数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 133-141

Classification of visible actions on flag varieties and its application

東京大学大学院数理科学研究科　田中 雄一郎
Yuichiro Tanaka
Graguate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　導入

本稿において述べる主結果は、「一般旗多様体への強可視的作用の分類」です。ここで（強）可視的作用とは、リー群の複素多様体への正則な作用に対して定義される、小林俊行氏によって導入された概念です。

定義 1.1 ([Ko3]). リー群 G が連結複素多様体 D に正則に作用しているとする。ある D の部分多様体 S であって次の条件を満たすものが存在するとき、G の作用は* **強可視的**であるという。

- $D' := G \cdot S$ は D の開集合である。
- D' の反正則微分同相写像 σ が存在して、σ は $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ を満たし、各 G-軌道を保つ。

また、上で S を単に D の部分集合とした場合は、G の作用は **S-可視的**であるという。

可視的な作用の理論はリー群の無重複表現の統一的扱いをその目的としています。ここで、無重複表現とは次のように† 定義される表現です。

*表現の無重複性を示唆するものとしては、コンパクトリー群の coisotropic 作用 ([HW]) や簡約型代数群の spherical 作用 ([VK]) 等がありますが、可視的な作用の定義及び後述の無重複性の伝播定理において、群や作用する空間のコンパクト性等の要請がない（群は簡約型ですらなくともよい）ことに注意してください。polar 作用、coisotropic 作用及び可視的作用の関係については [Ko3] を、spherical 作用と可視的作用との関連については [Ko5],[Sa1],[Sa2] や本稿の主結果等を参照のこと。

†例えばコンパクト群 G に対して $L^2(G)$ は $G \times G$ の無重複表現です (Peter–Weyl)。主結果に関連する無重複表現は全て有限次元ですが、可視的な作用の理論は無限次元表現にも有効な理論ですので、このように定義しています。この定義であれば、ユニタリ表現 $\mathcal{H}$ が無限次元で連続スペクトラムを含む場合にも通用しますし、$\mathcal{H}$ が有限次元である場合には,「$\mathcal{H}$ の既約分解に各既約表現が高々一度しか現れない」という通常の定義と同値になります。

定義 1.2. G を局所コンパクト群、$\mathcal{H}$ を G のユニタリ表現とする。このとき、

$$\mathcal{H} \text{ は無重複表現} \Leftrightarrow \mathrm{End}_G(\mathcal{H}) \text{ は可換}$$

リー群の複素多様体への（強）可視的作用があると、次の「無重複性の伝播定理」によって無重複表現が得られます。

定理 1.3 ([Ko4]). G をリー群、D を連結な複素多様体、$\mathcal{V} \to D$ を G 同変な D 上の正則エルミートベクトル束とする。このとき以下に挙げる条件が満たされるならば、正則大域切断の空間 $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ に埋め込まれる G の任意のユニタリ表現は無重複である。

1 (底空間) 底空間への作用 $G \curvearrowright D$ は S-可視的である

2 (ファイバー) ファイバーにおける固定化部分群の表現は無重複である
　+ いくつかの compatibility に関する条件

上で「統一的扱い」と述べましたが、実際に、これまでに散在して知られていた多くの無重複表現に対してこの理論による統一的な解釈が与えられています‡。

1 ユニタリ群の無重複テンソル積表現 [Ko2]

2 簡約複素代数群の無重複線形表現 [Sa2],[Sa4]

3 リーマン対称空間上の L^2 表現 [Ko3]

さらに可視的作用の存在から、新しい無重複定理の発見も成されています。

- エルミート型単純リー群の、スカラー型ユニタリ最高ウェイト表現の対称部分群への制限は無重複 ([Ko6])。

これらの他にも多くの（紹介したものはあくまでその中の一部だけです。詳しくは [Ko3] を参照して下さい。）無重複定理が得られていますが、逆に、リー群の無重複定理が先に与えられているときに可視的作用という（複素）幾何的な性質の存在を期待することができます。このことを動機付けとして、[Ta2] において次のような問題を考えました。

問題: G を連結コンパクトリー群、T を極大トーラスとし、σ を G の T に関する§ Chevalley–Weyl 対合とする。また、$L_1, L_2 \supset T$ を G のレビ部分群とす

‡1. については、論文としては [St1] において初めて扱われ、（ヤング図形を用いた）組み合わせ論的な手法が取られています。2. は spherical action との関連が深く、既約な場合は [Ka] で、可約な場合は [BR],[Le] において分類されています。また、3. におけるキーワードは「Gel'fand 対」です。

§群の自己同型写像 σ が $\sigma^2 = \mathrm{id}$ (恒等写像) を満たすとき σ を対合と呼びます。また、コンパクトリー群（より一般に、実簡約型リー群）の対合 σ は、ある G の極大トーラス T に対して逆写像として作用するとき（即ち、$\sigma(t) = t^{-1}$, $\forall t \in T$）、Chevalley–Weyl 対合と呼ばれます。また、古典型コンパクトリー群 $G(n) = U(n), SO(2n+1), Sp(n)$ or $SO(2n)$ に対しては、そのレビ部分群は $U(n_1) \times \cdots \times U(n_{k-1}) \times G(n_k)$ という形で与えられます。ただし $n = n_1 + \cdots + n_k$。

る。このとき、次の性質 $(*)$ を満たすような 3 つ組 (G, L_1, L_2) を分類せよ。

$$(*) \quad 積写像 \quad L_1 \times G^\sigma \times L_2 \to G \quad は全射。$$

この小文では [Ta2] の結果、即ち「$(*)$ を満たす (G, L_1, L_2) の分類」を用いて、旗多様体への可視的作用の分類ができること及び、表現論や球多様体への応用も合わせて紹介します。

注意 1.4. 上記の**問題**については、その先駆的結果として小林氏による $G = U(n)$ に対する分類 [Ko5] があります。

2 可視的作用・無重複性の三位一体定理

前節において**問題**の動機付けは「無重複表現があればそこに可視的作用の存在が期待できる」という考えによる、と述べましたが、「$(*)$ を満たす (G, L_1, L_2)」と「無重複表現」とがどう結び付くかをまだ説明していませんでしたので、これについて簡単に述べます。性質 $(*)$ を持つ 3 つ組 (G, L_1, L_2) に対し、σ が旗多様体 G/L_1, G/L_2 のそれぞれに対し反正則微分同相写像として作用することに注意すると、定義 1.1 より次の 3 つの自然な作用が全て強可視的であることが分かります（強可視性の三位一体定理 [Ko2]）。

$$L_2 \curvearrowright G/L_1, \quad L_1 \curvearrowright G/L_2, \quad \mathrm{diag}(G) \curvearrowright (G \times G)/(L_1 \times L_2).$$

これらそれぞれに対し、Borel–Weil 理論と定理 1.3 とを適用することで、3 つの[¶] 無重複定理

$$\mathrm{Ind}_{L_1}^{G} \chi_1|_{L_2}, \quad \mathrm{Ind}_{L_2}^{G} \chi_2|_{L_1}, \quad \mathrm{Ind}_{L_1}^{G} \chi_1 \otimes \mathrm{Ind}_{L_2}^{G} \chi_2$$

が得られます（無重複性の三位一体定理 [Ko2]）。ただし、χ_1, χ_2 はぞれぞれ L_1, L_2 のユニタリ指標です。

注意 2.1. ここでは定理 1.3 の正則線束の場合への応用しか述べませんでしたが、例えば [Ko2] では旗多様体上のベクトル束の場合が扱われています。

3 旗多様体への可視的作用の分類

それでは「性質 $(*)$ を満たす 3 つ組 (G, L_1, L_2) の分類」が得られていることを事実として用いることにより、「旗多様体への強可視的作用の分類」が得られることを見ましょう。G を連結単純コンパクトリー群、T をその極大

[¶] σ が反正則微分同相写像として作用するのは、極大トーラスの任意の元を逆元に写すことによります。定理 1.3 において、正則線束では「ファイバーで無重複」という条件が自明に成り立つことに注意してください。

トーラス、σ を T に関する G の[‖] Chevalley–Weyl 対合、$L_j \supset T$ $(j=1,2)$ を、$\Pi_j \subset \Pi$ をその単純ルートの集合とするようなレビ部分群とします（ただし Π は G の単純ルートの集合とします。例えば、$\Pi_j = \varnothing$ ならば $L_j = T$、$\Pi_j = \Pi$ ならば $L_j = G$ です)。また、$\mathcal{P}_j = G/L_j$ によって Π_j に対応する一般旗多様体を、$G_{\mathbb{C}}$, $(L_j)_{\mathbb{C}}$ によってそれぞれ G, L_j の複素化リー群を表すこととします。

以下で、G の既約表現 π の最高ウェイトが $(\Pi_j)^c = \Pi \setminus \Pi_j$ に対応する基本ウェイトの和でかけているとき、π は $\mathcal{P}_j$ 系列に属すと言うこととします。即ち、π は L_j のユニタリ指標からの誘導表現として表せる、ということです。

主結果 3.1. G を連結単純コンパクトリー群とする。このとき、レビ部分群の組 L_1, L_2 に関する以下の 11 個の条件は同値である。

(i) (G, L_1, L_2) は性質 $(*)$ を満たす。

(ii) 自然な作用 $L_1 \curvearrowright \mathcal{P}_2$ は強可視的である。

(iii) 自然な作用 $L_2 \curvearrowright \mathcal{P}_1$ は強可視的である。

(iv) 対角作用 $G \curvearrowright \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ は強可視的である。

(v) $\mathcal{P}_2$ 系列に属す G の任意の既約表現に対し、その L_1 への制限は無重複である。

(vi) $\mathcal{P}_1$ 系列に属す G の任意の既約表現に対し、その L_2 への制限は無重複である。

(vii) $\mathcal{P}_j$ $(j=1,2)$ 系列に属す G の任意の既約表現 π_j に対し、それらのテンソル積表現 $\pi_1 \otimes \pi_2$ は無重複である。

(viii) $\mathcal{P}_2$ は $(L_1)_{\mathbb{C}}$ の[**] 球多様体である。

(ix) $\mathcal{P}_1$ は $(L_2)_{\mathbb{C}}$ の球多様体である。

(x) $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ は $(G)_{\mathbb{C}}$ の球多様体である。

(xi) (Π_1, Π_2) は次節の分類表にある。

Proof. 条件 (i) と条件 (xi) とが同値であることを認めて、残りの条件が同値であることを証明します。以下に挙げますのは、証明の手順を図式化したものです。

[‖] 細かいことを言うと、同じ極大トーラスに関する Chevalley–Weyl 対合が 2 つ与えられた場合、それらは極大トーラスによる共役作用で移り合います。また、Weyl 群の代表元は G^σ から取ることができますので、性質 (*) は単純ルートの集合 Π の取り方に依りません。

[**] $(L_1)_{\mathbb{C}}$ のボレル部分群が $\mathcal{P}_2$ 上に開軌道をもつということです。またボレル部分群とは、例えば一般線形群であればその上三角行列全体のなす群がボレル部分群となります。

$$
\begin{array}{ccccccl}
 & & (\mathrm{vii}) & & & & \cdots\cdots\ \text{無重複} \\
 & & \Updownarrow & & & & \\
 & & (\mathrm{xi}) & & & & \cdots\cdots\ \text{分類} \\
 & & \Updownarrow & & & & \\
 & & (\mathrm{i}) & & & & \cdots\cdots\ \text{カルタン分解} \\
 & \swarrow & \Downarrow & \searrow & & & \\
(\mathrm{ii}) & & (\mathrm{iv}) & & (\mathrm{iii}) & & \cdots\cdots\ \text{可視的な作用} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
(\mathrm{v}) & \Leftrightarrow & (\mathrm{vii}) & \Leftrightarrow & (\mathrm{vi}) & & \cdots\cdots\ \text{無重複} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\
(\mathrm{viii}) & & (\mathrm{x}) & & (\mathrm{ix}) & & \cdots\cdots\ \text{spherical な作用}
\end{array}
$$

以下、証明を箇条書きにして述べます。

- (vii) ⇒ (xi): Stembridge 氏による無重複表現の分類表 ([St2]) と次節の分類表との比較から分かります。

- (xi) ⇒ (vii): 第 2 節で述べたこと、即ち定理 1.3 から従います。

- (i) ⇒ (ii) と (i) ⇒ (iii) 及び (i) ⇒ (iv):
  これは第 2 節で述べた可視性の三位一体定理です ([Ko2])。

- (ii) ⇒ (v) と (iii) ⇒ (vi) 及び (iv) ⇒ (vii):
  これらは全て定理 1.3 から従います。

- (v) ⇔ (viii) と (vi) ⇔ (ix) 及び (vii) ⇔ (x):
  これは Vinberg、Kimel'fel'd 両氏の結果 [VK, Corollary 1] から従います（c.f. [Ko3, Corollary 15]）。

- (v) ⇔ (vii) ⇔ (vi): これは Stembridge 氏の結果 [St2, Corollary 2.5] によります。

これで証明は終わりです。 □

注意 3.2. この主結果に関しては、[Ko5] に A 型に対する先駆的結果があります。また、エルミート型の場合については（型やコンパクト性に対する仮定なく一般に）[Ko6] で扱われています。

注意 3.3. Π_j^c がただ一つの元からなることと L_j が極大レビ部分群であることとは同値ですが、L_1 と L_2 とが両方極大であるという仮定の下で、P. Littelmann 氏（[Li]）が (x) ⇔ (xi) を証明しています。

4 分類表

以下に、

$$(*) \quad \text{積写像} \quad L_1 \times G^\sigma \times L_2 \to G \quad \text{は全射}$$

という性質を満たす (G, L_1, L_2) の組の分類表を挙げます。各型毎に、レビ部分群の組 L_1, L_2 にそれぞれ対応する単純ルートの真部分集合の組 Π_1, Π_2（L_j のルート系は Π_j によって生成される）が与えられています。また、Dynkin 図形のラベル付けは [Bo] に従っています。

$\boxed{\mathrm{A}_n \text{ 型 [Ko5]}}$

エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$.

非エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i, \alpha_j\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_k\}$,
$\min_{p=i,j}\{p, n+1-p\} = 1$, or $i = j \pm 1$.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i, \alpha_j\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_k\}$,
$\min\{k, n+1-k\} = 2$.

III. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}(i = 1 \text{ or } n)$, Π_2 : 任意.

ただし、i, j は $1 \leq i, j \leq n$ を満たす。

$\boxed{\mathrm{B}_n \text{ 型}}$

エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_1\}$.

非エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_n\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_n\}$.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_i\}$,
$2 \leq i \leq n$.

$\boxed{\mathrm{C}_n \text{ 型}}$

エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_n\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_n\}$.

非エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_i\}$,
$1 \leq i \leq n$.

$\boxed{\mathrm{D}_n \text{ 型}}$

エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$,
$i, j \in \{1, n-1, n\}$.

非エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$,
$j \neq 1, n-1, n$.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$,
$i \in \{n-1, n\}$, $j \in \{2, 3\}$.

III. $\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$,
$i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, n-1, n\}$.

IV. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$,
$i \in \{n-1, n\}$, $j, k \in \{1, 2\}$.

V. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_1\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j, \alpha_k\}$,
$j \in \{n-1, n\}$ or $k \in \{n-1, n\}$.

VI. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_2, \alpha_j\}$,
$n = 4$, $(i, j) = (3, 4)$ or $(4, 3)$.

$\boxed{\mathrm{E}_6 \text{ 型}}$

エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$, $i, j \in \{1, 6\}$.

非エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_1, \alpha_6\}$, $i = 1$ or 6.

II. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_i\}$, $(\Pi_2)^c = \{\alpha_j\}$,
$i = 1$ or 6, $j \neq 1, 4, 6$.

$\boxed{\mathrm{E}_7 \text{ 型}}$

エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_7\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_7\}$.

非エルミート型：

I. $(\Pi_1)^c = \{\alpha_7\}$, $\quad (\Pi_2)^c = \{\alpha_i\}$, $\quad i = 1$ or 2.

$\boxed{\mathrm{E}_8 \text{ 型}, \mathrm{F}_4 \text{ 型}, \mathrm{G}_2 \text{ 型}}$

$G = L_1 G^\sigma L_2$ なる (Π_1, Π_2) はない。

参考文献

[BR] C. Benson, and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, J. Algebra, **181** (1996), 152–86.

[Bo] N. Bourbaki, Lie Groups and Lie Algebras, chapters 4–6, Elements of Mathematics, Springer–Verlag, Berlin, 2002.

[Fl] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. (2) **111** (1980) 253–311.

[He] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Ho] B. Hoogenboom, Intertwining functions on compact Lie groups, CWI Tract, **5**. Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, (1984).

[HW] A. T. Huckleberry and T. Wurzbacher, Multiplicity-free complex manifolds, Math. Ann., **286** (1990), 261–280.

[Ka] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, J. Algebra, **64** (1980), 190–213.

[Ko2] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $\mathrm{GL}(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, Acta Appl. Math., **81**, (2004), 129–146.

[Ko3] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **41**, (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[Ko4] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 2012 (in press), math. RT/0607004.

[Ko5] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(\mathrm{U}(n_1) \times \mathrm{U}(n_2) \times \mathrm{U}(n_3)) \backslash \mathrm{U}(n) / (\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$, J. Math. Soc. Japan, **59**, (2007), 669–691.

[Ko6] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, Transform. Groups, **12**, (2007), 671–694.

[Ko7] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restriction of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, in: Representation Theory and Automorphic Forms, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, (2007), 45–109, math. RT/0607002.

[Kr] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, Compositio Math., **38** (1979), 129–53.

[Le] A. Leahy, A classification ofmultiplicity free representations, J. Lie Theory, **8** (1998), 367–91.

[Li] P. Littelmann, On spherical double cones, J. Algebra, **166**, (1994), 142-157.

[Ma1] 松木敏彦, 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解 II, 等質空間上の非可換解析学 (京都, 1994), 数理解析研究所 講究録, No. **895**, (1995), 98–113.

[Ma2] T. Matsuki, Double coset decomposition of algebraic groups arising from two involutions. I, J. Algebra, **175**, (1995), 865–925.

[Ma3] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions, J. Algebra, **197**, (1997), 49–91.

[Sa1] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions, Geom. Dedicata, **145**, (2010), 151–158.

[Sa2] A. Sasaki, Visible action on irreducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2009), no. **18**, 3445–3466.

[Sa3] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1) \backslash SL(2n+1,\mathbb{C}) / Sp(n,\mathbb{C})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **17**, (2010), 201–215.

[Sa4] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces, Int. Math. Res. Not. IMRN, (2011), no. **4**, 885–929.

[St1] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products of Schur functions, Ann. Comb., **5**, (2001), 113–121.

[St2] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, Represent. Theory, **7**, (2003), 404–439 .

[Ta1] 田中雄一郎, A generalized Cartan decomposition for connected compact Lie groups and its application, 組み合わせ論的表現論の拡がり (京都, 2011), 数理解析研究所 講究録, No. **1795**, (2012), 117–134.

[Ta2] Y. Tanaka, Visible actions on flag varieties of type D and a generalization of the Cartan decomposition, to appear in Journal of Mathematical Society of Japan.

[VK] É. B. Vinberg and B. N. Kimel'fel'd, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups, Funct. Anal. Appl., **12** (1978), no. 3, 168–174.

[Wo] J. A. Wolf, Harmonic Analysis on Commutative Spaces, Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., (2007).

東京大学大学院数理科学研究科
東京都目黒区駒場 3-8-1
〒 153-8914
E-mail: yuichiro@ms.u-tokyo.ac.jp