、ヤコービは複素平面の円周上で考えた複素関数の周期を研究しました。この結果はヤコービの研究の中で得られたとされます。著者は確認していませんが、数論的な手法が使用されたそうです。エルゴード性の研究は、ボルツマンの命名以前に、複素関数及び数論の研究の中に現れていたこととなります。軌道 $\{v_n\}$ が円周の稠密な部分集合となることを、鈴木智成先生が 2006 年の講究録 [13] に記述されています。学生時代の上手ではない証明の例としておられましたが、返って考え方の道筋が良く分かります。著者はこの証明しか知りません。この *proof line* を著者なりに整理すると次の様になります。

proof line. 回転角 α が円周の n 等分角でない場合には、軌道 $\{v_n\}$ はすべて異なる点になります。円周はコンパクトですから、円周のある点 w に強収束する部分列 $\{v_{n_i}\}$ が存在します。 w を中心に半径 $\varepsilon/4 > 0$ の円内に 2 点 v_{n_i} と v_{n_j} が存在します。 $n_j > n_i$ とし v_{n_i} と v_{n_j} の元の軌道での添え字を $n_i = m$, $n_j = m + d$ とします。このとき、2 点の距離は $\|v_{n_i} - v_{n_j}\| < \varepsilon/2$ となります。この距離は厳密には円周の弦ですが、 ε が小さければ円弧と弦は大差ありませんから、円周上の距離 a は ε より小さくなります。余裕を持たせて $\|v_{n_i} - v_{n_j}\| < \varepsilon/2$ としています。 $v_{n_i} = v_m = u_1$ 、任意の $k \in \mathbb{N}$ について $u_k = v_{m+kd}$ として部分軌道 $\{u_k\}$ を作ります。この部分軌道は、円周上を ε より小さな距離 a を保ちながら回転します。 ε は任意にとれますから、軌道 $\{v_n\}$ は円周の稠密な部分集合となります。□

References

- [1] Aoyama, K., Iemoto, S., Kohsaka, F., Takahashi, W. "Fixed point and ergodic theorems for λ -hybrid mappings in Hilbert spaces", *J. Nonlinear Convex Anal.* **11** (2010), 335–343.
- [2] J.-B. Baillon. "Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans un espace de Hilbert", *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* **280** (1975), 1511-1514.
- [3] R. E. Bruck, "A simple proof of the mean ergodic theorems for nonlinear contractions in Banach spaces", *Israel J. Math.* **32** (1974), 107–116.
- [4] T. Ibaraki and W. Takahashi, "Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications", *Taiwanese J. Math.*, **11** (2007), 929–944.
- [5] T. Ibaraki and W. Takahashi, "Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces", *J. Nonlinear Convex Anal.*, **71** (2009), 21–32.
- [6] S. Iemoto and W. Takahashi, "Approximating fixed points of nonexpansive mappings and non-spreading mappings in a Hilbert space", *Nonlinear Anal.*, **71** (2009), 2082–2089.
- [7] S. Ito and W. Takahashi, "The common fixed points theory of single-valued mappings and multi-valued mappings", *Pacific J. Math.*, **79** (1978), 493–508.
- [8] Y. Kimura and W. Takahashi, "A Generalized Proximal Point Algorithm and Implicit Iterative Schemes for a Sequence of Operators on Banach spaces", *Math. Set-Valued Anal* **48** (2007), 1–9.
- [9] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, "Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces", *Taiwanese J. Math.* **14** (2010), 2497–2511.
- [10] F. Kohsaka and W. Takahashi, "Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces", *SIAM. J. Optim.* **19** (2008), 824–835.

- [11] F. Kohsaka and W. Takahashi, "Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces", Arch. Math. 91 (2008), 166–177.
- [12] W. R. Mann, "Mean value methods in iteration", Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 506–510.
- [13] T. Suzuki, "非拡大半群の共通不動点集合", (バナッハ空間及び関数空間の構造の研究) 数理解析研究所講究録, (2006), 1520: 70-77.
- [14] W. Takahashi, "Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications", Proceeding of Workshop on Fixed Point Theory (Kzimirz Donly, 1997), vol 51, (1997), 277–292.
- [15] W. Takahashi, "A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space", Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 253–256.
- [16] W. Takahashi, "Nonlinear Functional Analysis", Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [17] W. Takahashi, "Convex Analysis and Approximation of Fixed Points", Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [18] W. Takahashi, "Introduction to Nonlinear and Convex Analysis", Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
- [19] W. Takahashi, Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal. 11 (2010), 79–88.
- [20] W. Takahashi and Y. Takeuchi, "Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space", J. Nonlinear Convex Anal. 12 No 2 (2011), 399–406.
- [21] W. Takahashi and M. Toyoda, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings", J. Optim. Theory Appl. 118 no.2 (2003), 417–428.
- [22] W. Takahashi and J.-C. Yao, "Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces", Taiwanese J. Math. 15 (2011), 457–472.