

Title	ISHIKAWAによる有限個の非拡大写像族に関する収束定理 (非線形解析学と凸解析学の研究)
Author(s)	鈴木, 智成
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1821: 123-126
Issue Date	2013-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/194677
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ISHIKAWA による有限個の非拡大写像族に関する収束定理

九州工業大学

鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

1976 年, 1979 年, Ishikawa は次の非常に素晴らしい定理を発表している. 30 年以上経過した現在でも錆びることなく, ピッカピカに輝いているように筆者には見える.

定理 1 (Ishikawa [1]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = (1/2)Tx_n + (1/2)x_n$$

で定義する. このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に収束する.

定理 2 (Ishikawa [2]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. $S_j x = (1/2)T_j x + (1/2)x$ と置く. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \left[\prod_{n_{k-1}=1}^n \left[S_k \prod_{n_{k-2}=1}^{n_{k-1}} \left[S_{k-1} \cdots \left[S_3 \prod_{n_1=1}^{n_2} \left[S_2 \prod_{n_0=1}^{n_1} S_1 \right] \cdots \right] \right] \right] \right] x_1$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j : j = 1, 2, \dots, k\}$ の共通不動点へ収束する.

定理 2 において $k = 1$ とすると, 定理 1 になる. すなわち, 定理 2 は定理 1 の拡張定理である.

定理 1 は 1 つの写像に関する収束定理であり, 定理 2 は有限個の写像族に関する収束定理である. 無限個の写像族に関する収束定理を証明したいと考えるのは自然な流れであり, 実際, 以下の定理が証明されている.

定理 3 (Suzuki [4]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. $[0, 1]$ 区間の数列 $\{\alpha_n\}$ は

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0 \quad \text{および} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$$

MSC (2000). 47H09, 47H10, 47J25.

キーワード. 非拡大写像, 不動点, 収束定理.

住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.

電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

x_1 に対して, 1 番目に S_1 を作用させ, 2 番目に S_2 , 3 番目に S_3 , 4 番目に S_4 を作用させて x_2 ができる. 5 番目 (番号は通算の番号) に S_1 , 6 番目に S_2 , 7 番目に S_3 , 8 番目に S_1 , 9 番目に S_2 , 10 番目に S_1 , 11 番目に S_1 , 12 番目に S_2 , 13 番目に S_3 , 14 番目に S_4 を作用させて x_3 ができる. この事実を元に定理 2 の $k = 4$ の場合を以下のように書き換える.

定理 4 (Ishikawa [2]). $k = 4$ とする. $E, C, \{T_j\}, \{S_j\}$ は定理 2 と同じとする. $\{1, 2, 3, 4\}$ から \mathbb{N} の部分集合への写像 I を

$$I(1) = \{1, 5, 8, 10, 11, 15, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 29, 30, 31, \dots\}$$

$$I(2) = \{2, 6, 9, 12, 16, 19, 22, 25, 28, 32, \dots\}$$

$$I(3) = \{3, 7, 13, 17, 23, 33, \dots\}$$

$$I(4) = \{4, 14, 34, \dots\}$$

で定める. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = S_{I^{-1}(n)}x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j\}$ の共通不動点へ収束する.

ただし, これは命題とは呼べないかも知れない. というのも, 写像 I の定義が曖昧だからである. iteration は厳密に定義されているのだが, 写像 I を厳密に定義する方法を筆者は知らない. $k = 4$ の場合で, 写像 I を厳密に定義できるような収束定理は作れないだろうか?

2 変数関数 $\text{pow}(2, \cdot, \cdot)$ を次のように帰納的に定義する:

$$\text{pow}(2, 1, n) = 2^n, \quad \text{pow}(2, k+1, n) = 2^{\text{pow}(2, k, n)}$$

この定義により, $\text{pow}(2, 2, n) = 2^{(2^n)}$, $\text{pow}(2, 3, n) = 2^{(2^{(2^n)})}$ となる. すなわち, 第 2 引数の値の分だけべきを取る. この関数を用いると, 定理 4 に似た定理を記述することができる.

定理 5. $k = 4$ とする. $E, C, \{T_j\}, \{S_j\}$ は定理 2 と同じとする. $\{1, 2, 3, 4\}$ から \mathbb{N} の部分集合への写像 I を

$$I(1) = \mathbb{N} \setminus \{\text{pow}(2, 1, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$I(2) = \{\text{pow}(2, 1, n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\text{pow}(2, 2, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$I(3) = \{\text{pow}(2, 2, n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\text{pow}(2, 3, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$I(4) = \{\text{pow}(2, 3, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

で定める. 点列 $\{x_n\}$ を定理 4 のように定める. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j\}$ の共通不動点へ収束する.

この方法のメリットは, 定理を厳密に書き下す — これができなければ定理と呼ぶことはできないが — ことができるだけでなく, 自然に無限個の写像族へ拡張することができることである.

定理 6. C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする. $S_j x = (1/2)T_j x + (1/2)x$ と置く. \mathbb{N} から \mathbb{N} の部分集合への写像 I を

$$I(1) = \mathbb{N} \setminus \{\text{pow}(2, 1, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$I(k) = \{\text{pow}(2, k-1, n) : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{\text{pow}(2, k, n) : n \in \mathbb{N}\} \quad (k \geq 2)$$

で定める. 点列 $\{x_n\}$ を定理 4 のように定める. このとき, $\{x_n\}$ は $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点へ収束する.

3. 最後に

定理 2 の形のままで, 無限個の写像族への拡張はできない. そこで, 命題の形を変えることで, 「拡張」することができた. しかしながら, これで問題が解決した訳ではない. 「拡張」とカッコ書きしなければならないのは, 定理 6 が定理 2 の拡張定理ではないことによる. (ただし, 定理 5 の拡張定理にはなっている) 本質的な意味を考えれば拡張定理であると言うことができるが, 定理 6 を使って定理 2 を証明することはできない.

では, 厳密な意味での定理 2 の拡張定理を証明することはできるだろうか? 補助定理的な — あまり美しくない — 拡張定理を書くことはできるが, 筆者はこの問題に対する答えを持っていない.

参考文献

- [1] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71. MR0412909
- [2] ———, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501. MR0539430
- [3] T. Suzuki, 一般の BANACH 空間における非拡大写像族の共通不動点への収束定理 in *The Structure of Banach Spaces and its Application* (K.-S. Saito Ed.), RIMS Kokyuroku, 1399 (2004), pp 71–75.
- [4] ———, *Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2005** (2005), 103–123. MR2172156