数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 197-204

Multivariate Meixner-Pollaczek polynomials and an application

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 若山 正人 (Masato WAKAYAMA)
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University (述)
九州大学大学院数理学府 井上 公人 (記)

ここでの内容は, Jacques Faraut 氏との共同研究 [FW1, FW2] に基づくものである.

1 一変数の場合と例

一変数の Meixner-Pollaczek polynomial (MP) とは, 以下で定義される多項式である [AAR].

$$P_m^{(\frac{\nu}{2})}(\lambda;\phi)=\frac{(\nu)_m}{m!}e^{im\phi}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,\frac{\nu}{2}+i\lambda\\ \nu\end{matrix};1-e^{-2i\phi}\right)\qquad(0<\phi<\pi).$$

Meixner 1934, Pollaczek 1949 (rediscovered)

この多項式については, 直交性や母関数, 微分方程式, 差分方程式, 積分表示式が知られている. 以下では Meixner-Pollaczek polynomial が現れる例を述べる.

Example 1.1 (Meixner(-Pollaczek) process ($\subset$ Levi process) in Finance). 一変数の場合は W. Schoutens (2001) [Sc] によるが, 今回の多変数化によってこの process の時間多変数化が考えられると期待される.

Example 1.2 (Gaussian unitary ensemble). $\mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})$ を n 次のエルミート行列全体, μ_n を $\mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})$ 上の固有値分布とすると, そのモーメントは

$$\mathfrak{M}_{2m}(\mu_n)=\frac{1}{n}\int_{\mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})}\mathrm{tr}(X^{2m})\mathbb{P}(dX),$$
$$\mathbb{P}(dX)=Ce^{-\mathrm{tr}(X^2)}\lambda(dX)\text{: Gaussian probability on }\mathrm{Herm}(n,\mathbb{C})$$

で与えられる (C は正規化定数). $C(m,n)$ を

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1+2\sum_{m=0}^{\infty}C(m,n)x^{m+1},\qquad C(m,n)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k+1}\qquad(n\in\mathbb{Z}),$$

と定義すると,

$$\mathfrak{M}_{2m}(\mu_n)=\frac{1}{n}\frac{(2m)!}{2^m m!}C(m,n)$$

となる. この $C(m,n)$ は Meixner-Pollaczek polynomial で次のように与えられる.

$$C(m,n)=\frac{1}{2}(m+1)!\,P_m^{(0)}\left(in,\frac{\pi}{2}\right)$$

(Haver-Zagier 1986 [HZ], Mehta 1991 [Meh], Haagerup et al. 2003 [HT]). 今回扱う多変数 Meixner-Pollaczek polynomial に対する母関数は, $C(m,n)$ の母関数の拡張になっている.

Example 1.3 (完備 Riemann zeta の近似).

$$\Xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \qquad s = \frac{1}{2} + it \quad (t \in \mathbb{R})$$

Meixner-Pollaczek polynomial による完備リーマンゼータ関数の良い近似が [Ku] で述べられている.

Example 1.4 (Operator ordering). p, q が $[p,q] = pq - qp = i$ を満たすとする. σ を symmetrization とする. つまり,

$$\sigma((pq)^l) = \{l \text{ 個の } p \text{ と } q \text{ の可能な順序積の全ての和}\}$$

とする. このとき, ある多項式 $S_l(\lambda)$ が存在して,

$$\sigma\left((pq)^l\right) = S_l\left((pq)^1\right)$$

と書けることは明らかである. これについて [BMP] で,

$$S_l(\lambda) = P_l^{(1)}\left(\lambda; \frac{\pi}{2}\right)$$

となることが発見され, Koornwinder 1989 [Ko] で証明された. また, 組合せ論を用いた証明もある [HZ].

以下は Meixner-Pollaczek polynomial が単位円板上の単項式から一連の変換で得られることを示す picture である. これが多変数 Meixner-Pollaczek polynomial を定義するにあたっての一つのアイディアを与える.

関数空間	$\mathcal{H}_\nu^2(\mathcal{D})$	$\xrightarrow[\mathcal{C}_\nu]{\sim}$	$\mathcal{H}_\nu^2(T)$	$\xrightarrow[\mathcal{L}_\nu^{-1}]{\sim}$	$L_\nu^2(0,\infty)$	$\xrightarrow[\mathcal{M}_\nu]{\sim}$	$L^2(\mathbb{R}, M_\nu(d\lambda))$
直交基底	$\{\varphi_m\}$				$\{\psi_m^{(\nu)}\}$ Laguerre		$\{q_m^{(\nu)}\}$ MP
Operator	$2w\frac{d}{dw}$ Euler op.				微分方程式		差分方程式

ただし

$$\varphi_m(w) = w^m,$$

$$\psi_m^{(\nu)}(u) = e^{-u}L_m^{(\nu-1)}(2u), \quad L_m^{(\nu-1)}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\Gamma(m+\nu)}{\Gamma(k+\nu)}\frac{(-x)^k}{k!(m-k)!} \quad \text{(classical Laguerre polynomial)},$$

$$q_m^{(\nu)}(s) = \frac{(\nu)_m}{m!}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m, s+\frac{\nu}{2} \\ \nu\end{matrix}; 2\right) = \frac{(\nu)_m}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m)_k(-s-\frac{\nu}{2})_k}{(\nu)_k}\frac{2^k}{k!}.$$

ここで, 各空間について (m を $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue measure として)

1. $\mathcal{H}^2_\nu(\mathcal{D})$: weighted Bergman 空間
$$= \left\{ f(w) \,\middle|\, \mathcal{D} \text{ 上正則}, \int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2 (1-|w|^2)^{\nu-2} m(dw) < \infty \right\}$$
$\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$: unit disc

2. $$\mathcal{H}^2_\nu(T) = \left\{ F(z) \,\middle|\, T \text{ 上正則}, \int_T |F(z)|^2 x^{\nu-2} m(dw) < \infty \right\}$$
$T \subset \mathbb{C}$: 右半平面

3. $$L^2_\nu(0,\infty) = \left\{ \psi(u) \,\middle|\, \int_0^\infty |\psi(u)|^2 u^{\nu-1} du < \infty \right\}$$

4. $$M_\nu(d\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \left|\Gamma(i\lambda + \frac{\nu}{2})\right|^2 d\lambda$$

上の picture におけるユニタリ同型写像はそれぞれ

$$(C_\nu f)(z) = \left(\frac{z-1}{2}\right)^{-\nu} f\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \qquad \text{(Cayley 変換)},$$
$$(\mathcal{L}_\nu \psi)(z) = \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-zu} \psi(u) u^{\nu-1} du \qquad \text{(Laplace 変換)},$$
$$(\mathcal{M}_\nu \psi)(s) = \frac{1}{\Gamma(s+\frac{\nu}{2})} \int_0^\infty \psi(u) u^{s+\frac{\nu}{2}-1} du \qquad \text{(Mellin 変換)}$$

で与えられる．また Meixner-Pollaczek polynomial の差分方程式は以下のようになる．

$$(D_\nu f)(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)(f(s+1) - f(s)) - \left(s - \frac{1}{2}\right)(f(s-1) - f(s))$$
$$(D_n q_m^{(\nu)})(s) = 2m q_m^{(\nu)}(s).$$

2 多変数化

今回の目的は 1 変数 Meixner-Pollaczek polynomial の描像を管状 Hermite 対称空間の枠組みで構築することである．記号を以下のように定めておく．

V : Jordan algebra ($\dim V = N, \operatorname{rank} V = n$)
d : multiplicity ($N = n + \frac{d}{2} n(n-1)$)
$\Omega \subset V$: symmetric cone associated with V
G : Ω の自己同型群 $G(\Omega)$ の単位元成分
$K \subset G$: V の単位元 e の等方部分群

Spherical function $\varphi_{\mathbf{s}}(u)$ を $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^n, u \in \Omega$ に対して

$$\varphi_{\mathbf{s}}(u) = \int_K \Delta_{\mathbf{s}+\rho}(ku) dk, \qquad \rho_j = \frac{d}{4}(2j - n - 1)$$

とする．$\mathbb{D}(\Omega)$ を G-invariant differential operator の全体とする．$\mathbb{D}(\Omega)$ の元 D に対し

$$D\varphi_{\mathbf{s}} = \gamma_D(\mathbf{s}) \varphi_{\mathbf{s}}$$

となる．ここで $\gamma : \mathbb{D}(\Omega) \to \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)^{\mathfrak{S}_n}$ は Harish-Chandra isomorphism の特別な例である．また，$\mathcal{P}(V)$ を V 上の多項式全体とすると，これは G-加群として重複度 1 で既約分解できて，

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^n \\ m_1\geq\cdots\geq m_n}} \mathcal{P}_{\boldsymbol{m}}, \qquad \mathcal{P}_{\boldsymbol{m}} : \text{irreducible under G}$$

となる．K-invariant polynomials $\mathcal{P}_{\boldsymbol{m}}^K$ は $\mathbb{C}$ 上一次元であって spherical polynomial $\Phi_{\boldsymbol{m}}$ で生成される．以下，$d_{\boldsymbol{m}} := \dim \mathcal{P}_{\boldsymbol{m}}$ とおく．

$$D^{\boldsymbol{m}} := \Phi_{\boldsymbol{m}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \in \mathbb{D}(\Omega), \qquad \gamma_{\boldsymbol{m}} := \gamma_{D^{\boldsymbol{m}}}$$

とすると，$\gamma_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{s})$ は Pochhammer symbol $(s)_m = s(s-1)\ldots(s-m+1)$ $\left(= x^m \left(\frac{d}{dx}\right)^m \text{ の eigenvalue}\right)$ の多変数類似である．さらに，Gindikin のガンマ関数を

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = \int_\Omega e^{-\operatorname{tr} u} \Delta_{\boldsymbol{s}}(u)\Delta(u)^{-\frac{N}{n}} m(du) \qquad (\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^n,\ \Delta(u) = \det(u))$$

とする．

$$\Gamma_\Omega(\boldsymbol{s}) = (2\pi)^{\frac{N-n}{2}} \prod_{j=1}^n \Gamma\Big(s_j - \frac{d}{2}(j-1)\Big)$$

である．$\alpha\in\mathbb{C}, \boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^n$ に対して Pochhammer symbol の一般化を

$$(\alpha)_{\boldsymbol{m}} := \frac{\Gamma_\Omega(\boldsymbol{m}+\alpha)}{\Gamma_\Omega(\alpha)}$$

で定める．

ψ を K-invariant で $e\in V$ の近傍で解析的な関数とすると，

$$\psi(e+v) = \sum_{\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{m}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}} \left(D^{\boldsymbol{m}}\psi\right)(e)\Phi_{\boldsymbol{m}}(v)$$

と Taylor 展開される．特に

$$\psi = \varphi_{\boldsymbol{s}} \implies \varphi_{\boldsymbol{s}}(e+v) = \sum_{\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{m}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}} \gamma_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{s})\Phi_{\boldsymbol{m}}(v)$$
$$\psi = \Phi_{\boldsymbol{m}} \implies \Phi_{\boldsymbol{m}}(e+v) = \sum_{\boldsymbol{k}<\boldsymbol{m}} \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}} \Phi_{\boldsymbol{k}}(v)$$

となる．一変数 Meixner-Pollaczek polynomial $P_m^{(\frac{\nu}{2})}(\lambda)$ の超幾何多項式としての表示を拡張し，多変数 Meixner-Pollaczek polynomial を以下のように定義する．

Definition 2.1. 多変数 Meixner-Pollaczek polynomial $\{Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\boldsymbol{s})\}_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{N}^n}$ を，

$$Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\boldsymbol{s}) = \frac{(\nu)_{\boldsymbol{m}}}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}} \sum_{\boldsymbol{k}\subset\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{k}} \frac{\gamma_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{m}-\rho)\gamma_{\boldsymbol{k}}\left(-\boldsymbol{s}-\frac{\nu}{2}\right)}{(\nu)_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{k}}} 2^{|\boldsymbol{k}|}$$

と定める．

$Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\boldsymbol{s})$ は $\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^n$ について対称関数である．これらが spherical polynomial の変換から得られるという，一変数の場合と同様な picture が，次のように描ける；

関数空間	$\mathcal{H}^2_\nu(\mathcal{D})^K$	$\xrightarrow[\mathcal{C}_\nu]{\sim}$	$\mathcal{H}^2_\nu(T_\Omega)^K$	$\xrightarrow[\mathcal{L}_\nu^{-1}]{\sim}$	$L^2_\nu(\Omega)^K$	$\xrightarrow[\mathcal{F}_\nu]{\sim}$	$L^2(\mathbb{R}^n, M_\nu(d\lambda))^{\mathfrak{S}_n}$
直交基底	$\{\Phi_{\boldsymbol{m}}\}$ spher.poly.				$\{\Psi^{(\nu)}_{\boldsymbol{m}}\}$ Laguerre		$\{Q^{(\nu)}_{\boldsymbol{m}}\}$ mult.MP
Operator	Euler op.				微分方程式		差分方程式

ここで各関数空間について

1. $$\mathcal{H}^2_\nu(\mathcal{D}) : \text{weighted Bergman 空間} = \left\{ f(w) \,\middle|\, \mathcal{D}\text{ 上正則}, \int_{\mathcal{D}} |f(w)|^2 \Delta(e-w^2)^{\nu-2\frac{N}{n}} m(dw) < \infty \right\}$$
$\mathcal{D} \subset V$: bounded symmetric domain

2. $$\mathcal{H}^2_\nu(T_\Omega) = \left\{ F(z) \,\middle|\, T_\Omega\text{上正則}, \int_{T_\Omega} |F(z)|^2 \Delta(x)^{\nu-2\frac{N}{n}} m(dz) < \infty \right\}$$
$\Omega \subset V$: symmetric cone(G/K)
$T_\Omega = \{z = x+iy \,|\, x\in\Omega, y \in V\}$

3. $$L^2_\nu(\Omega) = \left\{ \psi(u) \,\middle|\, \int_\Omega |\psi(u)|^2 \Delta(u)^{\nu-\frac{N}{n}} m(du) < \infty \right\}$$

4. $$M_\nu(d\lambda) = a^{(4)}_\nu \left|\Gamma_\Omega\left(i\lambda+\rho+\frac{\nu}{2}\right)\right|^2 \frac{1}{|c(i\lambda)|^2} m(d\lambda)$$
c : Harish-Chandra c-function
$a^{(i)}_\nu$: normalized constant

とおき, 各変換 (intertwiner) を

$$(C_\nu f)(z) = \Delta\left(\frac{z+e}{2}\right)^{-\nu} f\left((z-e)(z+e)^{-1}\right) \qquad \text{(Calay 変換)},$$
$$(\mathcal{L}_\nu\psi)(z) = a^{(3)}_\nu \int_\Omega e^{(z|u)}\psi(u)\Delta(u)^{\nu-\frac{N}{n}} m(du) \qquad \text{(Laplace 変換)},$$
$$(\mathcal{F}_\nu\psi)(s) = \frac{1}{\Gamma_\Omega\left(s+\frac{\nu}{2}+\rho\right)} \int_\Omega \psi(u)\varphi_s(u)\Delta(u)^{\frac{\nu}{2}-\frac{N}{n}} m(du) \qquad \text{((modified) spherical Fourier 変換)}$$

としている.

上に現れる Laguerre function $\Psi^{(\nu)}_{\boldsymbol{m}}(u)$ は

$$\Psi^{(\nu)}_{\boldsymbol{m}}(u) = e^{-\operatorname{tr} u} L^{(\nu-1)}_{\boldsymbol{m}}(2u)$$

で与えられる. $L^{(\nu)}_{\boldsymbol{m}}(u)$ は多変数 Laguerre 多項式で,

$$L^{(\nu-1)}_{\boldsymbol{m}}(x) = \frac{(\nu)_{\boldsymbol{m}}}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}} \sum_{\boldsymbol{k}\subset\boldsymbol{m}} \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}} \frac{1}{(\nu)_{\boldsymbol{k}}} \Phi_{\boldsymbol{k}}(-x)$$
$$= \frac{(\nu)_{\boldsymbol{m}}}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}} \sum_{\boldsymbol{k}\subset\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{k}} \frac{\gamma_{\boldsymbol{k}}(\rho-\boldsymbol{m})}{(\nu)_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{k}}} \Phi_{\boldsymbol{k}}(-x)$$

と表示される. 多変数 Laguerre 多項式に関しては [ADO1, ADO2], [DOZ1, DOZ2], [OF] の中でも議論されている.

さらにパラメータ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を

$$\Phi_{\boldsymbol{m}}^{(\theta)}(w) := \Phi_{\boldsymbol{m}}(w\cos\theta + ie\sin\theta)$$

と入れる. これを intertwiner で順に移していき,

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)} &:= \mathcal{C}_\nu \Phi_{\boldsymbol{m}}^{(\theta)}, \\ \Psi_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)} &:= \mathcal{L}_\nu^{-1} F_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}, \\ Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)} &:= \mathcal{F}_\nu \Psi_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}, \end{aligned}$$

と定め, パラメータ θ 付きの多変数 Meixner-Pollaczek polynomial

$$Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}(\boldsymbol{s}) = e^{i|\boldsymbol{m}|\theta} \frac{(\nu)_{\boldsymbol{m}}}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}} \sum_{\boldsymbol{k}\subset\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{k}} \frac{\gamma_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{m}-\rho)\gamma_{\boldsymbol{k}}\left(-\boldsymbol{s}-\frac{\nu}{2}\right)}{(\nu)_{\boldsymbol{k}}} \frac{1}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{k}}} (2e^{-i\theta}\cos\theta)^{|\boldsymbol{k}|}$$

を考える.

3 結果

パラメータ付き多変数 Meixner-Pollaczek polynomial についての基本的な結果を述べる.

Theorem 3.1 (直交性). 内積

$$(q_1 \mid q_2)_{(\nu,\theta)} = \int_{\mathbb{R}} q_1(i\lambda)\overline{q_2(i\lambda)} e^{2\theta(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)} M_\nu(d\lambda)$$

に関して

$$\begin{aligned} \left(Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\boldsymbol{s}) \,\middle|\, Q_{\boldsymbol{m}'}^{(\nu)}(\boldsymbol{s})\right)_{(\nu,\theta)} &= 0 \ (\boldsymbol{m} \subsetneq \boldsymbol{m}' \text{ or } \boldsymbol{m} \supsetneq \boldsymbol{m}'), \\ \left(Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\boldsymbol{s}) \,\middle|\, Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\boldsymbol{s})\right)_{(\nu,\theta)} &= (\cos\theta)^{-n\nu} \frac{1}{d_{\boldsymbol{m}}} \frac{(\nu)_{\boldsymbol{m}}}{\left(\frac{N}{n}\right)_{\boldsymbol{m}}}. \end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 3.2 (母関数). $w \in \mathcal{D}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^n$ に対し,

$$\sum_{\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{m}} Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}(\boldsymbol{s}) \Phi_{\boldsymbol{m}}(w) = \Delta\left((e - e^{i\theta}w)(e + e^{-i\theta}w)\right)^{-\frac{\nu}{2}} \varphi_{\boldsymbol{s}}\left(c_\theta(w)^{-1}\right).$$

ただし, $c_\theta(w) = (e + e^{-i\theta}w)(e - e^{i\theta}w)^{-1}$.

Theorem 3.3 (行列式表示). $d = 2$ の場合 (i.e. $V = \mathrm{Herm}(n, \mathbb{C})$, $K = U(n)$),

$$Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}(\boldsymbol{s}) = (-2\cos\theta)^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \delta! \frac{\det\left(q_{m_j+\delta_j}^{(\nu-n+1,\theta)}(s_i)\right)_{1\le i,j\le n}}{V(s_1, \ldots, s_n)}.$$

ここで $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, $q_m^{(\nu,\theta)}$ は一変数 Meixner-Pollaczek polynomial である.

Theorem 3.4 (差分方程式). 差分作用素 $D_{\nu,\theta}$ を

$$
\begin{aligned}
D_{\nu,\theta}f(\boldsymbol{s}) &= e^{-i\theta}\sum_{j=1}^{n}\Big(s_j+\frac{\nu}{2}-\frac{d}{4}(n-1)\Big)\alpha_j(\boldsymbol{s})\big(f(\boldsymbol{s}+\varepsilon_j)-f(\boldsymbol{s})\big)\\
&\quad+e^{i\theta}\sum_{j=1}^{n}\Big(-s_j+\frac{\nu}{2}-\frac{d}{4}(n-1)\Big)\alpha_j(-\boldsymbol{s})\big(f(\boldsymbol{s}-\varepsilon_j)-f(\boldsymbol{s})\big),
\end{aligned}
$$

$\{\varepsilon_j\}$: canonical basis,

$$
\alpha_j(\boldsymbol{s})=\prod_{k\neq j}\frac{s_j-s_k+\frac{d}{2}}{s_j-s_k}
$$

と定義する. Meixner-Pollaczek polynomial $Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}$ は $D_{\nu,\theta}$ の eigenfunction である;

$$
D_{\nu,\theta}Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}=2|\boldsymbol{m}|\cos\theta\, Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}.
$$

Theorem 3.5 (Pieri's formula).

$$
\begin{aligned}
&(2|\boldsymbol{s}|\cos\theta-2i|2\boldsymbol{m}+\nu|\sin\theta)Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}(\boldsymbol{s})\\
&=\sum_{j=1}^{n}\Big(m_j+\nu-1-\frac{d}{4}(j-1)\Big)\alpha_j(\boldsymbol{m}-\varepsilon_j-\rho)d_{\boldsymbol{m}-\varepsilon_j}Q_{\boldsymbol{m}-\varepsilon_j}^{(\nu,\theta)}(\boldsymbol{s})\\
&\quad-\sum_{j=1}^{n}\Big(m_j+1+\frac{d}{4}(n-j)\Big)\alpha_j(-\boldsymbol{m}-\varepsilon_j-\rho)d_{\boldsymbol{m}+\varepsilon_j}Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu,\theta)}(\boldsymbol{s}).
\end{aligned}
$$

4 コメント

1. 差分関係式の証明において以下の involution S を導入すると議論がよりクリアになる; $f\in\mathcal{H}_\nu^2(D)$ に対して $(Sf)(w)=f(-w)$. S を intertwiner で移すと $L_\nu^2(\Omega)$ では Hankel 変換が現れる [FK]. これを拡張すると, 多変数の fractional Hankel 変換が自然に定義される.
2. Example 1.4 は $Q_{\boldsymbol{m}}^{(\nu)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を用いると, Heisenberg 群の表現論を展開して多変数の場合に拡張される [FW2].
3. ad, $\check{\mathrm{ad}}$ ($\check{\mathrm{ad}}(a)b=ab+ba$) から $\mathfrak{sl}_2$-triple

$$
\begin{aligned}
E&:=\frac{1}{2}\check{\mathrm{ad}}(a)\check{\mathrm{ad}}(a^+)\,\left(=\frac{1}{2}\check{\mathrm{ad}}(a^+)\check{\mathrm{ad}}(a)\right),\\
F&:=\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(a^+)\,\left(=\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}(a^+)\,\mathrm{ad}(a)\right),\\
H&:=\frac{1}{2}\{\mathrm{ad}(a)\check{\mathrm{ad}}(a^+)-\check{\mathrm{ad}}(a)\,\mathrm{ad}(a^+)\}\\
a&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(x+\frac{d}{dx}\Big),\quad a^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(x-\frac{d}{dx}\Big)
\end{aligned}
$$

ができる. これを用いると Meixner-Pollaczek polynomial が満たす差分方程式が導かれる. なお, 同様の議論が [GS] でなされていることが近頃わかった. 最近, [Sh] では $\check{\mathrm{ad}}$ と Meixner-Pollaczek polynomial の母関数を利用して, [Ko] のみならず, [HZ] の結果を統一的かつ簡明に (拡張した形で) 導いた.

参考文献

[AAR] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy: *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71. Cambridge University Press, 1999.

[ADO1] Aristidou, M., Davidson, M., Ólafsson, G.: Differential recursion relations for Laguerre functions on symmetric cones, *Bull. Sci. Math.*, **130** (2006), 246–263.

[ADO2] Aristidou, M., Davidson, M., Ólafsson, G.: Laguerre functions on symmetric cones and recursion relations in the real case, *J. Comput. Appl. Math.*, **199** (2007), 95–112.

[BMP] C. M. Bender, L. R. Mead and S. S. Pinsky: Resolution of the Operator-Ordering Problem by the Method of Finite Elements, Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 2445-2448.

[DOZ1] Davidson, M., Ólafsson, G., Zhang, G.: Laplace and Segal-Bargmann transforms on Hermitian symmetric spaces and orthogonal polynomials, *J. Functional Analysis*, **204** (2003), 157–195.

[DOZ2] Davidson, M., Ólafsson, G., Zhang, G.: Differential recursion relations for Laguerre functions on Hermitian matrices, *Integral transforms and special functions*, **14** (2003), 469–484.

[FK] Faraut, J., Korányi, A.: Analysis on symmetric cones, Oxford University Press, 1994.

[FW1] Faraut, J., Wakayama, M.: Hermitian Symmetric Spaces of Tube Type and Multivariate Meixner-Pollaczek Polynomials, `arXiv:0812.1292`.

[FW2] Faraut, J., Wakayama, M.: Invariant Differential Operators on The Heisenberg Group and Meixner-Pollaczek polynomials, Preprint (2012).

[GS] Gnatowska, E., Strasburger, A.: The weyl algebra, Spherical harmonics, and Hahn polynomials, `arXiv:math-ph/0110006v1`.

[HT] Haagerup, U., Thorbjørnsen, S.: Random matrices with complex Gaussian entries, *Exp. Mat.*, **21** (2003), 293–337.

[HZ] Harer, J., Zagier, D.: The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **185** (1986), 457–485.

[Ko] Koornwinder, T.: Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra, *J. Math. Phys.*, **30** (1989), 767–769.

[Ku] Kuznetsov, A.: Expansion of the Riemann Ξ function in Meixner-Pollaczek polynomials. *Canad. Math. Bull.*, **51** (2008), 561–569.

[Meh] Mehta, M. L.: Random matrices, Academic Press, 1991.

[OF] Chébli, H., Faraut, J.: Fonctions holomorphes à croissance modérée et vecteurs distributions, *Math. Z.*, **248** (2004), 541–565.

[Sc] Schoutens, W.: Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials, Lecture Notes in Statistics 146. Springer-Verlag, New York.

[Sh] Shibukawa, G.: Operator orderings and Meixner-Pollaczek polynomials, `arXiv:1211.6646`.

〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所
e-mail: `wakayama@imi.kyushu-u.ac.jp`