数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 69-74

Lie 群上の L^p-Fourier 変換における Hausdorff-Young 不等式について

鳥取大学 大学教育支援機構 教育センター　井上 順子 (Junko INOUE) *
Education Center, Organization for Supporting University Education, Tottori University

概要

ユニモジュラー Lie 群 G 上の L^p-Fourier 変換は，G 上の L^p-関数の空間 $L^p(G)$ から G のユニタリ双対 $\widehat{G}$ 上の L^q 空間 $L^q(\widehat{G})$ への有界線型写像として定義される．$(1<p\leq 2,\ q=p/(p-1))$ この写像の作用素ノルムを求める問題をとりあげ，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大，冪零 Lie 群における結果等を中心に報告し，この問題の研究の一端を紹介する．ここで報告する最近の結果，定理 3 および定理 7 は A. Baklouti との共同研究によるものである．

1 序

1.1 $\mathbb{R}^n$ における Hausdorff-Young 不等式

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における Fourier 解析の基本的な不等式の 1 つに Hausdorff-Young 不等式がある．いま，$\mathbb{R}^n$ の（標準）内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表し，$\mathbb{R}^n$ とその双対空間 $\mathbb{R}^{n*}$ を写像 $\mathbb{R}^n\ni\xi\mapsto\langle\cdot,\xi\rangle$ により同一視する． このとき．$\mathbb{R}^n$ 上の可積分関数 $f=f(x)\in L^1(\mathbb{R}^n,dx)$, ここで dx は Lebesgue 測度，の Fourier 変換を

$$\widehat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^n$$

で定義すると，$f\in L^1(\mathbb{R}^n,dx)\cap L^2(\mathbb{R}^n,dx)$ 　に対して Parseval の等式

$$\|f\|_2^2:=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\mu(\xi)=:\|\widehat{f}\|_2^2,\quad d\mu(\xi)=\frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

が成り立つ．さらに，指数 p $(1<p\leq 2)$，$q=p/(p-1)$ に対して Hausdorff-Young の不等式

$$\|\widehat{f}\|_q\leq\|f\|_p,\quad f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)\tag{1}$$

* 本研究は JSPS 科研費 21540180 の助成を受けたものである．

が成り立ち， Fourier 変換 $f \mapsto \widehat{f}$ は有界線型写像 $\mathscr{F}^p(\mathbb{R}^n) : L^p(\mathbb{R}^n, dx) \to L^q(\mathbb{R}^{n*}, d\mu)$ に拡張される．

特に f が Gauss 関数 $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ の場合，$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\|\xi\|^2/2}$ であり，等式

$$\|\widehat{f}\|_q = A_p^n \|f\|_p, \quad \text{ただし} \quad A_p = \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ．一方，任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ に対する，(1) より精密な不等式

$$\|\widehat{f}\|_q \leq A_p^n \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことが，指数 $q = p/(p-1)$ が偶数の場合に Babenko [1] (1961) により証明され，その後 Beckner [5] (1975) により，$1 < p < 2$ を満たす全ての p に対して証明された．言い換えると Fourier 変換の作用素ノルムは

$$\|\mathscr{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$$

であることが示されたことになる．

1.2 局所コンパクト，ユニモジュラー群における Hausdorff-Young 不等式

G を局所コンパクト，type I のユニモジュラー群とする． dg を Haar 測度，指数 $1 \leq p$ に対して G 上の L^p-関数の空間を $L^p(G) = L^p(G, dg)$，G のユニタリ双対を $\widehat{G}$ で表す．このとき，$f \in L^1(G)$ に対して π の表現空間上の作用素 $\pi(f)$ を

$$\pi(f) := \int_G f(g)\pi(g)dg, \quad f \in L^1(G), \quad \pi \in \widehat{G}$$

により定義すると Abstract Plancherel 定理により，$\widehat{G}$ 上の Borel 測度 $d\mu$ が存在して等式

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}(\pi(f)^* \pi(f)) d\mu(\pi)$$

が任意の $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ に対して成り立つ．G 上の Fourier 変換 $\mathscr{F}$ を L^1-関数 f から $\widehat{G}$ 上の有界作用素値 μ-可測場 $\mathscr{F}f$ への写像

$$L^1(G) \ni f \mapsto \mathscr{F}f : \quad \mathscr{F}f(\pi) = \pi(f), \quad \pi \in \widehat{G}$$

で定義する．一般に，指数 $r \geq 1$，$\widehat{G}$ 上の有界作用素値 μ-可測場 F に対して

$$\|F\|_r := \left(\int_{\widehat{G}} \|F(\pi)\|_{c_r}^r d\mu(\pi) \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\text{ここで} \quad \|F(\pi)\|_{c_r} := \left(\mathrm{Tr}(F(\pi)^* F(\pi))^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} \quad : \text{Schatten ノルム}$$

とし，$\|F\|_r < \infty$ である μ-可測場 F がなすBanach空間を $L^r(\widehat{G})$ で表す．このとき，Kunzeによる Hausdorff-Young 型定理 [10] により $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$, $f \in L^1(G) \cap L^p(G)$ に対して $\mathscr{F} f \in L^q(\widehat{G})$ であり，不等式

$$\|\mathscr{F} f\|_q \leq \|f\|_p$$

が成り立ち，有界線型写像（L^p-Fourier 変換）$\mathscr{F}^p = \mathscr{F}^p(G) : L^p(G) \to L^q(\widehat{G})$ が得られる．以上の設定のもとで，この講義録では L^p-Fourier 変換 $\mathscr{F}^p$ $(1 < p < 2)$ の作用素ノルム

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| := \sup_{f \neq 0} \frac{\|\mathscr{F}^p f\|_q}{\|f\|_p}$$

を求める問題を考える．

$G = \mathbb{R}^n$ の場合，$\mathscr{F}$ は通常の Fourier 変換であり，1.1 節で述べたように $\|\mathscr{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$ が全ての $1 < p < 2$ において成り立つ．

一方，G がコンパクト群の場合，定数関数 f により $\|\mathscr{F}^p f\|_q = \|f\|_p$ であるから $\|\mathscr{F}^p(G)\| = 1$ である．さらに，Fournier [6](1977) はノルム $\|\mathscr{F}^p(G)\| < 1$ の必要十分条件は，G がコンパクト開部分群を持たないことであることを示した．

コンパクト開部分群を持たない非可換なユニモジュラー群に対しては，Russo による初期の一連の研究を始めとして，これまで個々の群，群のクラス，あるいは特別な指数 p など様々な枠組みにおいて L^p-Fourier 変換のノルムの計算や上からの評価などが試みられている．例えば指数 p の共役指数 $q = p/(p-1)$ が偶数である場合，Klein-Russo [9] は半直積群に対し，その構成因子を用いてノルムの上からの評価を得た．

定理 1 (Klein-Russo [9]) $G = A \rtimes X$ は局所コンパクト，ユニモジュラー群 A と X の半直積であり，G もユニモジュラーとする．このとき，指数 p の共役指数 q が偶数，即ち $p = \dfrac{2k}{2k-1}$ （k は整数で $k \geq 2$）の場合は不等式

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| \leq \|\mathscr{F}^p(A)\| \|\mathscr{F}^p(X)\|$$

が成り立つ．

2 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大における結果

一般にコンパクト拡大に関しては，上記の定理 1 およびコンパクト群の L^p-Fourier 変換のノルムが 1 であることから，q が偶数の場合は，上からの評価が得られる．

定理 2 (Russo [14]) 可分な局所コンパクト，ユニモジュラー群 G が，ユニモジュラー，type I の閉正規部分群 N で G/N がコンパクト群となるものを持つとする．このとき，p

$(1 < p < 2)$ の共役指数 $q = p/(p-1)$ が偶数の場合，不等式

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| \leq \|\mathscr{F}^p(N)\|$$

が成り立つ．

これに対して，Baklouti-Inoue [3] では $\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大 G を対象とし，任意の $1 < p < 2$ に対して L^p-Fourier 変換のノルムを求めることが出来た．この結果は，第 3 節で述べる冪零 Lie 群を対象とするノルムの評価計算のうち多くの場合と同様，Russo [13] および Fournier-Russo [7] による，積分作用素の Schatten ノルムに関する Hausdorff-Young 型不等式に基づくものである．

定理 3 (Baklouti-Inoue [3]) $G = A \rtimes K$ は $A = \mathbb{R}^n$ とコンパクト群 K との半直積，$1 < p < 2$ とする．このとき，

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| = A_p^n$$

である．

証明は [3] 参照．特にこの場合は，A 上 K-不変な内積を導入して定める Gauss 関数 g を K 上定数として G に拡張した関数 $f = 1_K \otimes g$ （1_K は K 上の定数 $(=1)$ 関数）に対して，$\|\mathscr{F}^p f\|_q = A_p^n \|f\|_p$ が成り立つ（即ち f は extremal function）ことを注意しておく．

3 冪零 Lie 群における Hausdorff-Young 不等式

3.1 連結かつ単連結な冪零 Lie 群の場合

G を連結かつ単連結な冪零 Lie 群，その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする．この場合には，Russo [11] (1974), [12] (1976), [13] (1977), Klein-Russo [9] (1978), Inoue [8] (1992), Baklouti-Smaoui-Ludwig [4] (2003) 等これまでの様々な設定での研究が関連している．ノルムの上からの評価について，単連結冪零 Lie 群全体を対象とし全ての p $(1 < p < 2)$ に適用される評価としては，以下の Baklouti-Smaoui-Ludwig によるものがある．まず，単連結冪零 Lie 群においては，Kirillov の orbit method により，$\widehat{G}$ は G の余随伴軌道 $\mathfrak{g}^*/G$ と同一視されることに注意する．

定理 4 (Baklouti-Smaoui-Ludwig [4]) G を連結，単連結な冪零 Lie 群，$1 < p < 2$ とする．このとき，

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| \leq A_p^{\dim(G) - \frac{m}{2}}$$

が成り立つ．ここで $m := \sup\{\dim(\mathrm{Ad}^*(G) \cdot l);\ l \in \mathfrak{g}^*\}$ である．

これは，前述の，Russo, Fournier-Russo の積分作用素の Hausdorff-Young 型不等式を利用して得られる．一方，G は余次元 1 の正規部分群と $\mathbb{R}$ による半直積で表されることから，共役指数 q が偶数の場合に限れば，定理 1 を適用して定理 4 より良い評価が得られる:

定理 5 (Klein-Russo [9]) G を連結，単連結な冪零 Lie 群，$1 < p < 2$ とする．さらに q が偶数のとき，即ち，$p = 2k/(2k-1)$ $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ と表せるとき，

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| \le A_p^{\dim(G)}.$$

ノルムの決定について考察する際，可換群 $\mathbb{R}^n$, コンパクト群，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト拡大の場合は，extremal function が存在してノルムの下からの評価が得られたが，冪零 Lie 群の場合は状況が異なる．このことは，Klein-Russo [9] が Heisenberg 群におけるノルムを q が偶数の場合に決定して指摘した：

定理 6 (Klein-Russo [9]) 指数 p は $p = 2k/(2k-1)$ （k は 2 以上の整数）であるとする．G を $2n+1$ 次元の Heisenberg 群とする．このとき，

(i) $\|\mathscr{F}^p(G)\| = A_p^{2n+1}$.

(ii) extremal function は存在しない，即ち，$\|\mathscr{F}^p f\|_q = A_p^{2n+1}\|f\|_p$ ならば，f は殆どいたるところ $f = 0$ である．

3.2 一般の連結冪零 Lie 群における結果

[2] では単連結とは限らない一般の連結冪零 Lie 群に対して，定理 4 を拡張した．

定理 7 (Baklouti-Inoue [2]) G を連結冪零 Lie 群，$\widetilde{G}$ をその普遍被覆群, H を G の極大コンパクト部分群とする．このとき，

$$\|\mathscr{F}^p(G)\| \le A_p^{\dim(G/H) - \frac{m}{2}}$$

が成り立つ．ここで $m := \sup\{\dim(\mathrm{Ad}^*(\widetilde{G}) \cdot l);\ l \in \mathfrak{g}^*\}$ である．

これも，前述の，Russo, Fournier-Russo の積分作用素の Hausdorff-Young 型不等式から得られる評価である．例えば G を Heisenberg 群の離散部分群による商群とする．即ち，$\mathfrak{g}_{2n+1}$ を $2n+1$ 次元 Heisenberg Lie 環とし，その中心を $\mathfrak{z} = \mathbb{R}\text{-span}\{Z\} = \mathbb{R}Z$ で表し，$\mathfrak{g}_{2n+1}$ に対応する連結単連結 Lie 群 $G_{2n+1} := \exp(\mathfrak{g}_{2n+1})$ の中心 $\exp(\mathfrak{z})$ に含まれる離散部分群 $\Gamma \fallingdotseq \exp(\mathbb{Z}Z)$ をとり，$G := G_{2n+1}/\Gamma$ を考える．G の極大コンパクト部分群は $\exp(\mathfrak{z})/\Gamma \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ であり，$\widetilde{G} = G_{2n+1}$ の余随伴軌道の次元の最大値は $2n$ であるから，定理 7 を適用すれば上からの評価 $\|\mathscr{F}^p(G)\| \le A_p^n$ が得られる．特に $n = 1$ の場合，即ち 3 次

元 Heisenberg 群の商群に関しては，Russo が [13] においてノルムの上からの評価値 A_p を得たが，これはその計算と同様のものになる．現在分かっていることはここまでであるが，単連結な群における不等式等を参照すると，定理 7 の値も最良ではないと推測される．

参考文献

[1] K. I. Babenko, An inequality in the theory of Fourier integrals, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **25** (1961), 531–542.

[2] A. Baklouti and J. Inoue, Estimate of the L^p-Fourier transform norm for connected nilpotent Lie groups, Adv. Pure Appl. Math. **2** (2011), no. 3-4, 467–483.

[3] A. Baklouti and J. Inoue, On the norm of the L^p-Fourier transform on compact extensions of $\mathbb{R}^n$, to appear in Forum Math.

[4] A. Baklouti, K. Smaoui and J. Ludwig, Estimate of the L^p-Fourier transform norm on nilpotent Lie groups, J. Funct. Anal. **199** (2003), no. 2, 508–520.

[5] W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis, Ann. of Math. (2) **102** (1975), no. 1, 159–182.

[6] J. J. F. Fournier, Sharpness in Young's inequality for convolution, Pacific J. Math. **72** (1977), no. 2, 383–397.

[7] J. J. F. Fournier and B. Russo, Abstract interpolation and operator-valued kernels, J. London Math. Soc. (2) **16** (1977), no. 2, 283–289.

[8] J. Inoue, L^p-Fourier transforms on nilpotent Lie groups and solvable Lie groups acting on Siegel domains, Pacific J. Math. **155** (1992), no. 2, 295–318.

[9] A. Klein and B. Russo, Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups, Math. Ann. **235** (1978), no. 2, 175–194.

[10] R. A. Kunze, L^p-Fourier transforms on locally compact unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 519–540.

[11] B. Russo, The norm of the L^p-Fourier transform on unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 293–305.

[12] B. Russo, The norm of the L^p-Fourier transform. II, Canad. J. Math. **28** (1976), no. 6, 1121–1131.

[13] B. Russo, On the Hausdorff-Young theorem for integral operators, Pacific J. Math. **68** (1977), no. 1, 241–253.

[14] B. Russo, The norm of the L^p-Fourier transform. III. Compact extensions, J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 2, 162–178.