

新谷 L 関数の関数等式について

佐藤信夫 (Nobuo Sato), 広瀬稔 (Minoru Hirose)
京都大学大学院理学研究科

KYOTO UNIVERSITY

新谷 L 関数は新谷卓郎が導入した多重 Dirichlet 型の級数の一種である。今回、積分表示を用いて、従来の級数表示が不可能な範囲にまで新谷 L 関数の定義を拡張し、さらに関数等式を示したので 1 節ではその紹介を行う。その際、新谷 L 関数の正規化と完備化が導入されるが、これは今回の研究で得られた概念であり重要な対象であると考えている。また著者は新谷 L 関数の関数等式が Hecke L 関数を研究する際にも本質的であると考えているが、その一例として 2 節と 3 節で実二次体の関数等式の別証明への応用を紹介する。正規新谷 L 関数を Hecke L 関数と結びつけるには複数の非自明な困難があるが、その困難が実際に克服可能であることを紹介することも目的の一つである。なお、関数等式については、証明に Fourier 変換や Tate の局所関数等式などを用いるが、詳細は後続の論文にゆずり、本稿では結果を述べるに留める。

1 新谷 L 関数の関数等式・基本的性質について

まず、新谷 L 関数の定義と性質について説明しよう。以下では $e(z) = e^{2\pi iz}$, $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$, $\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$ という記号を使う。

定義 1

$\Re(s_1 + \dots + s_r) > r$ について、次数 r の新谷 L 関数を次の級数で定義する。

$$L(s, A, x, y) = \sum_{0 \leq m_1, m_2, \dots, m_r} \frac{e(m_1 y_1 + \dots + m_r y_r)}{\prod_{1 \leq \nu \leq r} (\sum_{1 \leq \mu \leq r} a_{\nu\mu} (x_{\mu} + m_{\mu}))^{s_{\nu}}} = \sum_{0 \leq m} \frac{e(my)}{(A(x+m))^s}$$

但しここでは s を主変数と考え、 A, x, y はパラメータで、それぞれ $A = (a_{\nu\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq r}$ は全成分が正の実行列、 $x = (x_{\nu})_{1 \leq \nu \leq r}, y = (y_{\mu})_{1 \leq \mu \leq r}$ は全成分が $(0, 1)$ 区間にある実ベクトルとしている。このとき右辺の級数は $\Re(s_1 + \dots + s_r) > r$ において絶対収束し、解析関数を与える。(※ $\Re(s_1 + \dots + s_r) > 0$ で (条件) 収束する)

この定義は Dirichlet 級数を用いている点で Hecke L 関数との相性は良いが、パラメータ A の定義域に正という制限があるため、このままでは関数等式を考えることはできない。一方新谷 L 関数は次のような積分を使って表すことも出来る。

定義 2

$\Re(s_1) > 0, \dots, \Re(s_r) > 0$ に対して、次数 r の新谷 L 関数を次の積分で定義する。

$$L(s, A, x, y) = \frac{2^r}{\Gamma_{\mathbf{C}}(s_1) \cdots \Gamma_{\mathbf{C}}(s_r)} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} F(tA, x, y) t^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r}$$

ここで、 $F(t, x, y) = \prod_{1 \leq \nu \leq r} e(it_{\nu} x_{\nu}) (1 - e(y_{\nu} + it_{\nu}))^{-1}$ であり、 $tA = (\sum t_{\nu} a_{\nu\mu})_{1 \leq \mu \leq r}$, $t^s = \prod_{1 \leq \nu \leq r} t_{\nu}^{s_{\nu}}$ である。

この定義が級数による定義と、共通の定義域で一致することを確認するのは難しくない。注目すべき点はこの定義では A の成分が正である必要がなくなり、 $A \in GL_r(\mathbb{R})$ に対して定義できている点である。 $r \geq 2$ の場合、関数等式を考えるためには A に負の成分を持つものを考えることが必須であり、このように A の定義域を広げておくことが大切である。新谷 L 関数はこの積分の積分路をとりかえることで $s \in \mathbb{C}^r$ に正則に解析接続することが出来る。

さて、関数等式を最も簡潔に述べ、また Hecke L 関数への応用を考える際には、新谷 L 関数そのものよりもそれを修正した「正規新谷 L 関数」という関数を導入するのがよい。正規新谷 L 関数は A の成分の異なる新谷 L 関数を有限個足しあわせたもので、逆に新谷 L 関数は次に導入する「符号型」の相異なる正規新谷 L 関数の有限和で表すこともできる。この意味で、正規新谷 L 関数を考えることは新谷 L 関数を考えることと同等である。

定義 3

$\Re(s_1) > 0, \dots, \Re(s_r) > 0$ に対して、次数 r 、符号型 χ の正規新谷 L 関数を次の積分で定義する。

$$L_\chi(s, A, x, y) = \frac{2^r}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1) \cdots \Gamma_{\mathbb{C}}(s_r)} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(tA, x, y) |t|_\chi^s \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_r}{t_r}$$

ここで、符号型とは $\chi: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{0, 1\}$ という写像であり、それゆえ 2^r 種類の異なる符号型が存在する。また、

$$|t|_\chi^s = \prod_{1 \leq \nu \leq r} \operatorname{sgn}(t_\nu)^{\chi(\nu)} |t_\nu|^{s_\nu}$$

は符号付き絶対値冪である。符号型は総実体の Hecke L 関数の指標の偶奇性（無限素点）に対応した概念である。

いま符号型 χ の正規新谷 L 関数に対して完備化を

$$\hat{L}_\chi(s, A, x, y) = |\det(A)|^{\frac{1}{2}} \prod_{1 \leq \nu \leq r} \Gamma_{\mathbb{R}}(\chi(\nu) + s_\nu) L_\chi(s, A, x, y)$$

で定義する。

以上の準備のもとで、正規新谷 L 関数の関数等式は以下のように述べられる。

定理 1

正規新谷 L 関数は次の関数等式を満たす

$$\hat{L}_\chi(s, A, x, y) = i_\chi e(-xy) \hat{L}_\chi(1_r - s, A^*, y, 1_r - x)$$

ただし、 $i_\chi = i^{\sum_{1 \leq \nu < r} \chi(\nu)}$ はある 1 の 4 乗根で、 $e(-xy) = e(-(x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r))$ 、 $A^* = ({}^t A)^{-1}$ は転置逆行列である。また $1_r = (1, \dots, 1)$ である。

ところで次数が 1 の場合、新谷 L 関数は Hurwitz-Lerch ゼータ関数に他ならない。この場合、正規新谷 L 関数は次のような Dirichlet 級数による表示を持つ。

命題 2

次数が 1 の正規新谷 L 関数は、 $\Re(s) > 1$ のとき次の Dirichlet 級数表示を持つ。

$$L_\chi(s, A, x, y) = \operatorname{sgn}(A) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e(my)}{|A(x+m)|_\chi^s}$$

Hurwitz-Lerch ゼータ関数の関数等式は古典的に知られている。この Dirichlet 級数表示によって、正規新谷 L 関数の関数等式が Hurwitz-Lerch ゼータ関数の関数等式の一般化になっていることを確かめることが出来る。一方、次数が 2 以上の正規新谷 L 関数については A の成分に正と負の数が両方ある新谷 L 関数が現れ、そのことが障害になって（少なくとも自明には）Dirichlet 級数表示を持たないことに注意したい。

さて、Proposition の Dirichlet 級数表示は $x, y \notin (0, 1)$ についても定義され、一般に $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して

$$L_\chi(s, A, x+k, y+l) = e(-ky) L_\chi(s, A, x, y)$$

という周期性を持っていることが見て取れる。さらにこの関係式で $L_\chi(s, A, x, y)$ を周期的に $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ に拡張してもなお、

$$\hat{L}_\chi(s, A, x, y) = i_\chi e(-xy) \hat{L}_\chi(1-s, A^*, y, 1-x)$$

が成立する。このことは次数の高い場合でも同様で、一般に $k, l \in \mathbb{Z}^r$ に対して

$$L_\chi(s, A, x+k, y+l) = e(-ky) L_\chi(s, A, x, y)$$

という関係式で $L_\chi(s, A, x, y)$ を周期的に $x, y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^r$ に拡張しても $x, y \in (0, 1)^r$ の場合と同じ関数等式を満たすことが分かる。また

$$R_\chi(s, A, x, y) = e(xy) L_\chi(s, A, x, y)$$

という関数を導入すれば、周期性は $k, l \in \mathbb{Z}^r$ に対して

$$R_\chi(s, A, x+k, y+l) = e(xl) R_\chi(s, A, x, y)$$

と表すことができ、また関数等式は

$$\hat{R}_\chi(s, A, x, y) = i_\chi^{\pm 1} \hat{L}_\chi(1-s, A^*, \pm y, \mp x)$$

$$\hat{L}_\chi(s, A, x, y) = i_\chi^{\pm 1} \hat{R}_\chi(1-s, A^*, \pm y, \mp x)$$

のように表すことが出来る。従って標語的な言い方をすれば、 $L_\chi(s, A, x, y)$ という y について周期的な関数を y について Fourier 展開したものと $R(s, A, x, y)$ という x について周期的な関数を x について Fourier 展開したものを比較したものが関数等式であると理解することができる。

2 格子上の指標と領域に対する新谷 L 関数と関数等式

新谷 L 関数の関数等式の応用の一つとして、実二次体の Hecke L 関数の関数等式の新たな証明を与える。実際には実二次体の Hecke L 関数の多変数化を定義し、その関数等式を証明していることになる。まず、扱いやすい形にするため、新谷 L 関数を用いて格子に関する新たな L 関数を定義する。まず、格子上の指標というものを定義する。

定義 4

$\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ が指標であるとは \mathbb{R}^n の格子 $L' \subset L$ が存在して次の条件を満たすことをいう。

1. 任意の $x \notin L$ に対し $\lambda(x) = 0$
2. 任意の $w \in L', x \in L$ に対して $\lambda(x+w) = \lambda(x)$

L を λ の台、 L' を λ の周期と呼ぶことにする。さて、 L を λ の台、 $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \subset L$ とし、 (u_i) で張られる Cone 領域を $C(u)$ とする。ここで、新谷 L 関数の定義に倣って

$$F(s, u, \lambda) = \sum_{v \in C(u)} \lambda(v) v_1^{-s_1} \cdots v_n^{-s_n}$$

を定義したいが、そのためにはまずいくつか条件が必要である。

定義 5

λ が $C(u)$ に対して正則であるとは、次の 2 条件を共に満たすことをいう。

1. $v \in \mathbb{R}^n$ が $C(u)$ 上の境界にあるとき $\lambda(v) = 0$ を満たす
2. 任意の $v \in \mathbb{R}^n, i$ と $mu_i \in L'$ となる整数 m に対して

$$\sum_{k=0}^{m-1} \lambda(v + ku_i) = 0$$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ で x_i, y_i は全て $0 < x_i < 1, 0 < y_i < 1$ を満たす有理数とする。このとき $\lambda_u[x, y]$ を $v = u_1(x_1 + k_1) + \cdots + u_n(x_n + k_n)$ に対し

$$\lambda_u[x, y](v) = e(y_1 k_1 + \cdots + y_n k_n)$$

で定める。ただし k_1, \dots, k_n は整数である。それ以外の v に対しては $\lambda_u(v) = 0$ とする。 $C(u)$ に対して正則な λ は全て $\lambda_u[x, y]$ の線形結合で書くことができる。

$$F(s, C(u), \lambda_u[x, y]) = L(s, A = (u_1, \dots, u_n), x, y)$$

で定義する。また正規化と完備化を

$$\begin{aligned} F_\chi(s, C(u), \lambda_u[x, y]) &= L_\chi(s, (u_1, \dots, u_n), x, y) \\ \hat{F}_\chi(s, C(u), \lambda_u[x, y]) &= \hat{L}_\chi(s, (u_1, \dots, u_n), x, y) \end{aligned}$$

で定義する。 $\lambda_u[x, y]$ の線形結合 λ に対しても自然に定義を拡張して $F(s, C(u), \lambda), F_\chi(s, C(u), \lambda), \hat{F}_\chi(s, C(u), \lambda)$ を定義する。 u の転置逆行列を \hat{u} とすると、完備新谷 L 関数の関数等式より

$$\hat{F}_\chi(s, C(u), \lambda[x, y]) = i_\chi e(-xy) \hat{F}_\chi(1-s, C(\hat{u}), \lambda_{\hat{u}}[y, 1-x])$$

となる。この関数等式の線形結合を取るにより、一般の λ に対しても関数等式が求まるはずだが、この一般の λ に対する関数等式を少し違う形で述べる。格子 L に対し \hat{L} で L の双対格子を表すことにする。

定義 6

$\lambda: L/L' \rightarrow \mathbb{C}$ に対しフーリエ変換 $\hat{\lambda}: \hat{L}'/\hat{L} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\hat{\lambda}(\hat{v}) = \frac{1}{\det(L')} \sum_{v \in L/L'} e(-v \cdot \hat{v}) \lambda(v)$$

で定める。ここで $\det(L')$ は \mathbb{R}^n/L' の体積とする。

この定義は L, L' の取り方によらない。ここで、 $\lambda_u[x, y]$ のフーリエ変換を求めてみる。 λ の周期を mu とする。

$$\begin{aligned} & \widehat{\lambda_u[x, y]}(\hat{v}) \\ &= \frac{1}{m^2 |\det(u)|} \sum_{k_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m-1} e(-\sum_i (u_i x_i + u_i k_i) \cdot \hat{v}) \times e(y_1 k_1 + \cdots + k_n) \\ &= \frac{1}{m^2 |\det(u)|} e(-(u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n) \cdot \hat{v}) \sum_{k_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m-1} \prod_i e(k_i (u_i \cdot \hat{v} - y_i)) \end{aligned}$$

よって $\widehat{\lambda_u[x, y]}(\hat{v})$ が 0 でないのは、 k_1, \dots, k_n を整数として、 $\hat{v} = \hat{u}_1(y_1 + k_1) + \cdots + \hat{u}_n(y_n + k_n)$ の時のみで、またそのとき、

$$\widehat{\lambda_u[x, y]}(\hat{v}) = \frac{1}{|\det(u)|} e(-xy) e(-(k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n))$$

なる。よって定義より $\widehat{\lambda_u[x, y]} = \frac{1}{\det(u)} e(-xy) \lambda_{\hat{u}}[y, 1-x]$ となる。よって、次の定理が成立する。

定理 3

正則な λ に対して

$$\begin{aligned} \hat{F}_\chi(s, C(u), \lambda) &= i_\chi |\det(u)| \hat{F}_\chi(1-s, C(\hat{u}), \hat{\lambda}) \\ \Gamma_\chi(s) F_\chi(s, C(u), \lambda) &= i_\chi \Gamma_\chi(1-s) F_\chi(1-s, C(\hat{u}), \hat{\lambda}) \end{aligned}$$

3 実二次体の関数等式の証明への応用

ここで、いよいよ実二次体の Hecke L 関数の関数等式の証明に移る。以下では単にイデアルといえば分数イデアルのことを意味する。 K を実二次体、 χ を K の指標とする。 χ の有限成分を χ_f 、無限素点での成分を χ_∞ とする。また f を χ の導手とする。また I_K を K のイデアルのなす群、 P_K を K の単項イデアルのなす群、 O_K を K の整数環とし、 N で K/\mathbb{Q} のノルム写像を表すことにする。この文章中ではノルムと言えば常に絶対値を取ったものを考えることにする。つまり任意の $x \in K^\times$ に対し $N(x) > 0$ である。Hecke L 関数は次のように書かれる。

$$L_K(s, \chi) = \sum_a \chi(a) N(a)^{-s}$$

ただしここで、 a は K の 0 でない整イデアル全体を走る。Hecke L 関数を各イデアル類に分解すると

$$L_K(s, \chi) = \sum_{b \in I_K/P_K} \sum_{a'} \chi(a') N(a')^{-s}$$

となる。ただし、 b は各イデアル類の代表元を走り、 a' は b と同じイデアル類に含まれる整イデアル全体を走るとする。よって、 a' は $a' = (x)b$ という形で書ける。ここで、 (x) は x によって生成される単項イデアルであり、 $(x)b$ は整イデアルである。よって、

$$\begin{aligned} L_K(s, \chi) &= \sum_{b \in I_K/P_K} \sum_{x \in b^{-1}/O_K^\times} \chi(xb) N(xb)^{-s} \\ &= \frac{1}{\#(O_K^\times/O_{K+}^\times)} \sum_{b \in I_K/P_K} \chi(b) N(b)^{-s} \sum_{x \in b^{-1}/O_{K+}^\times} \chi(x) N(x)^{-s} \end{aligned}$$

となる。ここで O_K^\times は O_K の単数のなす群、 O_{K+}^\times は O_K の総正な単数のなす群である。

$$L_K(s, b, \chi) = \chi(b)N(b)^{-s} \sum_{x \in b^{-1}/O_{K+}^\times} \chi(x)N(x)^{-s}$$

と置くと $L_K(s, \chi)$ の各イデアル類への分解

$$L_K(s, \chi) = \frac{1}{\#(O_K^\times/O_{K+}^\times)} \sum_{b \in I_K/P_K} \sum_{x \in b^{-1}/O_K^\times} L_K(s, b, \chi)$$

が得られる。 $L_K(s, b, \chi)$ に対する関数等式を示す。結果的には $L_K(s, \chi)$ に対する関数等式は $L_K(s, b, \chi)$ に対する関数等式からすぐに導かれる。 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ を自然な埋め込みとする。またイデアル b に対し $\chi[b]$ で b を台とする指標

$$\chi[b](v) = \begin{cases} \chi(v) & v \in b \\ 0 & v \notin b \end{cases}$$

を表すことにする。 $C(u)$ として基本領域を取り、単に $\lambda = \chi_f[b^{-1}]$ とするだけでは、 λ が正則となるとは限らない。よって正則にするための補正を考える。 O_K の元 p, q で $Np = P, Nq = Q$ としたとき P, Q が異なる素数となるような十分大きなものをとる。十分大きくするのは、 p, q と互いに素でないとい困るような O_K の元が有限個存在するためである。すると

$$\begin{aligned} L_{K,p,q}(s, b, \chi) &= L_K(s, b, \chi)(1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s}) \\ &= \chi(b)N(b)^{-s} \sum_{x \in b^{-1}/O_{K+}^\times} h_{p,q}(x)\chi(x)N(x)^{-s} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $h_{p,q}(x)$ は

$$h_{p,q}(x) = \begin{cases} 0 & p \mid x \\ (1 - Q) & (p \nmid x) \wedge (q \mid x) \\ 1 & (p \nmid x) \wedge (q \nmid x) \end{cases}$$

である。ここで O_{K+}^\times の生成元を ϵ, w を p の倍数となる b の元、 $u = (\sigma(w), \sigma(w\epsilon))$ とし、 $\lambda(x) = h_{p,q}(x)\chi_f[b^{-1}](x)$ と置くと、 λ は $C(u)$ に対し正則である。次に $F_{\chi_\infty}((s_1, s_2), C(u), \lambda)$ と $L_K(s, b, \chi)$ を結びつけることを考える。まず、 $(\mathbb{R}^\times)^n$ の連結成分 g に対して、

$$L_{K,p,q,g}(s, b, \chi) = \chi(b)N(b)^{-s} \sum_{x \in (b^{-1} \cup g)/O_{K+}^\times} h_{p,q}(x)\chi_f(x)N(x)^{-s}$$

と定義する。また $(g_1, \dots, g_n) \in g$, $g_i \in \{1, -1\}$ とし、 $v = (v_i)_i \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$v_g = (g_i v_i)_i$$

と置くことにして、

$$\begin{aligned} C(u)_g &= \{v_g : v \in C(u)\} \\ \lambda_g(v) &= \lambda(v_g) \end{aligned}$$

と定義する。

$$\begin{aligned} &F_{\chi_\infty}((s_1, s_2), C(u), \lambda) \\ &= \sum_g \chi_\infty(g) F((s_1, s_2), C(u)_g, \lambda_g) \\ &= L_{K,p,q}(s, b, \chi) \\ &= \sum_g \chi_\infty(g) L_{K,p,q,g}(s, b, \chi) \end{aligned}$$

となるので $F((s_1, s_2), C(u)_g, \lambda_g)$ と $L_{K,p,q,g}(s, b, \chi)$ の関係を求めたい。次の定理は通常は級数表示を持たない正規新谷 L 関数と Hecke L 関数を結びつける定理でありその意味で非自明で重要である。

定理 4

$$F((s, s), C(u)_g, \lambda_g) = \chi(b)^{-1} N(b)^s L_{K,p,q,g}(s, b, \chi)$$

証明 次のような式変形を行う。 $C(v)$ は $(b^{-1} \cap g)/O_{K_+}^\times$ の基本領域で λ が $C(v)$ に対して正則となるようにとる。

$$\begin{aligned} \chi(b)^{-1} N(b)^s L_{K,p,q,g}(s, b, \chi) &= \sum_{x \in (b^{-1} \cap g)/O_{K_+}^\times} \lambda(x) N(x)^{-s} \\ &= \sum_{x \in C(v)} \lambda(x) N(x)^{-s} \\ &= \sum_{x \in C(v)} \lambda(x) \prod_i (g_i x_i)^{-s} \\ &= \sum_{x \in C(v)_g} \lambda_g(x) \prod_i x_i^{-s} \\ &= F((s, s), C(v)_g, \lambda_g) \end{aligned}$$

よって $F((s, s), C(u)_g, \lambda_g) = F((s, s), C(v)_g, \lambda_g)$ を示せばよい。 $u = (w, w\epsilon), v = (y, y\epsilon)$ とすると領域 u と v の差は領域 $C(w\epsilon, y\epsilon)$ と $C(w, y)$ の差にもなっているので

$$\begin{aligned} &F((s_1, s_2), C(v)_g, \lambda_g) - F((s_1, s_2), C(u)_g, \lambda_g) \\ &= \pm(F((s_1, s_2), C(w\epsilon, y\epsilon)_g, \lambda_g) - F((s_1, s_2), C(w, y)_g, \lambda_g)) \\ &= \pm(\epsilon_1^{s_1} \epsilon_2^{s_2} - 1) F((s_1, s_2), C(w, y)_g, \lambda_g) \end{aligned}$$

となる。 $s_1 = s_2$ のとき、 $(\epsilon_1^{s_1} \epsilon_2^{s_2} - 1) = 0$ となるので $F((s, s), C(u)_g, \lambda_g) = F((s, s), C(v)_g, \lambda_g)$ である。 ■
これで Hecke L 関数を正規新谷 L 関数を用いて表すことが出来た。つまり

$$\begin{aligned} \chi(b) N(b)^{-s} F_{\chi_\infty}((s, s), C(u), \lambda) &= L_{K,p,q}(s, b, \chi) \\ &= (1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s}) L_K(s, b, \chi) \end{aligned}$$

である。次に $\lambda(x) = h_{P,Q}(x) \chi[b^{-1}](x)$ のフーリエ変換を求める。 K の判別式を D とし $d = \sqrt{D}$ とする。 (d) は K/\mathbb{Q} の共役差積である。任意のイデアル a に対して、 $\det(a) = dN(a)$, $\hat{a} = (da)^{-1}$ となることに注意する。 $b'b = df$ となるようにイデアル b' をとる。 λ は周期として $pqfb^{-1}$ を持つので、 $\hat{\lambda}$ は台として $d^{-1}(pqfb^{-1})^{-1} = (pqb')^{-1}$ を持つ。

定義 7

$\hat{v} \in (b')^{-1}$ に対して、 \hat{v} が f と互いに素であるとき、ガウス和

$$\chi(\hat{v}) \sum_{v \in b^{-1}/fb^{-1}} e(-v \cdot \hat{v}) \chi(v)$$

は \hat{v} によらない。これを $G(\chi)$ で表す。

定義より $\hat{v} \in f^{-1}b'd^{-1} = (b')^{-1}$ に対して

$$\begin{aligned} \widehat{\chi[b^{-1}]}(\hat{v}) &= \frac{1}{\det(fb^{-1})} \sum_{v \in b^{-1}/fb^{-1}} e(-v \cdot \hat{v}) \chi(v) \\ &= d^{-1} N(f^{-1}b) G(\chi) \chi^{-1}(\hat{v}) \end{aligned}$$

となる。格子の指標 χ と \mathbb{R}^n の自己同型 p に対して、

$$R_p \chi(v) = \chi(pv)$$

と定義すると、 $\lambda = (1 - \chi(p)R_p)(1 - q\chi(q)R_q)\chi$ より

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= (1 - (\chi(p)/P)R_{1/p})(1 - \chi(q)R_{1/q})\widehat{\chi[b^{-1}]} \\ &= (1 - (\chi(p)/P)R_{1/p})(1 - \chi(q)R_{1/q})d^{-1}N(f^{-1}b)G(\chi)\chi^{-1}[(b')^{-1}] \end{aligned}$$

となる。よって

$$R = (1 - (\chi(p)/P)R_{1/p})(1 - \chi(q)R_{1/q})$$

と置くと、

$$\begin{aligned} &F_{\chi_\infty}((1-s, 1-s), C(\hat{u}), \hat{\lambda}) \\ &= G(\chi)d^{-1}N(f^{-1}b) \\ &\quad \times F_{\chi_\infty}((1-s, 1-s), C(\hat{u}), R\chi^{-1}[(b')^{-1}]) \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} &\chi^{-1}(b')N(b')^{s-1}F_{\chi_\infty}((1-s, 1-s), C(\hat{u}), R\chi^{-1}[(b')^{-1}]) \\ &= (1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s})L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} &G(\chi)d^{-1}N(f^{-1}b)(1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s})L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \\ &= \chi^{-1}(b')N(b')^{s-1}F_{\chi_\infty}((1-s, 1-s), C(\hat{u}), \hat{\lambda}) \end{aligned}$$

よって

$$\Gamma_{\chi_\infty}(s)F_{\chi_\infty}(s, C(u), \lambda) = i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)F_{\chi_\infty}(1-s, C(\hat{u}), \hat{\lambda})$$

の両辺を変形すると左辺は

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\chi_\infty}(s)F_{\chi_\infty}(s, C(u), \lambda) \\ &= \Gamma_{\chi_\infty}(s)\chi(b)^{-1}N(b)^s(1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s})L_K(s, b, \chi) \end{aligned}$$

となり、右辺は

$$\begin{aligned} &i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)F_{\chi_\infty}(1-s, C(\hat{u}), \hat{\lambda}) \\ &= i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)\chi(b')N(b')^{1-s}G(\chi)d^{-1}N(f^{-1}b) \\ &\quad \times (1 - \chi(p)P^{-s})(1 - \chi(q)Q^{1-s})L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{\chi_\infty}(s)\chi(b)^{-1}N(b)^sL_K(s, b, \chi) \\
= & i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)\chi(b')N(b')^{1-s}d^{-1}N(f^{-1}b)G(\chi)L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \\
& \Gamma_{\chi_\infty}(s)\chi^{-1}(bb')L_K(s, b, \chi) \\
= & i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)d^{-1}N(b)^{-s}N(b')^{1-s}N(f^{-1}b)G(\chi)L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \\
= & i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)d^{-1}N(bb')^{1-s}N(f^{-1})G(\chi)L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \\
= & i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)d^{1-2s}N(f)^{-s}G(\chi)L_K(1-s, b', \chi^{-1}) \\
& \Gamma_{\chi_\infty}(s)\chi^{-1}(bb')d^sN(f)^{s/2}L_K(s, b, \chi) \\
= & i_{\chi_\infty}\Gamma_{\chi_\infty}(1-s)d^{1-s}N(f)^{(1-s)/2}\frac{G(\chi)}{N(f)^{1/2}}L_K(1-s, b', \chi^{-1})
\end{aligned}$$

よって $\hat{L}_K(s, b, \chi) = d^s N(f)^{s/2} \Gamma_{\chi_\infty}(s) L_\chi(s, b, \chi)$ と置くと次が成り立つ。

定理 5

次の関数等式が成り立つ。

$$\chi^{-1}(df)\hat{L}_K(s, b, \chi) = i_{\chi_\infty}\frac{G(\chi)}{N(f)^{1/2}}\hat{L}_K(1-s, b', \chi^{-1})$$

また $W(\chi) = i_{\chi_\infty}\chi(df)G(\chi)N(f)^{-1/2}$ と置けば、関数等式は

$$\hat{L}_K(s, b, \chi) = W(\chi)\hat{L}_K(1-s, b', \chi^{-1})$$

とも書け、 $W(\chi)$ の絶対値は 1 である。また、 b について足し合わせることによって

$$\hat{L}_K(s, \chi) = W(\chi)\hat{L}_K(1-s, \chi^{-1})$$

も証明された。

参 考 文 献

- [1] Hida, Haruzo (1993), Elementary theory of L-functions and Eisenstein series, London Mathematical Society Student Texts, 26, Cambridge University Press
- [2] Shintani, Takuro (1976), "On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers", Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section IA. Mathematics 23 (2)
- [3] Matsumoto, Kohji (2004), Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 136, 1-7.