数理解析研究所講究録
第1825巻 2013年 166-184

旗多様体の底空間のシンプレクティック構造の変形とその表現論への応用

池田 薫
慶應義塾大学経済学部
Faculty of Economics Keio University

1 旗多様体 G/P のポアッソン構造とシンプレクティック多様体 $\mathfrak{X}(G/P)$ の構成

$G=GL_n(\mathbb{R})$ とし $B\subset G$ を上三角ボレル部分群 $N\subset B$ をべき零部分群とする. $\bar{B},\bar{N}$ を夫々の opposite とする. $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{b}=\mathrm{Lie}\,B$, $\mathfrak{n}=\mathrm{Lie}\,N$, $\bar{\mathfrak{b}}=\mathrm{Lie}\,\bar{B}$ とする. $P\supset B$ をレヴィ部分群が $GL_1(\mathbb{R})\times GL_{n-2}(\mathbb{R})\times GL_1(\mathbb{R})$ であるような放物型部分群とする. $f,g\in C^{\infty}(G)$ には

$$\{f(x),g(x)\}_G=\langle x,[\nabla f(x),\nabla g(x)]\rangle$$

によりポアッソン構造が入る. $g\in G$ に対しガウス分解

$$W_{\infty}(g)^{-1}W_0(g)=g, W_{\infty}(g)\in\bar{N}, W_0(g)\in B. \tag{1.1}$$

を考える. $b\in B$ に対して $W_{\infty}(g)(W_0(g)b)=gb$ は gb のガウス分解だから $W_{\infty}(g)$ を旗多様体の点 $gB\in G/B$ の座標として使いたいが (1.1) の分解が不可能な g が存在する. 今 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して $G_{\sigma}\subset G$ を $G_{\sigma}=\{g\in G|\sigma g$ は分解 (1.1) を持つ $\}$ で定義する. ブリュワー分解により

Proposition 1.1. $G=\cup_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}G_{\sigma}$ よって $G/B=\cup_{\sigma\in\mathfrak{S}}G_{\sigma}/B$

今 $g\in G_{\sigma}$ としたときガウス分解

$$W_{\infty}^{\sigma}(g)^{-1}W_0^{\sigma}(g)=\sigma g$$

が可能であり G_{σ}/B の局所座標として $W_{\infty}^{\sigma}(g)$ をとることが出来る. G の Lie 部分群 U を

$$U=\left\{\left.\begin{pmatrix}1 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{q} & E_{n-2} & \mathbf{0}\\ c & {}^t\mathbf{p} & 1\end{pmatrix}\right|\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2},c\in\mathbb{R}\right\}.$$

で定義する．$g \in G$ が $g = up, u \in U, p \in P$ と分解されるとき g は U-P 分解を持つという．Prop.1.1 より次が従う．

Proposition 1.2. $G/P = \cup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} G_\sigma/P$.

$U_\sigma = G_\sigma/P$ とする．任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について $U_\sigma \simeq U$. $gP \in G/P$ が $g \in G_\sigma$ であるとき U-P 分解 $u_\sigma(g)p_\sigma(g) = \sigma g, u_\sigma(g) \in U, p_\sigma(g) \in P$ における $u_\sigma(g)$ を gP の局所座標として捉えることが出来る．$g \in G_\sigma \cap G_\tau$ であるとき $u_\sigma(g)$ と $u_\tau(g)$ を同一視して U_σ と U_τ を張り合わせたものは G/P と一致する．$g \in G_\sigma \cap G_\tau$ とすると二つの U-P 分解 $u_\sigma(gP)p_\sigma(g) = \sigma g$, $u_\tau(gP)p_\tau(g) = \tau g$ が成り立つ．従って $\sigma^{-1}u_\sigma(gP)p_\sigma(g) = \tau^{-1}u_\tau(gP)p_\tau(g)$ より

$$u_\sigma(gP)p_\sigma(g) = \sigma\tau^{-1}u_\tau(gP)p_\tau(g) \tag{1.2}$$

$\sigma\tau^{-1}u_\tau(gP)$ の U-P 分解を $\sigma\tau^{-1}u_\tau(gP) = \Phi_{\sigma\tau}(u_\tau(gP))p''$ とすると (1.2) より

$$u_\sigma(gP)p_\sigma(g) = \Phi_{\sigma\tau}(u_\tau(gP))(p''p_\tau). \tag{1.3}$$

を得る．U-P 分解の一意性より $u_\sigma(gP) = \Phi_{\sigma\tau}(u_\tau(gP))$ を得る．よって $\Phi_{\sigma\tau}$ が座標変換関数である．

G/P にポアッソン構造を導入しよう．$\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}\,U$, $\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}\,P$ としよう．すると $T_e(G/P) = \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ と表すことが出来る．$\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{p}$ より線形空間として $T_e(G/P)$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{p} = \mathfrak{u}$ と同型. Killing 形式 $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ により $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると $\mathfrak{u}^* = {}^t\mathfrak{u} := \{{}^tX | X \in \mathfrak{u}\}$. よって $T_e^*G/P = {}^t\mathfrak{u}$. 明らかに ${}^t\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ の Lie subalgebra. よって $\mathfrak{u}$ は Lie bialgebra[2] の構造を持ち G/P は大域的にポアッソン構造を持つことが分かる [5]. G は G/P に左から作用するが $gP \in G/P$ における固定群は gPg^{-1} となる．よって G/P を G/gPg^{-1} と表わすことが出来る．よって $T_{gP}(G/P) = \mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,g\mathfrak{p}$ と表せる．$\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}\,g\mathfrak{u} \oplus \mathrm{Ad}\,g\mathfrak{p}$ より線形空間として $T_{gP}G/P = \mathrm{Ad}\,g\mathfrak{u}$ と同一視出来る．今 $h \in G$ としたとき $gP \in G/P$ の左移動 L_h を $L_h(gP) = (hg)P$ で定義する．

Lemma 1.3. $\varphi \in C^\infty(G/P)$ に対して $\nabla\varphi(gP) = g\nabla L_g^*\varphi(eP)g^{-1}$. が成り立つ．

$T^*(G/P)$ に関する $T^*(G/P)$ 値の２次形式 $\alpha(gP)$ を次で定義する．$\xi, \eta \in T^*(G/P)$ に対して $X \in T(G/P)$ とすると

$$\alpha(gP)(\xi(gP), \eta(gP))(X_{gP}) = \langle X_{gP}, [\xi(gP), \eta(gP)]\rangle. \tag{1.4}$$

ここで $\xi(gP) = g\xi(eP)g^{-1}$, $\eta(gP) = g\eta(eP)g^{-1}$, 但し e は G の単位元, と書けるから (1.4) の Lie 括弧は意味を持つ．$\varphi, \psi \in C^\infty(G/P)$ に対してポアッソン括弧を次で定義する．$\dim{}^t\mathfrak{u} < \infty$ よりある $\rho \in C^\infty(G/P)$ が存在し $\nabla L_g^*\rho(eP) = [\nabla L_g^*\varphi(eP), \nabla L_g^*\psi(eP)]$ をみたす．

$$\{\varphi(gP), \psi(gP)\}_{G/P} := \rho(gP)$$

により G/P のポアッソン括弧を定義する．

Lemma 1.4. $\nabla\{\varphi,\psi\}_{G/P}(gP)=[\nabla\varphi(gP),\nabla\psi(gP)]$ が成り立つ.

Lemma 1.4 より

Proposition 1.5. $\{,\}_{G/P}$ は歪対称でヤコビの恒等式をみたす. よって $C^\infty(G/P)$ は $\{,\}_{G/P}$ で Lie algebra になる.

U_0 を G/P の局所座標とする. $U_0=\left\{\begin{pmatrix}1 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{q} & E_{n-2} & \mathbf{0}\\ c & {}^t\mathbf{p} & 1\end{pmatrix}\right\}$ とするとポアッソン括弧は $\{p_i,q_j\}_{G/P}=\delta_{i,j}c$

$$\{p_i,p_j\}_{G/P}=\{q_i,q_j\}_{G/P}=\{p_i,c\}_{G/P}=\{q_i,c\}_{G/P}=0 \tag{1.5}$$

となる.

R を U の中心とする. すなわち

$$R=\left\{t_c=\begin{pmatrix}1 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{0} & E_{n-2} & \mathbf{0}\\ c & {}^t\mathbf{0} & 1\end{pmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$$

とする. $K:=R\backslash U$ とする. R は G/P に $L_{t_c}gP=(t_cg)P$ により左から作用する. シンプレクティック多様体として $R\backslash G/P$ を考えたいがこの作用は固定点を持ってしまう. たとえば $g=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & E_{n-2} & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ とすると $Rg=gP$ すなわち $x=gP$ とすると $Rx=x$ となる (奥田隆幸氏の指摘による). よって別途の方法でシンプレクティック多様体を考えたい. U-P 分解の一意性から次の命題を得る.

Lemma 1.6. 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対し $\sigma R\sigma^{-1}$ は $U_\sigma=G_\sigma/P$ に作用する.

$\sigma R\sigma$ の U_σ への作用 $\sigma t_c\sigma(gP)$ を R の U_σ への作用とみなす. この左作用を ℓ_σ としよう. すなわち $\ell_\sigma(t_c)(gP)=(\sigma t_c\sigma^{-1}g)P$. この R の左作用による商空間を $R_\sigma\backslash U_\sigma$ と書いて K_σ と略記する. 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して K_σ はアファイン空間 K と同相である. $x\in U_\sigma\cap U_\tau$ としたとき $R_\sigma x$ と $R_\tau x$ を同一視し K_σ と K_τ を張り合わせる. この張り合わせで構成した多様体を $\mathfrak{X}(G/P)$ とする. さてアファイン空間 K 上に以下のように複素直線束 L を構成する. R の指標 $\chi: R\to\mathbb{R}$ を $\chi(t_c)=c$ で定義する. $\chi(t_ct_{c'})=\chi(t_{c+c'})=c+c'=\chi(t_c)+\chi(t'_c)$ である. R の $\mathbb{C}^*$ 上の 1 次元表現 λ を $\lambda(t_c)a=\exp(2\pi\sqrt{-1}\chi(t_c))a$ で定義する. この 1 次元表現を $\mathbb{C}_\lambda$ とする. $L=U\times_R\mathbb{C}_\lambda$ は K 上の直線束になる. 以下すべての $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して K_σ 上に局所的に直線束 L のコピー $L_\sigma=U_\sigma\times_R\mathbb{C}_\lambda$ を構成しそれらを張り合わせて $\mathfrak{X}(G/P)$ 上の直線束を構成する.

Proposition 1.7. $\mathfrak{X}(G/P)$ 上の直線束 L で $L|_{K_\sigma}=L_\sigma$ となるものが存在する.

proof. 局所的な切断 $s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma; L_\sigma)$ とそれらの変換関数を構成すればよい. G/P は $\mathfrak{X}(G/P)$ 上のファイバー束. よって大域的な切断 $v \in \Gamma(\mathfrak{X}(G/P); G/P)$ が存在する. K_σ 上 $v(x) = v_\sigma(x)$ とする. $s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma; L_\sigma)$ を $s_\sigma(x) = [v_\sigma(x), 1]$ により定義する. $v_\sigma(x) = t_{c_\sigma}(x)u_\sigma(x), t_{c_\sigma}(x) \in R, u_\sigma(x) \in K$ とすると $s_\sigma(x) = [u_\sigma(x), e^{2\pi\sqrt{-1}c_\sigma(x)}]$ なので. 変換関数を $\psi_{\sigma,\tau}(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(c_\tau(x) - c_\sigma(x))$ とすればよい. QED

次にこの L に接続を定義する. $\varpi : L \to \mathfrak{X}(G/P)$ を射影とする. $^\forall\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\alpha_\sigma \in \Omega^1(\varpi^{-1}(K_\sigma))$ をうまくとり大域的な整合性をみたすようにすればよい. 局所座標 K_σ において $f \in C^\infty(G/P)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial q_j} f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + tE_{j+1,1}), \ \frac{\partial}{\partial p_i} f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x + tE_{n,i+1}) \tag{1.6}$$

となる. よって $s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma; \varpi^{-1}(K_\sigma))$ とすると $s_{\sigma *}\partial/\partial q_j = E_{j+1,1}, 1 \le j \le n-2$ $s_{\sigma *}\partial/\partial p_i = E_{n,i+1}, 1 \le i \le n-2$. $\mathscr{A} \subset \Omega^1(L)$ を L の平坦接続全体のなす空間とする.

Lemma 1.8. $\mathscr{A} \neq \phi$ である.

proof. $\dim R = 1$ より $A \in \mathscr{A} \iff dA = 0$. Prop.1.6 における局所系を $s_\sigma(x) = [u_\sigma(x), e^{2\pi\sqrt{-1}c_\sigma(x)}]$ とする. $\tilde{c}_\sigma = \varpi^* c \in C^\infty(\varpi^{-1}(K_\sigma))$ とし $A_\sigma = d\tilde{c}_\sigma \in \Omega^1(\varpi^{-1}(K_\sigma))$ とすると Prop.1.6 より

$$A_\sigma(s_\sigma)(x) - A_\tau(s_\tau)(x) = dc_\sigma(x) - dc_\tau(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{d\psi_{\sigma,\tau}(x)}{\psi_{\sigma,\tau}(x)}.$$

よって $\{A_\sigma\}_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ は大域的整合性をみたし各 K_σ 上 $d\tilde{A}_\sigma = d(d\tilde{c}_\sigma) = 0$. QED

$\pi : G/P \to \mathfrak{X}(G/P)$ を射影とする. Σ_σ を $\varpi^{-1}(K_\sigma)$ 上の超曲面とする. Σ_σ の局所座標を $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu)$ ただし $\pi((\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mu_\sigma)) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in K_\sigma$ とする. $\alpha_\sigma \in \Omega^1(\varpi^{-1}K_\sigma)$ を $u \in \varpi^{-1}(K_\sigma)$ とすると

$$\alpha_\sigma(u) = -\mu_\sigma E_{1,n} + A_\sigma(u)$$

で定義する. G/P の超曲面 Σ を $\Sigma_\sigma = \Sigma \cap \pi^{-1}(K_\sigma)$ となるように定義する.

$$\langle \mu_\sigma E_{1,n}, E_{n,j+1} \rangle = \langle \mu_\sigma E_{1,n}, E_{i+1,j} \rangle = 0, i, j = 1, \ldots, n-2$$

より

$$\langle \mu_\sigma E_{i,n}, s_{\sigma *}\partial/\partial p_j \rangle = \langle \mu_\sigma, s_{\sigma *}\partial/\partial q_i \rangle = 0.$$

よって $\alpha_\Sigma(s_\sigma) = A(s_\sigma)$. A は平坦接続だから $dA = 0$ よって $s_\sigma \in \Gamma(K_\sigma; L)$, $X, Y \in TK_\sigma$ に対して

$$d\alpha_\sigma(s_\sigma)(X, Y) = -\mu_\sigma \langle E_{1,n}, [s_{\sigma *}X, s_{\sigma *}Y] \rangle.$$

K_σ の局所座標を使うとシンプレクティック構造 $\omega_\Sigma = d\alpha_\Sigma$ は

$$\left\{\begin{array}{c} \omega_\Sigma(\partial/\partial p_i, \partial/\partial q_j) = \mu_\sigma \delta_{i,j} \\ \omega_\Sigma(\partial/\partial p_i, \partial/\partial p_j) = \omega_\Sigma(\partial/\partial q_i, \partial/\partial q_j) = 0 \end{array}\right. \tag{1.7}$$

となる. よって ω_Σ により定まる $\mathfrak{X}(G/P)$ 上のポアッソン構造は G/P を Σ に制限したときのポアッソン括弧と一致する.

$I_1, \ldots, I_n \in C^\infty(G)^G$ の n 個の独立な生成元とする. つまり $I_1, \ldots, I_n$ は $\mathrm{Ad}\, G$ 不変でかつ $^\forall g \in G$ において $dI_1(g), \ldots, dI_n(g)$ は 1 次独立であり任意の $\mathrm{Ad}\, G$ 不変の関数は $I_1, \ldots, I_n$ で生成される.

Proposition 1.9. 任意の $f \in C^\infty(G)$ に対してある $f_1 \in C^\infty(G/P)$ が一意に存在し $\pi_* X_f = X_{f_1}$ をみたす.

proof. 次の補題は容易に示せる.

Lemma 1.10. $\varphi \in C^\infty(G)$ が P-不変, すなわち $\varphi(p) = \varphi(e)$ であるための必要十分条件は $\nabla\varphi(e) \in \mathfrak{p}^\perp$ かつ $\nabla\varphi(p) = p^{-1}\nabla\varphi(e)$.

$uP \in G/P$ の固定群は uPu^{-1} だったから

Corollary 1.11. $\varphi \in C^\infty(G)$ が u で G_{uP}-不変あるための必要十分条件は $\nabla L_u^*\varphi(e) \in u\mathfrak{p}^\perp u^{-1}$ かつ $\nabla L_u^*\varphi(e) = p^{-1}\nabla L_u^*\varphi(e)$.

Cauchy 問題の解の存在と一意性により次の補題が成り立つ.

Lemma 1.12. 次の $p \in P$ に関する微分方程式の初期値問題は一意的に解を持つ.

$$\left\{\begin{array}{c} \nabla f_0(p) = p^{-1}\pi_{\mathfrak{u}^\perp}(\nabla f(e)) \\ f_0(e) = f(f) \end{array}\right. \tag{1.8}$$

さらに (1.8) の解 f_0 を初期条件とした Cauchy 問題を考える.

Lemma 1.13. 次の初期値問題は一意的な解を持つ.

$$\left\{\begin{array}{c} \nabla(L_u^* f_1)(e) = u\nabla f_0(e)u^{-1} \\ f_1(e) = f_0(e) \end{array}\right. \tag{1.9}$$

f_1 を (1.9) の解とする. $p = up_0u^{-1} \in G_{uP}, p_0 \in P$ とする Lemma 1.13 より

$$\begin{aligned} \nabla L_u^* f_1(p) &= up_0^{-1}\nabla f_0(e)u^{-1} = up_0^{-1}u^{-1}u\nabla f_0(e)u^{-1} \\ &= p^{-1}\nabla L_u^* f_1(e). \end{aligned}$$

となる. Cor. 1.11 より f_1 は G_{uP}-不変となる. 以上から $f_1 \in C^\infty(G/P)$ と見なせる. この f_1 が $\pi_* X_f = X_{f_1}$ をみたす. Prop. 1.9 QED

$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ とし $(\nabla I_1(e), \ldots, \nabla L_n(e))$ を $\nabla\mathbf{I}(e)$ と略記する. $\mathbf{t}\nabla\mathbf{I}(e) = \sum_{i=1}^n t_i \nabla I_i(e)$ とする. $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ および $u \in U$ に対して U-P 分解

$$e^{\mathbf{t}\nabla\mathbf{I}(e)}u = (\Psi_{\mathbf{t}}u)p(\mathbf{t}) \tag{1.10}$$

を考える.

Proposition 1.14. $\Psi_{\mathbf{t}}$ は G/P にポアッソントーラス作用を定義する.

ポアッソントーラス作用とは可換で $f,g\in C^{\infty}(G/P)$ のとき $\{\Psi_{\mathbf{t}}^{*}f,\Psi_{\mathbf{t}}^{*}g\}_{G/P}=\Psi_{\mathbf{t}}^{*}\{f,g\}_{G/P}$ をみたすこと. $P=B$ のとき $\Psi_{\mathbf{t}}$ は戸田格子のハミルトニアンフローを与えるので $\Psi_{\mathbf{t}}$ を今後戸田フローという.

$\Psi_{\mathbf{t}}$ により $\mathfrak{X}(G/P)$ にもトーラス作用を誘導する.

Proposition 1.15. ${}^{\forall}\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{n}$ に対し $\mathfrak{X}(G/P)$ の変換 $\Xi_{\mathbf{t}}$ を $\Xi_{\mathbf{t}}\pi(u)=\pi(\Psi_{\mathbf{t}}u)$ で定義する. ただし $u\in G/P$ で π は G/P から $\mathfrak{X}(G/P)$ への射影. このとき $\Xi_{\mathbf{t}}$ は $\mathfrak{X}(G/P)$ 上のトーラス作用である.

Lemma 1.16. G/P は戸田フローで不変な $2n-4$ 次元の超曲面からなる葉層構造を持つ.

proof. $Y_j(gP):=\pi_{*}X_{I_j}(gP), j=1,\ldots,n$ とする. $Y_j(gP), j=1,\ldots,n$ で生成される $T_{gP}(G/P)$ の部分空間を $\mathfrak{A}_{gP}$ とする. 各 gP で $\mathfrak{A}_{gP}$ の直行補空間となる $T(G/P)$ の部分ベクトル場を $\mathfrak{A}^{\perp}$ とする. $\mathfrak{A}^{\perp}$ の 1 次元部分ベクトル場 a を各 $gP\in G/P$ において $\mathfrak{A}_{gP}=a(gP)\oplus(a(gP))^{\perp}$ をみたすものとする. 今 $u_0\in G/P$ を任意にとる. u_0 を通る a の軌道を A とおく $u\in A$ を通り $a^{\perp}$ で生成される軌道を $A_u^{\perp}$ とおく. G/P の $2n-4$ 次元部分多様体 Σ_u を

$$\Sigma_u:=\{\Psi_{\mathbf{s}}(gP)|gP\in A_u^{\perp},\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n}\}$$

で定義する. 曲面群 $\{\Sigma_u\}_{u\in A}$ が G/P の葉層構造をなし各葉 Σ_u が戸田フローで不変であることは容易に分かる. QED

Lemma 1.16 における G/P の葉層構造を $\mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ としよう. Ψ を G/P の diffeo とする. Σ を G/P 内の超曲面で局所座標で $\Sigma=\{(\mathbf{p}(gP),\mathbf{q}(gP),\mu(gP))|gP\in\Sigma\}$ と表わせるとする. Σ の Ψ による "ずらし"を局所座標で

$$\{(\mathbf{p}(gP),\mathbf{q}(gP),\Psi^{*}\mu(gP))|gP\in\Sigma\}$$

で表示される G/P 内の $2n-4$ 次元の超曲面とし $\Psi\cdot\Sigma$ と書く. 次の命題が成り立つ.

Proposition 1.17. $\Sigma\in\mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ とする. 任意の $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{n}$ に対して $\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma\in\mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$.

Prop.1.17 より $\Psi_{\mathbf{t}}$ による $\mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ のずらしをベックルンド変換という.

$\Sigma\in\mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ は $2n-4$ 次元の超曲面だから (1.7) より $\mathfrak{X}(G/P)$ にシンプレクティック構造を定める. これを ω_{Σ} と表わす.

Proposition 1.18. $\Xi_{\mathbf{t}}$ は $(\mathfrak{X}(G/P),\omega_{\Sigma})$ から $(\mathfrak{X}(G/P),\omega_{\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma})$ へのシンプレクティック同相写像である.

$\mathfrak{X}(G/P)$ のシンプレクティック構造をベックルンド変換の軌道で類別出来る.

Theorem 1.19. $\Sigma\in\mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ とする. ω_{Σ} を通るベックルンド変換の軌道を $\mathscr{O}$ とする. ω を $\mathfrak{X}(G/P)$ のシンプレクティック構造とする. このとき $(\mathfrak{X}(G/P),\omega_{\Sigma})$ と $(\mathfrak{X}(G/P),\omega)$ がシンプレクティック同相 $\iff\omega\in\mathscr{O}$.

2 前量子化について

この§ではKostant[9]に従って前量子化の概要について述べたい. Mをシンプレクティック多様体としωをそのシンプレクティック構造とする. $[\omega]\in H^2(M;\mathbb{R})$が定まるが, $[\omega]\in H^2(M;\mathbb{Z})$であるとき$[\omega]$は整であるという. 今$[\omega]$が整であると仮定する. このとき$M$上に接続付きの複素直線束が定義できる. これを$(L,\alpha)$としよう. ただし$\alpha$は接続で$\tilde{\pi}^*\omega=d\alpha$をみたす. ここで$\tilde{\pi}$は$L^*=L-\{0\}$から$M$への射影とする. $\mathscr{L}_c(M)$でM上の接続付き直線束全体とする. $(L_1,\alpha_1),(L_2,\alpha_2)\in\mathscr{L}_c(M)$とする. ${}^\exists\varphi:L_1\to L_2$, diffeoが存在し$\varphi^*\alpha_2=\alpha_1$をみたし次の図式が可換になるとき$(L_1,\alpha_1)\sim(L_2,\alpha_2)$とし$\mathscr{L}_c(M)/\sim$をあらためて$\mathscr{L}_c(M)$とする. ただし$\pi_1,\pi_2$は射影とする.

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\varphi} & L_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M & \xrightarrow{\mathrm{id}} & M \end{array}$$

Proposition 2.1. $(L_1,\alpha_1)\sim(L_2,\alpha_2)$ならば$\omega_1=\omega_2$, ただし$\tilde{\pi}_1^*\omega_1=d\alpha_1$, $\tilde{\pi}_2^*\omega_2=d\alpha_2$.

proof. 次が成り立つ.

$$\tilde{\pi}_1^*\omega_1=d\alpha_1=d\varphi^*\alpha_2=\varphi^*d\alpha_2=\varphi^*\omega_2=(\tilde{\pi}_2\varphi)^*\omega_2=(\mathrm{id}\circ\tilde{\pi}_1)^*\omega_2=\tilde{\pi}_1^*\omega_2.$$

$\tilde{\pi}_1^*$は単射だから$\omega_1=\omega_2$. QED

$\mathscr{L}_c(M,\omega):=\{[(L,\alpha)]\in\mathscr{L}_c(M)|\tilde{\pi}^*\omega=d\alpha\}$とする. 今$\ell=[(L,\alpha)]\in\mathscr{L}_c(M,\omega)$を一つ固定する. $\mathscr{D}_\ell(M):=\{\varphi:M\to M\ diffeo|\varphi^*\omega=\omega\}$とし$E(L,\alpha):=\{\hat{\varphi}:L\to L\ diffeo|\hat{\varphi}^*\alpha=\alpha\}$とする. また$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$とする. ∇をαに伴うL上の共変微分としLにはα不変なHermite構造$(,)$が入っているものとする. すなわち$(,)$は各fiberごとにHermite形式を与えLの切断s,tにたいして$d(s,t)=(\nabla s,t)+(s,\nabla t)$をみたす.

Theorem 2.2. Lはα不変なHemite形式$(,)$を有するものとする. このとき下の図式は完全列である.

$$1\longrightarrow\mathbb{T}\xrightarrow{\text{embed}}E(L,\alpha)\xrightarrow{\text{proj}}\mathscr{D}_\ell(M)\longrightarrow 1 \tag{2.1}$$

proof. $U\in M$を開集合とし$\gamma(t)$をU内の滑らかな閉曲線とする. $r(t)\in\Gamma(U,L)$で$\pi(r(t))=\gamma(t)$となるものを$\gamma(t)$に沿った切断といおう. $\gamma(t)$に沿った切断で$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}r(t)=0$が成り立つとき$r(t)$を$x=r(0)$の$\gamma(t)$に沿った平行移動という. ある$Q(\gamma)\in\mathbb{C}^*$が存在し$r(0)=Q(\gamma)r(1)$と書ける. Lにはα不変なHermite形式が存在するから$Q(\gamma)=e^{-2\pi\sqrt{-1}\int_\gamma\alpha(s)}\in\mathbb{T}$と表せる. $\rho\in\mathscr{D}_\ell(M)$とする. Lのρによるひき戻しをρ^*Lとする. canonicalなdiffeoを$\tau_\rho:\rho^*L\to L$とする. $\check{\tau}_\rho=\rho$である. (L,α)の平行移動関数を$Q(\gamma)$とすると$Q(\gamma)=e^{-2\pi\sqrt{-1}\int_\sigma\omega}$, 但

し $\partial\sigma=\gamma$. 一方 $(\rho^*L,\tau_\rho^*\alpha)$ の平行移動関数を Q' とすると

$$d\tau_\rho^*\alpha=\tau_\rho^*d\alpha=\tau_\rho^*\varpi^*\omega=(\varpi\tau_\rho)^*\omega$$
$$=(\rho\varpi)^*\omega=\varpi^*\rho^*\omega=\varpi^*\omega.$$

よって

$$Q'(\rho\gamma)=e^{-2\pi\sqrt{-1}\int_{\rho\sigma}\omega}=$$
$$e^{-2\pi\sqrt{-1}\int_\sigma\rho^*\omega}=e^{-2\pi\sqrt{-1}\int_\sigma\omega}=Q(\gamma).$$

接続付き直線束は Q の値により類別されるから $(L,\alpha)\sim(\rho^*L,\tau_\rho^*\alpha)$ が成り立つ. よって $^\exists\zeta:L\to\rho^*L$, diffeo が存在し $\check{\zeta}=\mathrm{id}$, $\alpha=\zeta^*\tau_\rho^*\alpha=(\tau_\rho\zeta)^*\alpha$ となる. 一方 $(\check{\tau_\rho\zeta})=\rho$. よって $\tau_\rho\zeta\in E(L,\alpha)$ で $(\check{\tau_\rho\zeta})=\rho$ となり $\mathrm{proj}:E(L,\alpha)\to\mathscr{D}_\ell(M)$ は全射となる. $\tau\in E(L,\alpha)$ で $\check{\tau}=\mathrm{id}$ とする. τ に対して 0 にならない $\phi\in C^\infty(M)$ が存在して τ_ϕ と書ける. ここで $u\in L$ に対して $\tau_\phi u=\phi(\pi(u))u$. よって $\tau^*\alpha=\alpha+(1/2\pi\sqrt{-1})d\tilde{\phi}/\tilde{\phi}$. $\tau\in E(L,\alpha)$ より $d\tilde{\phi}=0$. $d\tilde{\phi}=d\pi^*\phi=\pi^*d\phi=0$. π^* は単射だから $\phi=0$. よって $\phi=m\in\mathbb{C}^*$ は定数. L は α 不変な Hermite 形式を持つから $m\in\mathbb{T}$. QED

(M,ω) はシンプレクティック多様体で $[\omega]$ が整であることは仮定しない. $X\in TM$ とし $\beta_X\in\Omega^1(M)$ を $\beta_X=\iota_X\omega$ で定義する. ここで ι_X は X による内部微分とする. ハミルトニアンベクトル場 $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a}=\{X\in TM|^\exists\phi\in C^\infty(M)\ \mathrm{s.t.}\beta_X=d\phi\}.$$

で定義する. 以下 [9] に倣い $C^\infty(M)$ を $\mathscr{R}$ と書く. ω は非退化だから
Proposition 2.3. 次の図式は完全列である.

$$0\longrightarrow\mathbb{R}\xrightarrow{\mathrm{embed}}\mathscr{R}\xrightarrow{\beta}\mathfrak{a}\longrightarrow0 \tag{2.2}$$

Remark 2.4. $\mathscr{R}$ には次で Poisson 構造が入る. $\phi,\psi\in\mathscr{R}$ とすると $\{\phi,\psi\}_M=\beta_{\xi_\phi}(\xi_\psi)$. Prop.2.3 の $\beta:\mathscr{R}\to\mathfrak{a}$ はこの Poisson 構造で Lie alg. hom. になっている. すなわち $\xi_{\{\phi,\psi\}_M}=[\xi_\phi,\xi_\psi]$.

再び $[\omega]$ が整であることを仮定する. (L,α), ただし $\tilde{\pi}^*\omega=d\alpha$, を M 上の接続付き直線束とする. $\ell=[(L,\alpha)]\in\mathscr{L}_c(M,\omega)$ とする. $\xi\in TL$ に対して $\theta(\xi)$ を ξ にかんする Lie 微分とする. $e(L,\alpha)$ を $e(L,\alpha)=\{\xi\in TL|\theta(\xi)\alpha=0\}$ で定義する.
Proposition 2.5. $\xi\in TM$ とし ξ が生成する 1 パラメーター群を $\sigma(t)$ とする. このとき

$$\xi\in e(L,\alpha)\iff\sigma(t)\in E(L,\alpha).$$

proof. $d/dt\sigma(t)^*\alpha=\theta(\xi)\alpha$ が成り立つ. よって $\xi\in e(L,\alpha)$ ならば $d/dt\sigma(t)^*\alpha=0$. よって $\sigma(t)^*\alpha=\mathrm{const.}$ 一方 $\sigma(0)=\mathrm{id}$ だから $\sigma(t)^*\alpha=\alpha$. 逆は明らか. QED

$u \in L^*$ としよう．T_uL^* の中の $L_{\pi(u)}$ の部分接空間を $\mathrm{Ver}_u L$ とする．また $\mathrm{Ker}\,\alpha$ を $\mathrm{Hor}_u L$ と置く．このとき直和分解

$$T_uL = \mathrm{Ver}_u L \oplus \mathrm{Hor}_u L \tag{2.3}$$

が成り立つ．$c \in \mathbb{C}$ に対して $c \cdot u = cu, u \in L$ とする．$e(L) \subset TL^*$ を $e(L) := \{\eta \in TL^* | c_*\eta_u = \eta_{cu}\}$ で定義する．

$$\mathrm{ver}\, L := \{\xi \in e(L) | \xi_u \in \mathrm{Ver}_u L \text{ for } {}^\forall u \in L^*\}$$

$$\mathrm{hor}\, L := \{\xi \in e(L) | \xi_u \in \mathrm{Hor}_u L \text{ for } {}^\forall u \in L^*\}$$

とする．(2.3) より $e(L) = \mathrm{ver}\, L \oplus \mathrm{hor}\, L$ が成り立つ．この直和分解を具体的に表そう．今 $\phi \in \mathscr{R}$ に対し $\eta(\phi) \in \mathrm{Ver}\, L$ を $u \in L^*$ において

$$\eta_u(\phi)\psi(u) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi(e^{-2\pi\sqrt{-1}\phi(\pi(u))}u), \psi \in C^\infty(L^*)$$

により定義する．

$$(c_*\eta_u)\psi = \eta_u(\phi)\psi(cu) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi(e^{-2\pi\sqrt{-1}\phi(\pi(cu))}cu)$$

$= \eta_{cu}\psi$．よって $\eta(\phi) \in \mathrm{ver}\, L$．完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ver}_u L \longrightarrow T_uL \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(u)}M \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

と $T_uL = \mathrm{Ver}_u \oplus \mathrm{Hor}_u L$ より ${}^\forall\xi \in T_{\pi(u)}M$ に対し ${}^{\exists 1}\tilde{\xi} \in \mathrm{Hor}_u L$ が存在し $\pi_*\tilde{\xi} = \xi$ となる．以上より ${}^\forall\eta \in e(L)$ に対して $\eta = \eta(\phi) + \tilde{\xi}$ が分解 (2.3) の具体的な形である．この η を $\eta = \eta(\phi, \xi)$ と書く．

Proposition 2.6. $\eta = \eta(\phi, \xi) \in e(L, \alpha) \iff \xi = \xi_\phi$.

proof. 次が成り立つ

$$\theta(\eta)\alpha = (d\iota(\eta) + \iota(\eta)d)\alpha = d\iota(\eta)\alpha + \pi^*\beta_\xi.$$

Lemma 2.7. $\iota(\eta(\phi))\alpha = -\tilde{\phi}$ が成り立つ．但し $\tilde{\phi}(u) = \phi(\pi(u))$.

proof. $x \in L^*$ に対して $L_{\pi(x)}$ 上の関数 $\psi_x(y)$ を $\psi_x(y) = y/x$ で定義する．

$$\eta(\phi)\psi_x(y) = (d/dt)|_{t=0}\psi_x(e^{-2\pi\sqrt{-1}t\phi(\pi(x))}y)$$

$$(d/dt)|_{t=0}(e^{-2\pi\sqrt{-1}\phi(\pi(x))}y/x) = -2\pi\sqrt{-1}\phi(\pi(x))\psi_x(y).$$

$\psi_x(x) = 1$ より $\tilde{\phi}(x) = (-1/2\pi\sqrt{-1})\eta_x(\phi)\psi_x(x)$．一方 $\alpha|_{L^*_{\pi(x)}} = (1/2\pi\sqrt{-1})d\psi_x/\psi_x$．よって $\alpha|_{L^*_{\pi(x)}}(x) = (1/2\pi\sqrt{-1})d\psi_x(x)$．以上から

$$\iota(\eta)\alpha = \langle\alpha(x), \eta(x)\rangle = \langle\alpha(x), \eta(\phi)(x)\rangle =$$

$$(1/2\pi\sqrt{-1})\eta(\phi)_x\psi_x(x) = -\tilde{\phi}(x).$$

Proposition 2.6 の証明の続き. 上の Lemma から

$$\theta(\eta)\alpha = d\iota(\eta)\alpha + \pi^*\beta_\xi = -d\tilde{\phi} + \pi^*\beta_\xi$$

$= -d\pi^*\phi + \pi^*\beta_\xi = \pi^*(-d\phi + \beta_\xi)$ となり π^* は単射だから $\eta \in e(L,\alpha) \iff \beta_\xi = d\phi$. よって $\eta \in e(L,\alpha) \iff \xi = \xi_\phi$. QED

Remark 2.8. $e(L,\alpha)$ の Lie bracket を計算すると

$$[\eta(\phi_1,\xi_{\phi_1}),\eta(\phi_2,\xi_{\phi_2})] = \eta(\{\phi_1,\phi_2\}_M,\xi_{\{\phi_1,\phi_2\}_M})$$

となる. $\pi_*(\eta(\phi,\xi_\phi)) = \xi_\phi$ より

$$\pi_*[\eta(\phi_1,\xi_{\phi_1}),\eta(\phi_2,\xi_{\phi_2})] = \xi_{\{\phi_1,\phi_2\}_M} = [\xi_{\phi_1},\xi_{\phi_2}]$$

となり π_* は Lie algebra homomorphism になる.

Proposition 2.9. 次の図式は完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow e(L,\alpha) \xrightarrow{\pi_*} \mathfrak{a} \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

Proposition 2.10. 次の図式を可換にする Lie algebra homomorphism $\tilde{\delta}$ が存在する, 但し上下は夫々(2.2) と (2.5) の完全列である.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{R} & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\delta}} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & e(L,\alpha) & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.6}$$

proof. $\tilde{\delta}$ を $\tilde{\delta}(\phi) = \eta(\phi,\xi_\phi)$ で定義する. このとき $\tilde{\delta}(\{\phi_1,\phi_2\}_M) = \eta(\{\phi_1,\phi_2\}_M,\xi_{\{\phi_1,\phi_2\}_M})$. Rem.2.8 より $= [\eta(\phi_1,\xi_{\phi_1}),\eta(\phi_2,\xi_{\phi_2})] = [\tilde{\delta}(\phi_1),\tilde{\delta}(\phi_2)]$. よって $\tilde{\delta}$ は Lie algebra homomorphism. 一方 $\pi_*\tilde{\delta}(\phi) = \xi_\phi$ で $\beta_{\xi_\phi} = d\phi$ より図式は可換. QED

∇ を α に関する L 上の共変微分としよう.

Proposition 2.11. $s \in \Gamma(M;L)$, $\xi_\phi \in \mathfrak{a}$ とする. $\xi_\phi s = (\nabla_{\xi_\phi} + 2\pi\sqrt{-1}\phi)s$ により $\Gamma(M;L)$ は $\mathfrak{a}-$ 加群なる.

proof. 上の s に対して $\tilde{s} \in C^\infty(L^*)$ を $\tilde{s}(x) = s(\pi(x))/x$ で定義する. 次が成り立つ.

Lemma. $\eta(\phi,\xi_\phi)\tilde{s}(x) = (\nabla_{\xi_\phi} + \widetilde{2\pi\sqrt{-1}\phi)s}(x)$

proof. [9] の Prop.3.4.2 を参照

上の Lemma より

$$\begin{aligned} [\eta(\phi_1,\xi_{\phi_1}),\eta(\phi_2,\xi_{\phi_2})]\tilde{s} &= \eta(\phi_1,\xi_{\phi_1})(\eta(\phi_2,\xi_{\phi_2})\tilde{s}) - 1 \leftrightarrow 2 \\ &= \eta(\phi_1,\xi_{\phi_1})((\nabla_{\xi_{\phi_2}} \widetilde{+ 2\pi\sqrt{-1}\phi_2)s}) - 1 \leftrightarrow 2 \\ &= (\nabla_{\xi_{\phi_1}} + 2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\phi_1)(\nabla_{\xi_{\phi_2}}} + 2\pi\sqrt{-1}\phi_2)s - 1 \leftrightarrow 2 \\ &= [\nabla_{\xi_{\phi_1}} + 2\pi\sqrt{-1}\widetilde{\phi_1,\nabla_{\xi_{\phi_2}}} + 2\pi\sqrt{-1}\phi_2]s. \end{aligned}$$

一方

$$[\eta(\phi_1,\xi_{\phi_1}),\eta(\phi_2,\xi_{\phi_2})]\tilde{s} = \eta(\{\phi_1,\phi_2\}_M,\xi_{\{\phi_1,\phi_2\}_M})\tilde{s}$$
$$= (\nabla_{[\xi_{\phi_1},\xi_{\phi_2}]} + 2\pi\sqrt{-1}\{\phi_1,\phi_2\}_M)s$$

υ を $\upsilon(\xi_\phi)s = (\nabla_{\xi_\phi} + 2\pi\sqrt{-1}\phi)s$ とすると上の議論から

$$[\widetilde{\upsilon(\xi_{\phi_1}),\upsilon(\xi_{\phi_2})}]s = \upsilon(\widetilde{[\xi_{\phi_1},\xi_{\phi_2}]})s.$$

$\tilde{s}=0$ ならば $s=0$ より υ により $\Gamma(M;L)$ は $\mathfrak{a}-$ 加群. QED

Remark 2.12. $\delta : \mathscr{R} \to \mathrm{End}(\Gamma(M;L))$ を $\delta(\phi) = \nabla_{\xi_\phi} + 2\pi\sqrt{-1}\phi$ で定めると $\Gamma(M;L)$ は $\mathscr{R}-$ 加群になり $\widetilde{\delta(\phi)}s = \tilde{\delta}(\phi)\tilde{s}$ となる.

Remark 2.13. δ を $\mathscr{R}$ の前量子化という. Lie 群 G の具体的なユニタリー表現を構成する際にはさらに偏極という概念が必要となる. 例えば G を可解 Lie 群としその余随伴軌道を考える. $\mathscr{O} \in \mathfrak{g}^*/G$ とし $f \in \mathscr{O}$ とする. $X,Y \in \mathfrak{g}$ に対し $B_f(X,Y) = \langle f,[X,Y]\rangle$ とする. B_f に対する極大等方部分環の中である条件を満たすものを偏極環という. $P^+(f,G)$ を f における正偏極環全体の集合とする. 今 $\mathfrak{p} \in P^+(f,G)$ としたとき $\mathfrak{p}$ から部分群 D が定まる. f の固定群を $G(f)$ とする. $G(f) \subset D$ で f が整という条件を満たすとき $G(f)$ の指標 $\sigma_f : G(f) \to \mathbb{T}$ は $\hat{\sigma}_f : D \to \mathbb{T}$ に一意的に拡張でき Hirbert 空間 $\mathscr{H}(f,\hat{\sigma}_f,\mathfrak{p},G)$ 上のユニタリー表現 $\mathrm{Ind}_D^G\,\hat{\sigma}_f$ が定義出来る. この表現は偏極環 $\mathfrak{p}$ の取り方によらずまた $f \in \mathscr{O}$ の取り方にもよらない. 次の§では δ による G の L の大域切断上への表現を考えるが偏極を定義し具体的なユニタリー表現を構成するには G の具体的な条件, たとえば冪零であるとか指数型可解リー群であるか, が必要となる.

(M,ω) をシンプレクティック多様体とし G を連結なリー群とする. G の M への作用を $\sigma(g), g \in G$ とする. $^\forall g \in G$ に対して $\sigma(g)^*\omega = \omega$ であるとき σ を G-シンプレクティック作用という. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,G$ とする. $^\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して $d\sigma(X) \in \mathfrak{a}$ であるとき strongly G-シンプレクティック作用という. strongly G-シンプレクティック作用ならば G-シンプレクティック作用である.

Definition. σ を G の strongly G-シンプレクティック作用とする. 次の図式を可換にする Lie algebra homomorphism $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{R}$ を $d\sigma$ の持ち上げという. 但し下の完全列は (2.2) のものである.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "d\sigma(X)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathscr{R} \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Proposition 2.14. $H^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = 0$ ならば $d\sigma$ の持ち上げは存在する.

proof. 線形写像 $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathscr{R}$ を (2.7) が可換になるように定義する. $x,y \in \mathfrak{g}$ とすると

$$\xi_{\lambda([x,y])} = d\sigma([x,y]) = [d\sigma(x),d\sigma(y)] = [\xi_{\lambda(x)},\xi_{\lambda(y)}]$$

$= \xi_{\{\lambda(x),\lambda(y)\}}$ となる．よって $\xi_{\lambda([x,y])-\{\lambda(x),\lambda(y)\}} = 0$. 今 $\mu(x,y) := \lambda([x,y]) - \{\lambda(x),\lambda(y)\}$ とおくと (2.7) の下段が完全列であることから $\mu(x,y) \in \wedge^2\mathfrak{g}$ となる．今 $x,y,z \in \mathfrak{g}$ とすると

$$d\mu(x,y,z) = \mu([x,y],z) - \mu([x,z],y) + \mu([y,z],x)$$

$$= \lambda([[x,y]],z) - \{\lambda([x,y]),\lambda(z)\} + cyc.$$

$\mu(x,y)$ が定数であることに注意すると

$$= \lambda([[x,y],z]) - \{\{\lambda(x),\lambda(y)\} + \mu(x,y),\lambda(z)\} + cyc.$$

$$= \lambda([[x,y],z]) + cyc.) - (\{\{\lambda(x),\lambda(y)\},\lambda(z)\} + cyc\} + cyc) = 0.$$

よって μ はコサイクル．仮定より $^{\exists}\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$ が存在し $\mu(x,y) = d\mu_0(x,y) = \mu_0([x,y])$ と書ける．$\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x) - \mu_0(x)$ とすると

$$\tilde{\lambda}([x,y]) = \lambda([x,y]) - \mu_0([x,y]) = \{\lambda(x),\lambda(y)\} + \mu(x,y) - \mu_0([x,y])$$

$$= \{\lambda(x),\lambda(y)\} = \{\tilde{\lambda}(x) + \mu_0(x), \tilde{\lambda}(y) + \mu_0(y)\} = \{\tilde{\lambda}(x),\tilde{\lambda}(y)\}. \quad \text{QED}$$

λ を $d\sigma$ の持ち上げとする．すると次の図式を可換にする Lie algebra homomorphism $\tilde{\delta}\circ\lambda : \mathfrak{g} \to e(L,\alpha)$ が定義できる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \lambda\big\downarrow & & d\sigma\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{R} & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\| & & \tilde{\delta}\big\downarrow & & \big\| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & e(L,\alpha) & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (2.8)$$

(2.8) の "積分型" の次の定理を得る．

Theorem 2.15 ([9] Th.4.5.1 p175). (M,ω) をシンプレクティック多様体とし $[\omega]$ を整と仮定する．$(L,\alpha) \in \mathscr{L}_c(M,\omega)$ とする．また σ を G-シンプレクティック作用とする下の図式を可換にする Lie group homomorphism $\sigma_L : G \to E(L,\alpha)$ が存在するための必要十分条件は

(i) σ は strongly G-シンプレクティック作用である．

(ii)$d\sigma$ は持ち上げ λ を持つ．

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \sigma_L\big\downarrow & & \sigma\big\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \longrightarrow & E(L,\alpha) & \longrightarrow & \mathscr{D}_\ell & \longrightarrow & 1
\end{array} \qquad (2.9)$$

但し下段は (2.1) の完全列である．

3　シンプレクティック写像の持ち上げについて

ω, ω' を M 上のシンプレクティック構造として $[\omega], [\omega']$ は共に整であるものとする．$(L,\alpha), (L',\alpha')$ を M 上の接続付き直線束で $\tilde{\pi}^*\omega = d\alpha$, $\tilde{\pi}'^*\omega' = d\alpha'$ とする．ここで $\tilde{\pi}, \tilde{\pi}'$ は夫々L^*, L'^* から M への射影である．$\ell = [(L,\alpha)] \in \mathscr{L}_c(M,\omega)$, $\ell' = [(L',\alpha')] \in \mathscr{L}_c(M,\omega')$ とする．

Proposition 3.1. φ を (M,ω) から (M,ω') へのシンプレクティック同相写像とする．このとき $^\exists\hat{\varphi} : L \to L'$ diffeo が存在し次をみたす．

(i) $\hat{\varphi}^*\alpha' = \alpha$

(ii) 次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & L' \arrow[d, "\pi'"'] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

proof. φ^*L' を L' の φ による引き戻しとする．$\tau : \varphi^*L' \to L'$ を $\varphi^*(p,u) = u$ で定義する．ただし $p \in M, u \in L'_{\varphi(p)}$ である．次の図式は可換である (π'' は射影)

$$\begin{tikzcd} \varphi^*L' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi''"'] & L' \arrow[d, "\pi'"'] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

Lemma. $(L,\alpha) \sim (\phi^*L', \tau^*\alpha)$

proof. 次が成り立つ

$$d\tau^*\alpha' = \tau^*d\alpha' = \tau^*\tilde{\pi}'^*\omega' = (\tilde{\pi}'\tau)^*\omega'$$

$$= (\varphi\tilde{\pi}'')^*\omega' = \tilde{\pi}''^*\varphi^*\omega' = \tilde{\pi}''^*\omega.$$

Th.2.2 の平行移動関数 $Q_\ell(\gamma)$ は ω により値が決まり ℓ は Q_ℓ の値により定まるから $(L,\alpha) \sim (\varphi^*L', \tau^*\alpha')$.

この Lemma より下の図式を可換にする diffeo, $\eta : L \to \varphi^*L'$ が存在し $\eta^*(\tau^*\alpha') = \alpha$ をみたす．

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi^*L' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi''"'] & L' \arrow[d, "\pi"'] \\ M \arrow[r, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

よって $\hat{\varphi} = \tau \circ \eta$ とすると $\hat{\varphi} : L \to L'$ は diffeo で $\hat{\varphi}^*\alpha' = (\tau\eta)^*\alpha' = \alpha$. 図式の可換性は明らか．　QED

G を Lie 群とし (M,ω), (M,ω') を strongly G-シンプレクティック空間 (すなわち G が strongly G-シンプレクティックに作用している多様体) とする．また $[\omega]$, $[\omega']$ は共に整とする．σ_ω, $\sigma_{\omega'}$ を G の (M,ω), (M,ω') への srongly G-シンプレクティック作用とし夫々の $E(L,\alpha)$, $E(L',\alpha')$ への持ち上げ $\sigma_L, \sigma_{L'}$ が存在すると仮定する．$\varphi:(M,\omega)\to(M,\omega')$ をシンプレクティック同相写像とする．さらに $^\forall g\in G$ に対して $\varphi\sigma_\omega(g)=\sigma_{\omega'}(g)\varphi$ が成り立つと仮定する．今 $\ell=[(L,\alpha)]\in\mathscr{L}_c(M,\omega)$ とすると

$$\lambda(g)=\varphi^{-1}\sigma_\omega^{-1}(g)\varphi\sigma_\omega(g)=\mathrm{id}_M\in\mathscr{D}_\ell(M).$$

よって $\lambda(g)=\sigma_\omega(e)\in\mathrm{Image}\,\sigma_\omega$. となり Th.2.15 より λ の持ち上げ $\hat\lambda$ が存在する．$^\forall g\in G$ について $\lambda(g)=\mathrm{id}$ より $\hat\lambda(g)=m(g)\in\mathbb{T}$. 今 $\hat\lambda(g)=\hat\varphi^{-1}\sigma_{L'}(g)^{-1}\hat\varphi\sigma_L(g)$ とおくと $\check{\hat\lambda}(g)=\lambda(g)=\mathrm{id}$ よってこうして定義した $\hat\lambda$ は id_M の持ち上げだから $\hat\lambda(g)=m(g)=e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma(g)}\in\mathbb{T}$. ここで γ は G の加法的指標すなわち $\gamma(g)\in\mathbb{R}$ で $\gamma(g_1g_2)=\gamma(g_1)+\gamma(g_2)$. 今 G の加法的指標 β と β' を $\alpha(g)=\beta(g)-\beta'(g)$ となるようにとる．Th 2.15 において σ の持ち上げ σ_L の取り方は加法的指標の掛算の自由度だけあった．従って上の σ_L, $\sigma_{L'}$ の代わりに $\tilde\sigma_L(g)=e^{2\pi\sqrt{-1}\beta(g)}\sigma_L(g)$, $\tilde\sigma_{L'}(g)=e^{2\pi\sqrt{-1}\beta(g)}\sigma_{L'}(g)$ とおくと

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma(g)}=e^{-2\pi\sqrt{-1}\beta'(g)}e^{2\pi\sqrt{-1}\beta(g)}\hat\varphi^{-1}\tilde\sigma_{L'}(g)^{-1}\hat\varphi\tilde\sigma_L(g).$$

よって $\hat\varphi\tilde\sigma_{L'}(g)=\tilde\sigma_L(g)\hat\varphi$ for $^\forall g\in G$ をみたす．以上をまとめると

Theorem 3.2. (M,ω), (M,ω') をシンプレクティック多様体とし $[\omega]$, $[\omega']$ は共に整とする．$[(L,\alpha)]\in\mathscr{L}_c(M,\omega)$, $[(L',\alpha')]\in\mathscr{L}_c(M,\omega')$ とし σ_ω, $\sigma_{\omega'}$ は夫々(M,ω), (M,ω') 上の strongly G-シンプレクティック作用で $E(L,\alpha)$, $E(L',\alpha')$ への持ち上げを持つものとする．$\varphi:(M,\omega)\to(M,\omega')$ をシンプレクティック同相写像とし，任意の $g\in G$ について $\varphi\sigma_\omega(g)=\sigma_{\omega'}(g)\varphi$ が成り立つものとする．このとき φ の持ち上げ $\hat\varphi:L\to L'$ が存在し $\hat\varphi^*\alpha'=\alpha$, $\hat\varphi\sigma_L(g)=\sigma_{L'}(g)\hat\varphi$ for $^\forall g\in G$ をみたすものが存在する．

$S_\alpha:=\Gamma(M;(L,\alpha))$, $S_{\alpha'}=\Gamma(M,(L',\alpha'))$ とする．G の表現 ρ_α を $s(x)\in S_\alpha$ に対して $(\rho_\alpha(g)s)(x)=\sigma_L(g)s(\sigma_\omega(g)^{-1}x)$ で定義する．$\rho_{\alpha'}$ も同様に定義する．$\Upsilon_\varphi:S_\alpha\to S_{\alpha'}$ を $(\Upsilon_\varphi s)(x)=\hat\varphi s(\varphi x)$ で定義する．

Proposition 3.3. Υ_φ は ρ_α と $\rho_{\alpha'}$ の間の intertwining operator である．

proof. Υ_φ は $\mathbb{C}$ 線形である．実際 $s_1,s_2\in S_\alpha$ とすると

$$\Upsilon_\varphi(s_1+s_2)(x)=\hat\varphi((s_1+s_2)(\varphi(x)))=\hat\varphi(s_1(\varphi(x))+s_2(\varphi(x)))$$

$$=\hat\varphi s_1(\varphi(x))+\hat\varphi s_2(\varphi(x))=\Upsilon_\varphi(s_1)(x)+\Upsilon_\varphi(s_2)(x).$$

よって $\Upsilon_\varphi(s_1+s_2)=\Upsilon_\varphi(s_1)+\Upsilon_\varphi(s_2)$ を得る．$m\in\mathbb{C}$ に対して

$$\Upsilon(ms(x))=\Upsilon_\varphi ms(x)=\hat\varphi ms(\varphi(x))=m\hat\varphi s(\varphi(x))=m\Upsilon_\varphi(s(x)).$$

よって $\Upsilon_\varphi ms = m\Upsilon_\varphi s$. 従って Υ_φ は $\mathbb{C}$ 線形. 任意の $g \in G$ に対して

$$\Upsilon_\varphi(\rho_\alpha(g)s(x)) = \Upsilon_\varphi(\sigma_L(g)s(\sigma_\omega(g)^{-1}x) = \hat{\varphi}\sigma_L s(\varphi\sigma_\omega(g)^{-1}x)$$

$$= \sigma_{L'}(g)\hat{\varphi}s(\sigma_{\omega'}(g)^{-1}\varphi x) = \rho_{\alpha'}(g)\hat{\varphi}s(\varphi x) = \rho_{\alpha'}(g)\Upsilon_\varphi s(x).$$

よって $\Upsilon_\varphi\rho_\alpha(g) = \rho_{\alpha'}(g)\Upsilon_\varphi$ for ${}^\forall g \in G$ が成り立つ. QED

4 戸田フローの inertwining operator への持ち上げ

$K = R\backslash U$ は $\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{q} & O & \mathbf{0} \\ 0 & {}^t\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-2} \right\}$ とすると $K = E_n + \mathfrak{k}$ と書ける. $x = E_n + w \in K$, $w \in \mathfrak{k}$ に対して P の K への作用 ρ を $g \in P$ とすると

$$\rho(g)x = E_n + \pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}(g)w) \tag{4.1}$$

で定義する. 但し $\pi_\mathfrak{u}$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{u}$ への射影.

Proposition 4.1. ρ は P の K 上の作用になっている.

proof. まず $\rho(g)x \in K$ を示す. $\mathfrak{gl}_n$ の行列単位 $E_{i,j}$ に対してそのウエイトを $wt(E_{i,j}) = i - j$ で定義する. $wt(E_{n,1}) = n - 1$ となる. $A = \{I = (i,j) \in \mathbb{Z}^2 | 1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n\}$ とする. $(i,j) \in A$ 及び $2 \leq k \leq n-1$ に対し $[E_{i,j}, E_{k,1}] = 0$ or $wt([E_{i,j}, E_{k,1}]) = i - j + k - 1$. $[E_{i,j}, E_{k,1}] \neq 0$ とする. $(i,j) \in A$ より $i-j = n-\ell, \ell = 3, \ldots, 2n-1$ と書ける. $i-j+k-1 = n-1$ とすると $n-(i-j) = k$. $2 \leq k \leq n-1$ より $k = 2$ のとき $i-j = n-2$. しかし $A \cap \{(i,j) | i-j = n-2\} = \phi$. 次に $k = 3$ とすると $A \cap \{(i,j) | i-j = n-3\} = (n-1, 2)$. しかし $[E_{n-1,2}, E_{3,1}]$ は $E_{n,1}$ という項を含みえない. 以下 $k = 4, \ldots, n-1$ としても同様に $[E_{i,j}, E_{k,1}]$ は $E_{n,1}$ を項として含みえないことが分かる. 同様に $(i,j) \in A$ のときも $[E_{i,j}, E_{n,k}]$ は $E_{n,1}$ を項として含まないことが分かる. よって $\pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, gw) \in \mathfrak{k}$. 従って $\rho(g)x \in K$. 次に $a, b \in P$ とすると

$$\rho(ab)x = E_n + \pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}(ab)w) = E_n + \pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, a(\mathrm{Ad}\, bw))$$

$$= E_n + \pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, a(\pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, bw) + \mathfrak{p})) = E_n + \pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, a(\pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, bw))$$

$$= \rho(a)(E_n + \pi_\mathfrak{u}(\mathrm{Ad}\, bw)) = \rho(a)(\rho(b)x). \quad \text{QED}$$

Remark. $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{p}$-$\mathfrak{u}$ 分解を使うため $\pi_\mathfrak{u}$ は $\pi_\mathfrak{k}$ に替えられない.

$K_\phi = K_0$ への P の作用 ρ_0 を Prop.4.1 で定義したものとする. ρ_0 を $\mathfrak{X}(G/P)$ 全体へ拡張する. $\phi_{0,\sigma}$ を K_0 から K_σ への座標変換とする. 任意の $g \in G$ に対し

て次の図式が可換となるように $\rho_\sigma(g)$ を定義する.

$$\begin{array}{ccc} K_0 \cap K_\sigma & \xrightarrow{\phi_{0\sigma}} & \phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\sigma) \\ {\scriptstyle \rho_0(g)}\downarrow & & {\scriptstyle \rho_\sigma(g)}\downarrow \\ K_0 \cap K_\sigma & \xrightarrow{\phi_{0\sigma}} & \phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\sigma) \end{array}$$

$a, b \in P$ とすると $x \in \phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\sigma)$ に対して

$$\rho_\sigma(ab)x = \phi_{0\sigma}\rho_0(ab)\phi_{0\sigma}^{-1}x = \phi_{0\sigma}\rho_0(a)\rho_0(b)\phi_{0\sigma}^{-1}x$$

$$(\phi_{0\sigma}\rho_0(a)\phi_{0\sigma}^{-1})(\phi_{0\sigma}\rho_0(b)\phi_{0\sigma}^{-1})x = \rho_\sigma(a)(\rho_\sigma(b)x).$$

よって ρ_σ は P の $\phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\sigma)$ 上の作用になっている. $\phi_{0\sigma}$ は K_σ 上 open dense だから任意の $g \in P$ について $\rho_\sigma(g)$ を K_σ 上に解析的に拡張できる. それをあらためて $\rho_\sigma(g)$ と書こう. $a, b \in P$ について

$$\rho_\sigma(ab)|_{\phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\sigma)} = \rho_\sigma(a)\rho_\sigma(b)|_{\phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\phi)}$$

であったから, これをそのまま K_σ 上に拡張出来て $\rho_\sigma(ab) = \rho_\sigma(a)\rho_\sigma(b)$ となる. よって ρ_σ は P の K_σ 上の作用になっている. 今任意の $g \in P$ に対して $\rho(g) : \mathfrak{X}(G/P) \to \mathfrak{X}(G/P)$ を $\rho(g)|_{K_\sigma} = \rho_\sigma(g)$ で定義する.

Proposition 4.2. ρ は P の $\mathfrak{X}(G/P)$ 上の作用になっている.

proof. この定義が well-defined であることを見れば良い. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ とし $x \in K_\sigma \cap K_\tau$ とする. $K_\sigma \cap K_\tau \cap K_0 = (K_\sigma \cap K_0) \cap (K_\tau \cap K_0)$ は $K_\sigma \cap K_\tau$ で open dense. $\phi_{\sigma\tau} : \phi_{0\sigma}(K_0 \cap K_\sigma \cap K_\tau) \to \phi_{0\tau}(K_0 \cap K_\sigma \cap K_\tau)$ を $\phi_{\sigma\tau} = \phi_{0\tau}\phi_{0\sigma}^{-1}$ で定義する. この $\phi_{\sigma\tau}$ を K_σ に解析的に拡張したものを K_σ から K_τ への座標変換とし同じ記号を使う. 任意の $g \in P$ に対して

$$\phi_{\sigma\tau}\rho_\sigma(g) = \phi_{0\tau}\phi_{0\sigma}^{-1}\rho_\sigma(g) = \phi_{0\tau}\phi_{0\sigma}^{-1}\phi_{0\sigma}\rho_0(g)\phi_{0\sigma}^{-1}$$

$$= \phi_{0\tau}\rho_0(g)\phi_{0\sigma}^{-1} = \phi_{0\tau}\rho_0(g)\phi_{0\tau}^{-1}\phi_{0\tau}\phi_{0\sigma}^{-1} = \rho_\tau(g)\phi_{\sigma\tau}.$$

よって $\phi_{\sigma\tau}\rho_\sigma(g) = \rho_\tau(g)\phi_{\sigma\tau}$ が $K_\sigma \cap K_\tau \cap K_0$ 上成り立つ. $K_\sigma \cap K_\tau \cap K_0$ は $K_\sigma \cap K_\tau$ 上 open dense だから $K_\sigma \cap K_\tau$ 上 $\phi_{\sigma\tau}\rho_\sigma(g) = \rho_\tau(g)\phi_{\sigma\tau}$ が成り立つ. よって $\rho(g)$ は任意の $g \in P$ について well-defined QED

$\Sigma \in \mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ に対し $\mathfrak{X}(G/P)$ 上の接続付き直線束 (L, α_Σ) が定義された. $\mathfrak{X}(G/P)$ 上のシンプレクティック構造 ω_Σ が $\varpi^*\omega_\Sigma = d\alpha_\Sigma$ により定義される. ここで ϖ は L から $\mathfrak{X}(G/P)$ への射影とする. 以後直線束あるいはその部分束から $\mathfrak{X}(G/P)$ への射影を $\varpi_{\dots}$ で表し G/P あるいはその部分多様体から $\mathfrak{X}(G/P)$ への射影を $\pi_{\dots}$ で表わすことにする. (L, α_Σ) の存在から $[\omega_\Sigma]$ は必然的に整で Th.2.1 より次の完全列を得る

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow E(L, \alpha_\Sigma) \longrightarrow \mathscr{D}_{\ell_\Sigma} \longrightarrow 1 \qquad (4.2)$$

但し $\ell_\Sigma = [(L,\alpha_\Sigma)]$ とする．さて Prop.4.2 で定義した P の作用が $\mathscr{D}_{\ell_\Sigma}(\mathfrak{X}(G/P))$ に属し $E(L,\alpha_\Sigma)$ に持ち上げられることを示す．$\varpi^{-1}(K_0) = U_0 \times_R \mathbb{C}$ であることから任意の $u \in \varpi^{-1}(K_0)$ は $u = [gP,m]$, $gP \in U_0, m \in \mathbb{C}$ と表わせる．今 ρ_0 が U_0 への作用に持ち上がったとする．すなわち P の作用で次の図式を可換にするものが定義できたとする．

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\tilde{\rho}_0} & U_0 \\ {\scriptstyle \pi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ K_0 & \xrightarrow{\rho_0} & K_0 \end{array}$$

このとき $\hat{\rho}_0$ を $\hat{\rho}_0(a)u = [\tilde{\rho}_0(a)gP,m]$ で定義すれば $\hat{\rho}_0$ は $\varpi^{-1}(K_0)$ の P の作用になる．$U_0 \simeq R \times K$ より P の作用を $g = \begin{pmatrix} p & {}^t\mathbf{u} & m \\ \mathbf{0} & Q & \mathbf{v} \\ 0 & {}^t\mathbf{0} & q \end{pmatrix} \in P$ としたとき $t_c \in R$ に対して $\rho_1(g)t_c = t_{(q/p)c}$, $\rho_2(g)$ を Prop.4.1 で定義した P の K への作用とすると $\tilde{\rho}_0(g) = \rho_1(g) \times \rho_2(g)$ で定義する．以前と同じ手法で $\tilde{\rho}_0(g)$ を P の作用を G/P 全体に拡張したものを $\tilde{\rho}(g)$ と書く．よって任意の $g \in P$ に対して diffeo $\hat{\rho}(g) : L \to L$ が定義された．$\hat{\rho}(g) \in E(L,\alpha_\Sigma)$ とするために $\hat{\rho}$ を P のある部分群 P_0 に制限する．今

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & {}^t\mathbf{u} & m \\ \mathbf{0} & Q & \mathbf{v} \\ 0 & {}^t\mathbf{0} & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \subset P$$

とする．$\rho|_{P_0}, \tilde{\rho}|_{P_0}, \hat{\rho}|_{P_0}$ をあらためて $\rho, \tilde{\rho}, \hat{\rho}$ と書く．(L,α_Σ) に対し $\hat{\rho}(g)^*\alpha_\Sigma = \alpha_{\tilde{\rho}(g)\cdot\Sigma}$. ところで $a \in P_0$ とすると $(\mathbf{p}(gP), \mathbf{q}(gP), \mu(gP))$ を Σ の局所座標としたとき $\tilde{\rho}(a)^*\mu(gP) = \mu(gP)$. よって $\tilde{\rho}(a)\cdot\Sigma = \Sigma$ となり $\hat{\rho}(g)^*\alpha_\Sigma = \alpha_{\tilde{\rho}(g)\cdot\Sigma} = \alpha$. $\mathfrak{p}_0 = \mathrm{Lie}\, P_0$ とする．

Proposition 4.3. 上で定義した ρ が $\mathfrak{X}(G/P)$ への strongly P_0−symplectic 作用で $H^2(\mathfrak{p}_0;\mathbb{R}) = 0$ とすると P_0 の作用 $\rho : P_0 \to \mathscr{D}_\omega(\mathfrak{X}(G/P))$ の持ち上げ $\hat{\rho} : P_0 \to E(L,\alpha_\Sigma)$ が存在する．

$\Sigma \in \mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ に対し戸田格子の Hamiltonian flow により $\mathfrak{X}(G/P)$ 上のシンプレクティック同相 $\Xi\mathbf{t} : (\mathfrak{X}(G/P), \omega_\Sigma) \to (\mathfrak{X}(G/P), \omega_{\Psi_\mathbf{t}\cdot\Sigma})$ が定義された．$\Xi_\mathbf{t}$ を誘導した $\Psi_\mathbf{t}$ は diffeo. よって $\Psi_\mathbf{t} U_\sigma \subset U_\sigma$. 従って $\Xi_\mathbf{t} K_\sigma \subset K_\sigma$ for ${}^\forall\sigma \in \mathfrak{S}_\sigma$. $\rho : G \to \mathscr{D}_\ell(\mathfrak{X}(G/P))$ を ρ_Σ と書こう．その持ち上げを $\hat{\rho}_\Sigma$ と書こう．ρ_Σ は $\mathfrak{X}(G/P)$ の座標変換で定義されるから次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(G/P) & \xrightarrow{\Xi_\mathbf{t}} & \mathfrak{X}(G/P) \\ {\scriptstyle \rho_\Sigma(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\Psi_\mathbf{t}\cdot\Sigma}} \\ \mathfrak{X}(G/P) & \xrightarrow{\Xi_\mathbf{t}} & \mathfrak{X}(G/P) \end{array}$$

よって Th.3.2 により $\Xi_{\mathbf{t}}$ の持ち上げ $\hat{\Xi}_{\mathbf{t}} : (L, \alpha_\Sigma) \to (L', \alpha_{\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma})$, $\alpha_\Sigma = \hat{\Xi}_{\mathbf{t}}^* \alpha_{\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma}$ が存在し任意の $g \in P_0$ に対して

$$\hat{\rho}_{\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma}(g)\hat{\Xi}_{\mathbf{t}} = \hat{\Xi}_{\mathbf{t}}\hat{\rho}_\Sigma(g)$$

をみたす. ϱ を §3 で定義した ρ_Σ により誘導される P_0 の $\Gamma(\mathfrak{X}(G/P); (L, \alpha_\Sigma))$ 上の表現とすると Prop.3.3 により ϱ_Σ と $\varrho_{\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma}$ の間の intertwining operator $\Upsilon_{\Xi_{\mathbf{t}}}$ が定義される. 以上をまとめると

Theorem. $\Sigma \in \mathscr{F}_{\mathrm{Toda}}$ とする. このとき戸田格子の Hamiltonian flow によるシンプレクティック構造の軌道 $\{\omega_{\Psi_{\mathbf{t}}\cdot\Sigma} | \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n\}$ に対し一つの P_0 の表現の同値な class $[(\varrho_\Sigma, \Gamma(\mathfrak{X}(G/P); L)]$ が対応する.

References

[1] Auslender, L. and Kostant, B.: "Polarization and unitary representations of solvable Lie groups." *Invent.Math.* **14**, no. 4 (1971): 255-354.

[2] Drinfeld, V.G.: "On Poisson homogeneous spaces of Poisson-Lie groups." *Theoret. and Math. Phys.* **95** no. 2 (1993): 524-525.

[3] Ercolani, N., Flaschka, H. and Singer, S.: "The geometry of the full Kostant-Toda lattice." *Integrable systems (Lumminy, 1991)*, in: Babelon,O, Cartier, P. and Kosmann-Schwarzbach,Y.(Eds), Prog. Math. **115** Birkhäuser Boston, MA, 1993, pp181-225.

[4] Givental, A.: "Stationary phase integrals, quantum Toda lattice, flag manifolds and mirror conjecture." *Topics in singular theory*, 103-115. *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser.2 180 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[5] Goodearl, R. and Yakimov, M.:"Poisson structures of affine spaces and flag varieties II." *Trans. AMS* **361**, no. 11 (2009): 5753-5780.

[6] Gromov, M.: "Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds." *Invent. Math.* **82**, no. 2 (1985):307-347.

[7] Ikeda, K.: "The algebraic integrability of the quantum Toda lattice and the Radon transform." *Jour.Fourier Anal. and Appl.* **15**, no.1 (2009): 80-100.

[8] Kirillov, A.: "Lectures on the orbit method" *Graduate Studies in Math.* vol.**64**, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[9] Kostant, B.: "Quantization and unitary representation." *Lect. Note in Math.* **170** Springer, Berlin 1970, pp 87-208.

[10] ——: "On Whittaker vectors and representation theory." *Invent. Math.* **48**, no. 2 (1978): 101-184.

[11] Semenov-Tian-Shansky, M.A.: "Drassing transformations and Poisson group actions" *Publ. RIMS Kyoto University* **21** no. 6 (1985): 1237-1260.

[12] Vergne, M.: "Construction de sous-algèbres subordonée a un element du dual d'une algèbre de Lie resoluble." *C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B* **270** (1970): A173-A175, A704-A707.