数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 123-126

ISHIKAWA による有限個の非拡大写像族に関する収束定理

九州工業大学　　鈴木 智成　(Tomonari SUZUKI)

1. 序

1976 年, 1979 年, Ishikawa は次の非常に素晴らしい定理を発表している. 30 年以上経過した現在でも錆びることなく, ピッカピカに輝いているように筆者には見える.

定理 1 (Ishikawa [1]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = (1/2)\, Tx_n + (1/2)x_n$$

で定義する. このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に収束する.

定理 2 (Ishikawa [2]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. $S_j x = (1/2)\, T_j x + (1/2)x$ と置く. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \left[\prod_{n_{k-1}=1}^{n} \left[S_k \prod_{n_{k-2}-1}^{n_{k-1}} \left[S_{k-1} \cdots \left[S_3 \prod_{n_1=1}^{n_2} \left[S_2 \prod_{n_0=1}^{n_1} S_1\right]\right] \cdots\right]\right]\right] x_1$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j : j = 1, 2, \cdots, k\}$ の共通不動点へ収束する.

定理 2 において $k = 1$ とすると, 定理 1 になる. すなわち, 定理 2 は定理 1 の拡張定理である.

定理 1 は 1 つの写像に関する収束定理であり, 定理 2 は有限個の写像族に関する収束定理である. 無限個の写像族に関する収束定理を証明したいと考えるのは自然な流れであり, 実際, 以下の定理が証明されている.

定理 3 (Suzuki [4]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. $[0, 1]$ 区間の数列 $\{\alpha_n\}$ は

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \alpha_n > 0 \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$$

MSC (2000). 47H09, 47H10, 47J25.
キーワード. 非拡大写像, 不動点, 収束定理.
住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

を満たしているとする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{j=1}^{n-1} {\alpha_n}^j\Big) T_1 x_n + \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} {\alpha_n}^j T_{j+1} x_n\Big) + \frac{1}{2} x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点へ収束する.

無限個の写像族に関する収束定理を証明することができたが, Ishikawa の定理 (定理 2) とは大きく形が異なる. Ishikawa の定理に似た定理で — できたら拡張定理として — 無限個の写像族に関する収束定理を証明することはできるか, という問題が残っている.

2. 定理 2 の「拡張」定理

論文 [3] で以前紹介したが, ある数学者は定理 2 に関して以下のような発言をしている: 「Ishikawa のこの定理はあまり知られていない. 非常に理解し難い定理であるというのが, たぶん, 理由の 1 つに挙げられるだろう」 ここでの「理解し難い」が実際に何を指すのかは定かでないが, 恐らく証明を含めた定理全般を指すような気がする. 少なくとも命題そのものを「理解し易い」と言う人はいないであろう.

$k = 4$ の場合の iteration を記述する.

$$\begin{aligned}
x_2 =& S_4S_3S_2S_1x_1 \\
x_3 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_2 \\
x_4 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_3 \\
x_5 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1 \\
& S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_4 \\
x_6 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1 \\
& S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1 \\
& S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_5 \\
x_7 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_1 \\
& S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1 \\
& S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1 \\
& S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2 \\
& S_1S_3S_2S_1x_6.
\end{aligned}$$

x_1 に対して, 1 番目に S_1 を作用させ, 2 番目に S_2, 3 番目に S_3, 4 番目に S_4 を作用させて x_2 ができる. 5 番目（番号は通算の番号）に S_1, 6 番目に S_2, 7 番目に S_3, 8 番目に S_1, 9 番目に S_2, 10 番目に S_1, 11 番目に S_1, 12 番目に S_2, 13 番目に S_3, 14 番目に S_4 を作用させて x_3 ができる. この事実を元に定理 2 の $k=4$ の場合を以下のように書き換える.

定理 4 (Ishikawa [2]). $k=4$ とする. E, C, $\{T_j\}$, $\{S_j\}$ は定理 2 と同じとする. $\{1,2,3,4\}$ から $\mathbb{N}$ の部分集合への写像 I を

$$\begin{aligned} I(1) &= \{1,5,8,10,11,15,18,20,21,24,26,27,29,30,31,\cdots\} \\ I(2) &= \{2,6,9,12,16,19,22,25,28,32,\cdots\} \\ I(3) &= \{3,7,13,17,23,33,\cdots\} \\ I(4) &= \{4,14,34,\cdots\} \end{aligned}$$

で定める. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = S_{I^{-1}(n)} x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j\}$ の共通不動点へ収束する.

ただし, これは命題とは呼べないかも知れない. というのも, 写像 I の定義が曖昧だからである. iteration は厳密に定義されているのだが, 写像 I を厳密に定義する方法を筆者は知らない. $k=4$ の場合で, 写像 I を厳密に定義できるような収束定理は作れないだろうか？

2 変数関数 $\mathrm{pow}(2,\cdot,\cdot)$ を次のように帰納的に定義する:

$$\mathrm{pow}(2,1,n) = 2^n, \qquad \mathrm{pow}(2,k+1,n) = 2^{\mathrm{pow}(2,k,n)}.$$

この定義により, $\mathrm{pow}(2,2,n) = 2^{(2^n)}$, $\mathrm{pow}(2,3,n) = 2^{(2^{(2^n)})}$ となる. すなわち, 第 2 引数の値の分だけべきを取る. この関数を用いると, 定理 4 に似た定理を記述することができる.

定理 5. $k=4$ とする. E, C, $\{T_j\}$, $\{S_j\}$ は定理 2 と同じとする. $\{1,2,3,4\}$ から $\mathbb{N}$ の部分集合への写像 I を

$$\begin{aligned} I(1) &= \mathbb{N} \setminus \{\mathrm{pow}(2,1,n) : n \in \mathbb{N}\} \\ I(2) &= \{\mathrm{pow}(2,1,n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\mathrm{pow}(2,2,n) : n \in \mathbb{N}\} \\ I(3) &= \{\mathrm{pow}(2,2,n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\mathrm{pow}(2,3,n) : n \in \mathbb{N}\} \\ I(4) &= \{\mathrm{pow}(2,3,n) : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

で定める. 点列 $\{x_n\}$ を定理4のように定める. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j\}$ の共通不動点へ収束する.

この方法のメリットは, 定理を厳密に書き下す — これができなければ定理と呼ぶことはできないが — ことができるだけでなく, 自然に無限個の写像族へ拡張することができることである.

定理 6. C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. $S_j x = (1/2)\,T_j x + (1/2)x$ と置く. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ の部分集合への写像 I を

$$I(1) = \mathbb{N} \setminus \{\mathrm{pow}(2,1,n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$I(k) = \{\mathrm{pow}(2,k-1,n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\mathrm{pow}(2,k,n) : n \in \mathbb{N}\} \qquad (k \geq 2)$$

で定める. 点列 $\{x_n\}$ を定理4のように定める. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点へ収束する.

3. 最後に

定理2の形のままでは, 無限個の写像族への拡張はできない. そこで, 命題の形を変えることで, 「拡張」することができた. しかしながら, これで問題が解決した訳ではない. 「拡張」とカッコ書きしなければならないのは, 定理6が定理2の拡張定理ではないことによる. (ただし, 定理5の拡張定理にはなっている) 本質的な意味を考えれば拡張定理であると言うことができるが, 定理6を使って定理2を証明することはできない.

では, 厳密な意味での定理2の拡張定理を証明することはできるだろうか? 補助定理的な — あまり美しくない — 拡張定理を書くことはできるが, 筆者はこの問題に対する答えを持っていない.

参考文献

[1] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71. MR0412909

[2] ———, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501. MR0539430

[3] T. Suzuki, 一般のＢＡＮＡＣＨ空間における非拡大写像族の共通不動点への収束定理 in The Structure of Banach Spaces and its Application (K.-S. Saito Ed.), RIMS Kokyuroku, 1399 (2004), pp 71–75.

[4] ———, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2005** (2005), 103–123. MR2172156