数理解析研究所講究録
第1828巻 2013年 61-85

教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法 III
（Team 2 プロジェクト）

島根大学 教育学部　青山 陽一 (Yoichi AOYAMA)
Faculty of Education, Shimane University

滋賀大学 教育学部　神 直人 (Naondo JIN)
Faculty of Education, Shiga University

岡山大学 教育学部　曽布川 拓也 (Takuya SOBUKAWA)
Faculty of Education, Okayama University

岐阜大学 名誉教授　中馬 悟朗 (Goro CHUMAN)
Professor Emeritus, Gifu University

§0. プロジェクトの理念に関して

Team2 プロジェクトの理念・スローガンとして

「大学における教科専門科目の内容を体系的に把握して，小学校・中学校・高等学校の数学を自ら構成し授業展開等を行える数学教師を養成する為に」

を掲げ，学生に備えさせるべき能力として

「小学校・中学校・高等学校の数学の内容全てを，大学における教科専門科目の内容を機能的に連携させて，捉え扱うことが出来る」

を目標にし，具体的方策として

「大学における教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導」

に取組む. ([1, §0], [2, §0])

今回の §0 では，上記の考えに到らせた事項 或いは 教材研究指導への取っ掛りとなる事例 のようなものを三つ述べることにした. (小節 0.1, 0.2, 0.3) これはチームにおける話合を基に青山が纏めたもので，文責は全て青山にあることを断わっておく.

§1 は神による「高校入試問題を利用した授業の提案〜教材研究能力を高めるために」と題した論考であり，§2 は [2, §2] の続編である．そして別立として，共同研究者の平井安久氏との論議から論考の一つとしてまとめた「数の概念の捉え方について」がこの論稿の直後に載せられている.

[**References**]

[1] RIMS 共同研究 数学教師に必要な数学能力形成に関する研究，数理解析研究所講究録 1657，京都大学数理解析研究所，2009 July．p.105 – p.127
　６. 教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法（Team 2 プロジェクト）.

[2] RIMS 共同研究 数学教師に必要な数学能力に関する研究，数理解析研究所講究録 1711，京都大学数理解析研究所，2010 September．p.130 – p.155
　６. 教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法 II（Team 2 プロジェクト）.

0.1 青山の講義から

青山が講義においてレポート問題として出したものから.（少し変更してある.）

「すべての数は 0 である.」　以下の証明，どこがオカシイ？

A を 2 次行列とする．即ち，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,b,c,d$ は数)．A のトレース, $\mathrm{tr}(A)$, を $\mathrm{tr}(A)=a+d$ で定める．$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ も 2 次行列とする．A と B の積, AB, を $AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ で定める．$BA=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$ である．$AB=BA$ とは限らないが，$\mathrm{tr}(AB)=ae+bg+cf+dh$, $\mathrm{tr}(BA)=ea+fc+gb+hd$ でトレースは等しい．従って，次の定理を得る．

定理 0.1. 2 次行列 A,B に対し，$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

この定理により，トレースの計算においては積の順序を交換してもよいので，次の系を得る．

系 0.2. 2 次行列 A,B,C に対し，$\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(BAC)$.

この系により，

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

を得る．左辺 $=2$, 右辺 $=1$ だから $2=1$ で，$1=0$ となる．故に，任意の数 a に対し $a=a\times 1=a\times 0=0$ である．

講義題目は算数科内容構成研究，受講学生は小学校教員免許を副として希望している者が殆どである．必要な情報を与えて，論理を追う力を養う一つの足懸りにしようとの目論見である．2 次行列について知っていないといけないように取る者も居るが，‘即ち’以下で定義を与えて，文章の読み方にも意を用いるようにと言う訳である．

殆どの学生は「定理から系は導かれない」に気付く．しかし，最初の下線部を書かずに系で止めてしまうと,「定理から系は導かれない」に気付く学生は減る．さらに定理と系の間の文章を省くと，気付く学生はもっと減るだろうと推測している．

数学を専攻している学生には，行列式についてのことを並行して示す．

定理 0.3. $\det(AB)=\det(BA)$

系 0.4. $\det(ABC)=\det(BAC)$

と全く並行した形で示す．それから，定理 0.3 は $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ の系であって，行列は何個あっても良いことを復習させる．定理 0.1 の証明をさせて違いを確認させる．次に，G を $(2,3)$ 行列，H を $(3,2)$ 行列として，$\mathrm{tr}(GH) = \mathrm{tr}(HG)$, $\det(GH) = \cdots$ ($\cdots$ は記載省略の意), $\det(HG) = 0$ を確認させる．証明は一体であることにも目を向けさせよう．これらのことを独力で遣って呉れれば非常に有難い．そうなるような指導をする必要がある．

市販されている本の中には，$\mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(M)$ の証明として次の様なのが記されているものがあることを注意してこの小節を終わる．

"定理 0.1 (一般次数版) より，$\mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(P^{-1}PM) = \mathrm{tr}(EM) = \mathrm{tr}(M)$."

0.2 入試問題の解説から

島根大学で高大接続事業の一環として 2010 年 8 月 12 日に実施された「未来創造ステップアップセミナー」(松江市内の県立高校 3 校と合同) における 高校の先生による大学入試問題の解説から次を取上げる．

(．．．問題を切り取りノートに張っておくこと)

問題　$f(x) = (x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解を小さい順に並べよ．

(2) 不等式 $f(n) \leqq 0$ をみたす整数 n をすべて求めよ．

(3) 不等式 $f(n) \leqq 1$ をみたす整数 n をすべて求めよ．

解答

(1) $(x^2-2)(x^2-4x+2) = 0$

$x = \pm\sqrt{2}\,,\ 2 \pm \sqrt{2}$

小さい順に並べると　$-\sqrt{2}\,,\ 2-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,,\ 2+\sqrt{2}$

(2) $(n^2-2)(n^2-4n+2) \leqq 0$

$\begin{cases} n^2 - 2 \leqq 0 & \cdots ① \\ n^2 - 4n + 2 \geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$　または　$\begin{cases} n^2 - 2 \geqq 0 & \cdots ③ \\ n^2 - 4n + 2 \leqq 0 & \cdots ④ \end{cases}$

①より　$-\sqrt{2} \leqq n \leqq \sqrt{2}$

②より　$n \leqq 2-\sqrt{2}\,,\ 2+\sqrt{2} \leqq n$

$\therefore\ -\sqrt{2} \leqq n \leqq 2-\sqrt{2}$

n は整数だから，$n = -1, 0$

③より　$n \leqq -\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2} \leqq n$

④より　$2-\sqrt{2} \leqq n \leqq 2+\sqrt{2}$

$\therefore\ \sqrt{2} \leqq n \leqq 2+\sqrt{2}$

n は整数だから，$n = 2, 3$

以上より　$n = -1, 0, 2, 3$

(3) $n^2-2\,,\ n^2-4n+2$ はともに整数だから，$(n^2-2)(n^2-4n+2)$ も整数である．

(i) $f(n) \leqq 0$ のとき，(2) より　$n = -1, 0, 2, 3$

(ii) $0 < f(n) \leqq 1$ のとき

$n^2-2\,,\ n^2-4n+2$ はともに整数だから，$(n^2-2)(n^2-4n+2)$ も整数だから

$f(n)=1$ のときだけである．

$$\begin{cases} n^2-2=1 & \cdots \text{⑤} \\ n^2-4n+2=1 & \cdots \text{⑥} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} n^2-2=-1 & \cdots \text{⑦} \\ n^2-4n+2=-1 & \cdots \text{⑧} \end{cases}$$

⑤より　$n=\pm\sqrt{3}$

⑥より　$n^2-4n+1=0$

$n=2\pm\sqrt{3}$

よって条件をみたす n は

存在しない．

⑦より　$n=\pm 1$

⑧より　$n^2-4n+3=0$

$\therefore\ (n-1)(n-3)=0$

$\therefore\ n=1,3$

よって $n=1$

(i)(ii) より　$n=-1,0,1,2,3$

「問題を切り取りノートに張っておくこと」に関して：事前にプリントを配布して必要な部分を切取りノートに貼らせておくようである．これで良いのだろうかという疑問を持つ．正確に写すことは，非常に能力を要することであって学習上効果があると考えるが，近頃は時間の浪費でありその分解答に時間をかけようということらしい．写すという作業によって，式等の書き方・句読点の打ち方・論理的改行か・字数による改行か・文章内の式か・別立ての式か等，実に様々なことを学ぶことが可能であるのに．残念なことである．教材研究を行うときには，手で正確に写す作業をさせよう．

行われた解説に関して：行われた解説は，出版物に掲載されている解答(上記のもの)をそのままの形でなぞったものであった．こうなる理由は推測するに，“どの様に解答を書けば点数が取れるのか”という観点から自らの判断を止め予備校やその筋の出版社に頼るのが無難ということになってしまう，であろう．一人の教師が‘解答はこれで良い’と主張しても，それで点数が取れると保証するのかと問われれば，躊躇してしまうのも仕方ないだろう．そこで，予備校やその筋の出版社の出番となる次第である，というのが現実であろう．高校側も全国的規模のものなら頼って良いだろう，になると推測される．上記の解答例が‘点数を取れない’訳ではない，何故なら間違ってはいないから(変な文章はあるが)．しかし，(1) は何の為なの . . . .

入試問題を教材研究に用いることは有効であると考える．学生には自分で色々な解答を与えるようにさせて，取組ませるのが良いだろう．その際，大学で学んだ数学を大いに活用させることも行い，出題の意図や作問の背景も推測できるようになることを願うものである．さらに，良問か悪問かなどを判断できる力も身に付けて欲しい．

その他：学生に教材研究を行わせるとき，方程式・不等式を解く際も，式を関数と見て分析する態度を忘れないように指導する必要があるだろう．関数のグラフとはコンピューターに式を入力したら画面に表示されるもの，ではない．自ら点をプロットしてグラフの概形を描くことを基本的態度の一つとして身に付けさせよう．

上述のことを材料に，

科学研究費研究 (代表者：浪川幸彦) による研究集会
「数学リテラシーを育成する数学教員養成カリキュラムの研究」
南九州大学都城キャンパス，2011 年 2 月 12 – 13 日

で話をした折，参加されていた高校の先生から，自分の処では出版されているものをなぞるような事はしていない，との注意があったことを述べてこの小節を終りにする．

0.3 市販の書物から

河田直樹 著「高校･大学生のための 整数の理論と演習」(現代数学社, 2008 June) の p.32–p.33 に次のような記述がある．数学の先生ならば，対応出来なければならないだろう．(この本は‘カナリ’のもので，下記の部分はその代表として最有力候補だろう.)

≪**参考**≫ 実数の連分数展開を

$$x = q_1 + \frac{1}{q_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{q_n} + \cdots\cdots$$

とし，$x_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ (P_n, Q_n は定理 3.2 で定めたものとする) とすれば，$n \to \infty$ のとき，x に収束することは前に述べた通りであるが，これは，どんなに小さな正数 ε に対しても，n を十分大きくとれば，

$$|x - x_n| = \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \varepsilon \qquad \cdots\cdots ①$$

のように出来ることを意味している．また，$Q_n < Q_{n+1}$ であることに注意すると，

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| \leqq \left| \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n+1}} \right| < \frac{1}{{Q_n}^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

のようにできる．したがって，三角不等式を利用すると ①,② から，

$$\left| x - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| \leqq \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| + \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| < \varepsilon + \frac{1}{{Q_n}^2}$$

となるが，n を十分大きくすれば，ε はいくらでも小さくなるので，

$$\left| x - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| \leqq \frac{1}{{Q_n}^2}$$

が成り立つことがわかる．

学生にこれを読ませたとき，先ずおかしいと気付いてくれないと困る．間違いを指摘させるためには，数列の収束についての ε-δ 論法式定義を確りと把握させておく必要がある．例え ε-δ 論法式定義を把握していなくとも，おかしいと気付かないといけない部分もある．さらに，何故このような間違いを書いてしまうのかを推測 (教師としての重要な能力の一つ) させるには，この部分の書物における位置付けなども考慮させなければならないだろう．この様なことは，学生の勉強にとっては非常に良い材料と思われる．また，上記の本をその趣旨に沿って良教科書に仕立て直すのは，非常に良い勉強になるだろう．

§1. 高校入試問題を利用した授業の提案
～教材研究能力を高めるために

滋賀大学教育学部　　神　直人

授業を構想した背景

大学入学以前の学生にとって数学を学ぶ際の目標はテストで高得点を取ることであり、多くのものは大学入試に必要だから数学を勉強しているのだと考えている。彼らにとっては、ひたすら問題を解く練習が数学の学習である。そこでは、教員から問題が与えられ、その問題を学生が解答し、その解答を教員が評価する、という図式が出来上がっている。一方大学における数学の講義は理論をしっかりと構築して進んでいく。学生に求められるのは、理解して知識を得ることと同時に理論構成の際に用いられる論理の進め方あるいはテクニックを身につけることである。学生が、自ら問題を見つけ、その問題を数学的に定式化し、問題を解き、その解答が正しいことを自ら確認することを理想の姿として期待している。

滋賀大学教育学部において数学科教員の免許を取得するものの多くは、線形代数学（１年生秋学期、２年生春学期）微分積分学、基礎幾何学、基礎代数学（いずれも２年生春･秋学期）の必修科目を履修したのち、解析学、幾何学、代数学（３年生半期）の選択必修科目を履修する。２年次には線形代数学と微分積分学の演習があり、３年生秋学期からはゼミがはじまる。これらの数学の授業を通じて学生の数学に対する姿勢を、高校までの「教員が問題を与え、自らが解き、教員が解答を評価する」から理想の姿である「自分で問題を見つけ、自らが解き、自らが解答を評価する」へと変革しなければならない。

大学における授業は概ね、週１コマ半期 15 回で行われる。週１回の授業は主に理論の構築に費やされる。それを理解し論理の進め方やテクニックを身につけることは学生の自主的な学習活動に任される。実際には高校までの教育課程で受け身の数学学習態度を身につけてきた彼らが大学に入って主体的に数学を学習することは難しい。問題演習の量も実際には高校時代とは比べものにならないくらい乏しい。確かに３年生秋学期からのゼミでは学生は主体的に数学を学ぶことになるのであるが、そこで学ぶ数学は高校レベルを超えた高等数学である。教員を目指す学生にとってゼミで学ぶ数学と小･中･高校で学ぶ（教える）数学とのつながりを認識することは容易ではない。

滋賀大学教育学部において数学科教員の免許を取得する学生の多くは卒業後に中学校数学科教員になっている。教員になればもちろん主体的に数学を活用しなければならない。具体的には、日々の授業で教える数学的内容とその背景となる数学の理解そしてその内容の生徒への提示の仕方を考える教材研究、テストを実施する際には問題の作成と解答の評価、そして Ball&Bass らが主張している「教師に必要な

数学的知識（Mathematical Knowledge for Teachers=MKT)」の中で教師に特徴的な知識として分類されている、「特殊専門的な数学的知識（Specialized Mathematical Knowledge =SMK)」が挙げられる。SMKの例としては、授業中に教員の問いかけに対して誤った答えが出された時、生徒の誤答にいたった思考の道筋をたどれること、誤答をした生徒を正しい答えに導く方法を見出せること、あるいはその誤答を授業の中で生かせるかどうか判断し可能な場合は実行できることなどが考えられる。

先に見たような大学の数学の学びの現状がある中で教員に必要な数学能力をどのように養成すればいいのかという問題意識が今回報告する授業を構想するに至った動機である。これまでの考察をふまえて授業を作る際に重視した点は次の３つである：① 受講生が中学校数学とのつながりを明らかに感じられる題材を選ぶ。② 受講生が主体的にかかわる活動を重視する。③ 受講生が数学を研究するスタイルを経験する。

具体的には、① に関しては高校の入試問題を題材とした。特に私立高校の入試問題には数学的な広がり、深さを備えたものがあるので、利用することにした。② に関しては、１人または２人に１問ずつ担当させることで、クラスのなかでその問題を扱うのは自分だけだという意識を持たせて、主体的に取り組ませるきっかけとした。③ に関しては、問題解答の発表後にクラス全体で討議することにした。多くの場合は教員側から、問題設定を少し変えるとどうなるか、一般化は可能か、他の分野とのつながりはあるかなどの質問を与えて次回までに解答するように求めた。

授業の流れ

今回実施したのは、２年生対象秋学期毎週１コマの授業である。受講生は線形代数学の履修を終え、微分積分学は半期の履修を終えたところである。受講生数は２０名であった。

１時間目：受講生を２名１組のペアにして 2009 年度の私立高校の入試問題を配布し、そこから各ペアで面白そうな大問を２問選び、そのうちの１問を次回以降黒板で解答し、他の受講者に解説するように指示した。

１回目の発表：受講生が黒板で１問を解答してわかりやすく解説。その発表を受けて全員で次の点を考察する。(1) 他の解き方はないか。 (2) 問題で扱われている事項の数学的な背景は何か。 (3) 新しい類題を作ってみる。(4) 他に気になる点はないか。

以上４点の議論を踏まえて次回までの課題を設定する。

２回目の発表：１回目の発表後設定された課題を解答する。 その発表を受けて全員で次の点を考察する。(1) 他の分野とのつながりはないか。 (2) 一般化をすることは可能か。 (3) グラフ表示ソフトなどを利用して背景となる数学を説明できるか。

以上３点の議論を踏まえて次回までの課題を設定する。

<u>3回目の発表</u>：2回目の発表後設定された課題を解答する。その発表を受けて全員で討議し、新たに課題を設定する。

<u>レポート</u>：3回分の発表と新たな課題の解決をレポートにまとめて提出する。

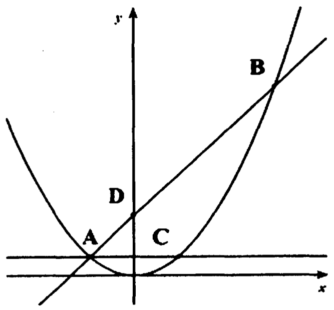
以下に発表例を5件掲載しておく。

発表例1

右の図のように，放物線 $y=(1/3)x^2$ と直線 $y=x+k$ $(k>0)$ との交点を，x 座標の小さいほうから A, B とする。また，A を通り x 軸に平行な直線と放物線の交点のうち A でない方を C とする。さらに，直線 $y=x+k$ と y 軸の交点を D とすると，AD:DB=1:2 であった。このとき次の問いに答えよ。

(1) 2 点 A, B の座標，および k の値を求めよ。

(2) 3 点 A,B,C を通る円の中心の座標と，その面積を求めよ。



(2009 愛光高校)

<u>1回目発表</u>： 通常の解き方を解説して、

(1) の答え A(-3, 3) B(6,12) C(3,3) k=6

(2) の答え 円の中心(0,9) 円の面積 45π

を得たことを発表。
発表後の考察で、「なぜ解に出てくる数値がすべて3の倍数になるのか。」というものが出された。そこで次回までの課題として、

① なぜ解に出てくる数値がすべて3の倍数になるのか。

② 解に出てくる数値がすべて5の倍数になる問題を作ってみる。

を与えた。

<u>2回目発表</u>：担当の受講生は、①、② を含む形で

③ n を自然数として、解に出てくる数値がすべて n の倍数になる問題は作れるか

という 課題を自ら設定した。そこで元の問題で
『放物線 $y=(1/3)x^2$』を『放物線 $y=x^2/(m+n)$』に、辺の比は『AD:DB=1:2』を『AD:DB=m:n』にそれぞれ設定を 一般化 して解いた。そしてその解を解釈することで 課題 ③ に対してすべての n に対して作問が可能であることを見出した。さらに、

④ 放物線 $y=Cx^2$ と直線 $y=x+k$ が2点 $A(a,Ca^2)$, $B(b, Cb^2)$ で交わる時、$k=abC$ は2点 A, B の y 座標の相乗平均である

ことに気づいた。

そこで次回までの追加課題として、

⑤ ④で相乗平均が出てくることの理由を説明せよ。

を与えた。

3回目発表：相加平均、相乗平均の幾何学的解釈を調べてきた。しかし⑤の解釈に直接はつながらなかった。

発表者の感想：高校入試の問題の背景から、いろいろなことが考えられるということがとても興味深いなと思った。また、様々な人の発表を聞いていろいろな問題の背景を知って中学の問題でも高校や大学の知識を適応させていくと新たな見方が生まれてくるのもすごく面白いと思った。また自分が担当した部分では今まで何気なく解いてきた二次関数の問題から相乗平均にまで関わりがあったということはとてもびっくりした。この授業は、問題を作る側から考えるときにも非常に役に立つと思った。これからは問題をただ解くだけでなくこのような視点で分析していくことをしていきたい。

考察：この受講生の場合は、元の問題の一般化にあたる新たな問題を自ら設定し、解答し、それを吟味する過程で相乗平均に気づいている。これはほぼ理想の姿である。また、与えられた問題はただ解くだけでなく、数学的に深く考察すれば新たな面あるいは広がりが発見できること、そしてそのためには中学校の問題であるとはいえ高校や大学で学ぶ数学の知識が必要であることにも言及している。

発表例２

千の位が５であるような４桁の自然数がある。千の位の数字を一の位に移動し，残りの位の数字をそのまま１桁ずつ左にずらしてできる自然数は，もとの自然数の４分の１より 1134 大きいという。もとの４桁の自然数を求めよ。

(2009 青山学院高等部)

1回目発表：　次のように解いた。

元の自然数の百の位の数字を a, 十の位の数字を b, 一の位の数字を c とおく。

例えば条件から、元の数は４の倍数であり $a\neq 0$ であるから、5100 以上 5966 以下になることがわかる。それを４で割って 1134 加えると、2409 以上 2633 以下になる。よって、a=2 となる。このように条件から a, b, c の値の範囲を絞っていき a=2, b=4, c=4 と求めた。

発表後の考察から、「解が１通りに決まらない問題はできないか」という質問が出た

ので、次回までの課題として

① 他の解答方法を考えてみる。

② 考えられる誤答例を見つける。

③ 解がただ1つになる、或いは解が2つ現れる場合の新たな問題を作ってみる。

を与えた。

2回目発表：① に関しては、

方程式を作って 1000a+100b+10c+5=(1/4)(5000+100a+10b+c)+1134

とおいてみても通常の方程式の解法では解けない。つまり、1回目の発表のような方法にならざるを得ない。

② に関しては、

①に関連して，未知数が3つに対して1つの方程式を立てて解こうとする「誤答」がある。

③ に関しては、

◆ ただ1つの解をもつ類題：

【問題1】千の位が3であるような4桁の自然数がある。千の位の数字を一の位に移動し，残りの位の数字をそのまま1桁ずつ左にずらしてできる自然数は，もとの自然数の2倍より997小さいという。もとの4桁の自然数を求めよ。

[答え] 3625

⇒ 新しい問題の作成方法は，答えの3625をまず決めて，もとの自然数と新しい自然数の関係を決めた。「答えを決めて，関係を記述したのだから解はただ1つである」

というのがただ1つの解を持つことの証明であった。

◆ 2つ解がある場合

『この問題では「もとの自然数」とそこから作られた「あとの自然数」の関係から「もとの自然数」を求めることが要求されるが、「もとの自然数」を定めてから問題作成をすると、2つ解を持つ問題は作成しづらいだろう。少なくとも「千の位が5であるような…・」という付加条件をつけてしまえば、そこから順に他の位の数も1つに決まっていってしまい、ますます解は1つしか求められなくなると考える。そこで、できるだけ条件を少なくした次のような問題を作ってみた。』

と説明して次の問題を紹介した。

【問題2】3桁の自然数がある。百の位の数字を一の位に移動し、残りの位の数字をそのまま1桁ずつ左にずらしてできる自然数は、もとの自然数の2倍になるという。もとの自然数を求めよ。

この問題2が解なしになることが分かったので、別の問題も作成し紹介した。

【問題3】3桁の自然数がある。百の位の数字を一の位に移動し、残りの位

の数字をそのまま1桁ずつ左にずらしてできる自然数は、もとの自然数より9小さいという。もとの自然数を求めよ。

[答え] 110, 221, 332, …, 998

発表後の考察で、「【問題２】で桁数を多くしたら（自由度が増すので）解は存在するのではないか」という意見が出されたので、次回までの課題として、

④ 【問題２】の３桁のところをn桁に一般化してみる。

⑤ 【問題２】の３桁のところを５桁に固定し、3,4,… 倍と一般化してみる。

を与えた。

<u>３回目発表</u>：④ に関しては、次の問題を設定し、解なしになることを証明した。

【問題４】n桁の自然数がある。10^{n-1}の位の数字を一の位に移動し、残りの位の数字をそのまま１桁ずつ左にずらしてできる自然数は、もとの自然数の２倍になるという。もとの自然数を求めよ。

⑤ に関しては、

５桁の場合、2,3,4,5,6,7,8,9 倍いずれでも解なしになることを証明した。

発表後の討議で、

「6桁で 2,3,4,5,6,7,8,9 倍いずれでも解なしになるのか？」

との質問が出て、その場で５桁の場合と同様の手法で、次の問題の答えは解なしになることを説明した。

【問題５】n桁の自然数がある。10^{n-1}の位の数字を一の位に移動し、残りの位の数字をそのまま１桁ずつ左にずらしてできる自然数は、もとの自然数の4(または 5,6,7,8,9)倍になるという。もとの自然数を求めよ。

ここで、3倍が抜けていることに気づき、ある受講生が、142857 が解になることを見つけた。そこで、レポートの課題として、

【問題６】6桁の自然数がある。10^5の位の数字を一の位に移動し、残りの位の数字をそのまま１桁ずつ左にずらしてできる自然数は、もとの自然数の３倍になるという。もとの自然数を求めよ。

の解答と、無限循環小数との関連を調べることを課した。

<u>レポート</u>：【問題６】の解は 142857, 285714 の２つで、結局は１回目終了後の課題 ③ の解答になっていることを報告した。

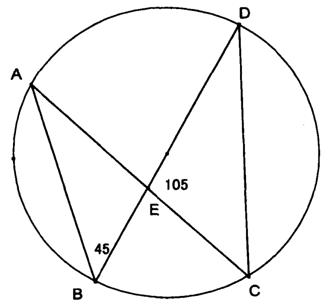
<u>発表者１の感想</u>：この授業では、既存の問題を様々な方向に拡張していくという貴重な経験ができた。この作業は、数学を学ぶ上ではもちろん有意義で大切なものだが、教師になるという面でも大変有効だと思った。問題をしっかり分析して、その背景や類題、最も簡潔な解法、解説する上で必要な深い理解を知ろうとしたことは、今後の学習にも通じる重要な作業だろう。私たちが選択した問題は、結果的に整数の性質を深く理解していくものとなり、とても面白かった。証明が出来なかったいくつかの事項が残っているので、今後時間を見つけて考えていきたい。

発表者２の感想：この授業をうけて、たった1つの問題にひと工夫加えるだけでまた新たな問題を次々と生み出していくことができるということを知りました。1つの問題でもさまざまな解き方があること、それを考え出してみること、よくある誤答とは何か、などの視点からも考えると、問題の奥深さはどんどん広がっていきます。類題を作ることも意外と難しく、ただ数字を変えただけでは成り立たない場合もあることを実感しました。問題を発展させて考えていくうちに、新たな疑問がわいてきたり新たな発見ができて楽しかったです。今回私が取り組んだ課題では、1つ1つ地道に考えるという作業を優先したのですが、私が思いつかなかったような考え方や解き方がほかにもあったかもしれません。考えすぎたゆえにややこしくなったり、意外と簡単なことを見逃していたこともあったと思います。問題における法則性ももっと驚くようなものがあったかもしれません。考えだしたらキリがないのが楽しいところだと感じました。数学の問題にふれるにあたり、これからはむやみやたらにその問題の答えを出すだけというような受験対策のような学習ではなく、自主的な学ぶ姿勢を大切にしようと思いました。この授業では、自分の選んだ問題について様々な視点から考えを深めることができてよかったです。

考察：この受講生の場合は、問題の一般化の方法と、解決手法の一般化を経験している。また、数学をするということは、ただ与えられた問題を解くだけではなく新たな疑問を元に新たな問題を作り、解決し、吟味する事の繰り返しであることにも気づいている。ただし、142857, 285714 と出たところで、1/7 , 2/7 の循環節であることとの関連まで考察できなかったことは残念である。

発表例３

右図のように，半径１の円 O の円周上に点 A, B, C, D をとり，AC と BD の交点を E とする。このとき次の問いに答えなさい。ただし，線分 BD は円 O の直径とする。
(1) ∠CDE の大きさを求めなさい。
(2) 線分 AB の長さを求めなさい。
(3) △ABE と△DCE の面積の比を，もっとも簡単な整数で表わしなさい。



(2009 東京電機大学高校)

１回目発表： 次のように解いた。

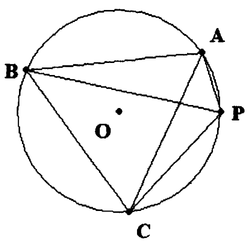
(1) ∠CDE=30°　(2) AB=$\sqrt{2}$　(3) △ABE：△DCE＝2：3

発表後の考察から、上のような図形で、45°、105°のどちらか或いは両方を固定せずに考えるとどうなるか、という意見が出たので、次回までの課題として、

① ∠CDE を変化させると状況はどのように変わるか。
を与えた。

2回目発表：①-1　点 A を固定した場合 ∠CDE＝θ とすると
△ABE：△DCE＝1：1－sin 2θ
①-2　点 C を固定した場合 ∠CDE＝θ とすると
△ABE：△DCE＝2+cos2θ －$\sqrt{3}$ sin 2θ ：3
①-3　2 点 A, C が動く場合 ∠CED＝θ_1，∠DCE＝θ_2 とすると，
△ABE：△DCE＝1+cos2θ_2：1+ cos 2(θ_1+θ_2)
と、一般化して答えていた。そこで、この結果をふまえて次の課題を与えた。
② 中学生にも解答可能な面白い類題を考える。

3回目発表：次の問題を作成してきた。



【問題】右の図は、1 辺の長さが 6 cm の正三角形 ABC と 3 つの頂点 A、B、C を通る円 O において、弧 AC 上の点 P と点 A、B、C をそれぞれ結んだものである。点 P を、点 B を含まない弧 AC 上で、点 A、C を除くいろいろな位置に動かすとき、次の 1～ 3 の問いに答えなさい。
(1)∠APB の大きさは何度か。
(2)線分 BP が円の中心 O を通るとき、その長さは何 cm か。
(3)点 P を∠CBP=15°　となる位置に動かした。線分 BP 上に BQ=CP となる点 Q をとり、点 Q と点 A を結ぶ。このとき、AQ=AP であることを証明せよ。

発表者 1 の感想：この解析学演習で数学の難しさを再確認した。今回取り上げたのは高校の受験問題であるが、その辺や角を変数に置き換えると、非常に難しい問題になり、複雑な計算が必要になった。円周角の問題では角度を変数にすると、sin や cos の値がうまくでてこず、とても複雑な問題になった。高校入試は答えが導きやすいような値が与えられているのでとても解きやすいが、その問題を発展させることによっていろいろな側面を持つた問題ができとても面白かつた。

発表者 2 の感想：最初は、答えのない問題を解くのは嫌だったけれど、与えられた値を変数にして、いろいろ調べてみると規則性が分かってきた。図形の問題では、いろいろな角度を変化させて△ABEと△DCEの面積比を求めた。角度を変数にしても、点A、B、C、Dは円周上の点だったので線分AB、線分DCの長さを求め、面積比を求めることができた。今回の授業では、先生が課題を与えてくれが、これからは、自分で課題を見つけて解決できるようにすることが大切だと思った。

考察：発表者 1 は、入試の問題というのが変数を 2 つ持つ一般的な問題の特殊なケースであることに気づいている。そこでは、中学校レベルの問題であっても三角関

数の知識がないと理解できないことも分かっている。発表者２は、答えのある問題以外にも問題があること、そしてそれは自分達が見つけて自由に設定してもいい事に気づいている。

発表例４

３つのさいころ A, B, C を同時に投げたとき，次の問いに答えなさい。
(1) 出た目の積が 1, 4, 9, 16, 25, 36 になる場合は全部で□□通りになります。
(2) 最大の目が５で最小の目が２になる確率は□／□□ になります。
(2009 東海大付浦安高)

1回目発表： 次のように解いた。
(1) 31 通り　(2) 9/32
発表後の考察で、サイコロ２つの場合は表にすると理解しやすいという意見が出たので、サイコロ３つの場合は立体模型で表現できることに気づき、次回までの課題を
① 他の考えられる解答方法と立体模型
② ３つの目の積が a になる確率が最大になる a を求める。
を与えた。

2回目発表：① 縦・横・高さが６である立方体の中で、(2)の条件を満たす小立方体の個数を数え上げて解答を出した。
② 12, 24 がそれぞれ 15 通りで最多。方法は、すべての場合 216 通りを調べて求めた。
発表後の考察で、12, 24 と３つの目の積の期待値の関係を知りたいということで、次回までの課題は次のようになった。
③ ３つの目の積の期待値を求めよ。
④ ４（または５）個のサイコロを投げる時、出る目の積が a になる確率が最大になる a を求める。

3回目発表：③ 期待値は、343/8 で、これは $7^3/2^3$ になっている。n 個のサイコロを投げるときは、$7^n/2^n$ になる。
④ ４個の場合は 60, 72, 120、５個の場合は 360 と予想。
レポートの課題として
⑤ ５個の場合は、360 と確かめることができるか。
を与えた。

レポート：レポートでは、４個の場合の方法としてすべて数え上げるのではなくも

っと効率的に数える独自の方法を見つけた。それを５個の場合に応用しようとして、うまく行かない事の理由付けも行なっている。
また、３個の場合は、２と３の公倍数、４個の場合は２，３，５の公倍数であることの理由を見つけようとしていた。

発表者の感想：これまで小学校から高校の間はもちろん、大学に入ってからも算数・数学といえば与えられた問題を解くというものであり、そういうものでしか自分の中ではなかったので、その問題はどのようにして作られたのか、こうしたらどのようになっていくだろうか等の視点で考えていくこの授業のスタイルはとても新鮮で数学というものの深さを実感したし、更に興味を持つようになりました。他の人の発表から学ぶことも多くありました。そして自分のことでいえば、僕は確率と数列の分野が得意でかつとても好きな分野ということで今回確率の問題を選んでみて、実際にかなり深いところまで調べていきましたが、後半のほうになると正確な答えや方法がどうしても見つからないといったことが多々でてきました。今回初めて、どれだけ考えても求めたいことや証明したいことが出し切れないということを体験し、本当の数学というのはこのように答えがすぐに導けるものではないんだなということを学びました。

考察：発表者は独自の疑問を持ち、それを数学的に設定する方法を学んでいる。また、問題ができたからといって、それがすぐに解けるものではない、解は誰かが見つけておいてくれるものではなく、自分で見つけ出さなければならないことに気づいている。

発表例５

１辺の長さが 4cm の立方体 ABCD-EFGH において、辺 AE の中点を M、対角線 FH の中点を N とする。このとき次の問いに答えよ。
(1) $MN \perp NC$ であることを証明せよ。
(2) $\angle MCN = \angle GCN$ であることを証明せよ。
(3) $MN \perp$ 平面 CFH であることを証明せよ。
(4) $\triangle CFH$ のうち、CM を直径とする球の内部にある部分の面積を求めよ。
(2009 灘高校)

１回目発表：(1)—(4)を解答した。
発表後の考察で、(4) の円との共通部分は、球との共通部分というように次元を１つ上げられる、という意見があり、次回までのとして、

①「面積」を、「四角錐 MFCH のうち、CM を直径とする球の内部にある部

分の体積を求めよ。」に変えて解け。

を与えた。

2回目発表：① を解くカギとして、「パップス・ギュルタンの定理」を調べてきて発表。

しかし、発表後の考察で、この問題 ① の場合パップス・ギュルタンの定理は適用できないことが判明した。そこで、次回までの課題として

② 区分求積法で解いてみる。

③ パップス・ギュルタンの定理の証明をする。

を与えた。

3回目発表：② は途中まではできたが、もう1歩で止まっている。③ の定理の証明もきちんとはできていなかった。

考察：自ら進んでいろいろ調べるという自主性を発揮している。もう1歩のところから進む事の困難さを体験している。

他の受講生の感想一覧

感想 A：高校の数学で、いろいろな公式を学んでから中学生の問題を解こうとすると、公式にあてはめて解こうとしすぎてほかの解き方ができなかったというのが一番感じたことでした。追加の問題で図形的になかなか解けなかったのがその最たる例で、点と直線の距離を求める公式を知っているとそればかり使おうとして、相似になる図形を見つけられませんでした。このレポートにまとめてみると、相似を使って解いた方がより単純にまとめられていたので、一つの解き方にこだわらず、柔軟に考えることが大事だと思いました。

感想 B：今まで、問題は解くだけ解いて答え合わせしてまた次の問題、というように問題を追及するということがなかったし、なんでこの答えがでるのか、ということも考えたこともなかった。しかし、この授業でたった1この問題で深く考えることができて、こういう考え方があるのか、とか、問題を作る側は深いところまで考えてこの数字をだされたんだ、などいろいろ学ぶことがあり、とてもおもしろかった。

感想C：この授業を通して、中学生が解く問題でもすこし値や設定を変えるだけで、難しい問題となることを知れてよかったと思う。また、問題を出題する側の意図についても考えることがすこしできたので、問題を出題する側になったとき(先生)に役に立ついい経験をしたのではないかと思った。

感想D：このような図形に名前がついていたことも初耳であったし、またその仲間ともいうべき図形がたくさんあり、かなり興味をそそられる分野であると思った。しかしながら本当に理解するのも大変であるし、何よりこれが何かの役に立っているのかという疑問がかなりあった。確かにサッカーボールの形の原型がわかったりしておもしろいのだが、だから何？といわれてしまうような分野ではないのだろうか？ただ最後に一つ、一様多面体は複雑であるが、正多角形からできているのでめちゃくちゃに美しいものであると感じた。

感想 E：サイコロは難しいなと思った。最大になる値を求めるところから少し苦戦していたのだが、場合の数の規則性なんてぼくにはお手上げの状態だった。いろんな人の助けを借りてこのレポートを完成させることができてよかったと思う。これからもお互いに助け合ってがんばっていきたい。最後にもう１度言っておこう。サイコロは難しい。

感想 F：今回この問題を解いてみて、内容自体は高校の範囲で解けるものでしたが計算がややこしくかなり苦労しました。軌跡を求める問題でも、他にもっと計算の簡単なやり方があったかもしれないと思いました。

$\boxed{\text{まとめ}}$　高校入試問題を利用して代数、幾何、解析、確率などといろいろな分野の問題に各受講生は主体的に取り組んでいた。それぞれ手法も異なるので、全員が同じような数学研究のスタイルを体験することはできなかった。しかし、感想にもあるように中学校数学の問題でも見方を変えれば高校あるいは大学数学の問題になることは実感したことと思う。自分たちの今学んでいる微分積分学や線形代数学がそのような形で将来教えるであろう中学校数学に寄り添っていることが伝われば、あとは主体的に自らが学んだ数学をフルに活用して教材研究を進めてもらえるものと期待する。

§2. 正多角形の作図に関する教材研究の指導について III

by 青山陽一 - 中馬悟朗

[1, §2] において，定木とコンパスによる作図(ユークリッド作図と言う事にする)に関することが教材研究の良い材料であることを述べ，その数学的内容について記した．それをうけ，[2, §2] においては，不完全であるが，学生への実際の指導に関して述べた．2010年度も学生にユークリッド原論を読ませることを行ったので，それに関連することを小節2.1に記すことにしたい.（記録ではない.） 小節2.2では，他の事例からのことも踏まえ，気掛かりなことについて触れることにした．この様なことは§0で述べるべきかも知れないが，内容的関連からここで触れることにした．最後の小節2.3では，ユークリッド作図不可能な角の三等分について，別の手段を用いる作図に関して述べることにした．

2.1 ユークリッド原論，ユークリッド幾何，ヒルベルト幾何学の基礎

近頃は‘ユークリッド’という名あるいは語を知らない学生がかなり居るようである．高校まで習ってきた幾何がユークリッド幾何学と呼ばれる分野のものでユークリッド原論に源を持つことや幾何学の歴史などについて，数学教師になろうとする者は知ろうとして欲しいものである．

ユークリッド原論の日本語版としては[3]があり，最近[4]が出版され始めた．[3]には，原論のBook.I–Book.XIIIが収められている．[4]はその題名の通りユークリッドの全集を刊行することを目的として，原論Book.I–Book.XV・デドメナ・オプティカ[A]・オプティカ[B]・カトプトリカ・ファイノメナ・カノーンの分割・ハルモニア論入門 が収められることになっている．ここで必要とするのは，原論Book.I–Book.VIである．[4]では第1巻に収められており，都合がよい．ユークリッド原論と言うと幾何学というイメージが強いが，Book.I–Book.VI・Book.XI–Book.XIIIが幾何学であり，Book.VII–Book.IXは数論，Book.Xは無理量論である．[4]には適宜解説や脚注があり，証明の部分にはどの命題等が使われたかが記されている．学生に読ませるテキストとしては[3]を選ぶ．事前に原論の概略と関連する事柄を説明する．初等幾何に対する各人のイメージは様々であろうが，ここでは定義・公準・公理から構成していく論理体系を重視する立場を取ることが肝要であることを告げる．また，平行線公準と非ユークリッド幾何学の発見や原論では暗黙の了解とされている仮定事項とヒルベルトによるユークリッド幾何学の基礎付けなどには特に意を用いる．Book.Iの命題は正三角形の作図（勿論ユークリッド作図）に始まり，Book.IVにおいて正五角形が作図され，正n角形 ($n = 3, 4, 5, 6, 15$) と円との内接外接が論じられ，Book.IVが終わる．それからBook.VとBook.VIで相似について扱われる．従って，Book.III（円に関する事柄が扱われる）に在る方羃の定理は相似を使って証明されるのではない．作図されている正p角形（p奇素数）は，正三角形と正五角形だけであり，ガウスによって初めて正17角形の作図がなされた．ガロワ理論により，正p角形が作図できる奇素数pはフェルマー素数に限ること，角の三等分が作図可能とは限らないことが解明された．これらのことは是非述べておきたいと思う．

（自分で準備等の勉強をするときは自分の知識を総動員して行い,）発表のときはテキストに従う事．命題の主張は全文を正確に板書する事．作図については，実際に遣って

見せる事．原論では省略されている部分もきちんと補う事．証明においてどの既知事項等が使われているかを指摘する事．これらを要請して，実際に取り掛かる．

定義・公準(要請)・公理(共通概念)については確認する．そして命題へと進めて行く．命題を忠実に板書し，かっちりと証明をする．作図するときは，板書用定木とコンパスで実際に作図する．以下これの繰り返し．勉強するには根気が必要．遣り通すことが出来るかも重要な課題である．

ここからは，実施したことを種に原論 Book.I の命題から幾つかをトピック的に述べることにする．(既に断わったように記録ではない.)

命題 1：正三角形の作図である．然るべき時に２つの円は共有点を持つ に関する話はまだ触れなくてよいだろう．

命題 2：この証明を読むことにより，第３公準の意味するところが明確になることを注意しよう．数学書は論理的順序に従い書かれているから順に読んでいくものだ などは真でないことを認識させよう．よく判らなければそのことを認識して先に進めばよく，行きつ戻りつしながら徐々に理解できるものなのだということを，知らない者には悟らせよう．

命題 4：２辺挟角合同定理である．この証明については色々議論がなされて来たこと，ヒルベルトの基礎付では公理とされていることを述べよう．

命題 5：二等辺三角形の底角は等しいであるが，その証明は結構複雑である．何故この様な証明が与えられているのかについて，一緒に同等の立場で議論しよう．また，議論になる発言をしよう．このプログラムにおける教員の仕事は，学生が準備をしてきたかどうかを推定することであり，学生に講義をする事ではないのである．

命題 13：原論における角の捉え方に充分注意する必要があることを注意しよう．

命題 16：証明に，非ユークリッド幾何学の一つを排除する仮定が使われていることを注意するかどうか．ここでもよいし，命題 27 のところでもよいだろう．

命題 20：「三角形の２辺の和は他の１辺より大きい.」という命題であるが,「こんなことは蟻でも知っている.」とか言われて，‘学校で習う数学が何の役に立つのか’ でよく引合いに出されるものである．[4, 第１巻 I.20 解説] にも記されている．そこには「実はこの種の議論は古代にすでにあった．エピクロス派は，こんなことはロバでも分かると嘲笑したとプロクロスは伝えている.」の文がある．この様なことも取上げよう．そして議論するのもよいかも知れない．日本では‘蟻’が使われるが，所によっては‘驢馬’が使われる とかも話題になる．

命題 22：「与えられた３線分に等しい３線分から三角形をつくること．ただし．．．」であるが，留意すべきは‘蟻でも知っている’或いは‘驢馬でも分かる’ことが如何に用いられるかをきちんと述べささないといけないところである．

命題 26：「２つの三角形において，対応する２角が各々等しく，対応する１辺が等しいならば，２つの三角形は合同である.」という命題であるが，ここで注意させることは “$\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y, AC = XZ \Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle XYZ$” が，“三角形の内角の和は２直角に等しい (⇔ 平行線公準)” より前に証明されていることである．

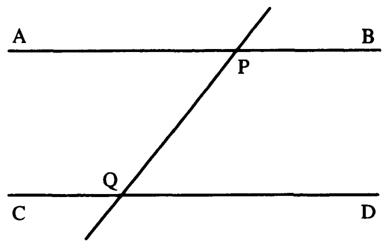
命題 27：「錯角が等しければ平行である.」であるが，平行線公準は使われていないことに注意し，平行線の存在が命題 23 と併せることにより示されることに注意させよう．

従って，非ユークリッド幾何学の一つが除外されていることになる．それは，この命題の証明には命題 16 が用いられており，命題 16 の証明に非ユークリッド幾何学の一つを排除する仮定が使われていることを注意しよう．しかもその仮定, 公理(共通概念)9, は後世の挿入であるらしく，ユークリッドが意識していたかは大いに疑問のあるところであるなども．([4, 第 1 巻 I.27 解説,I.16 解説] より）

命題 29：命題 27,28 の逆である．ここで初めて平行線公準が用いられることに注意せよと告げる．証明は背理法による．そこで，これに関連して，生徒を指導する際に留意する必要があろうことについて述べる．

「背理法とは，結論を否定してみて仮定に矛盾することを導き出して，結論を否定したことが間違いであることから結論が正しいことを示す証明方法である.」と詳しく説明する． 例として，

平行ならば錯角は等しい．
即ち，右図において，
$AB /\!/ CD \Longrightarrow \angle APQ = \angle DQP$.



の証明を

背理法によって証明する．
もし $\angle APQ \neq \angle DQP$ と仮定すると，どちらかが大きい．
今 $\angle DQP$ が大きいとする．
・・・（省略）・・・
それ故，公準(要請)5 により AB と CD は交わることとなり，
$AB /\!/ CD$ に矛盾する．　従って，背理法により命題は証明された．

というように記述する訳である．これを

背理法によって証明する．もし $\angle APQ \neq \angle DQP$ と仮定すると，
背理法により $AB /\!/ CD$ に矛盾するから $\angle APQ = \angle DQP$ である．

という風に書いて済ます者を出さないように．例としての証明の書き方にも留意するように．　(笑い話みたいだが，それで済ます訳にもいかないのである.)

命題 32：三角形の内角の和は２直角である が証明される．それには平行線公準が必要であることを明確に認識させよう．この命題が平行線公準と同値であることは，平行線公準についての議論からのものであり，原論にはそういう感覚は窺えないことなども．

命題 35：「等しい底辺の上にあり同じ平行線の間にある平行四辺形は互いに等しい.」という命題であるが，この “等しい” が面積のことらしい，でも扱い方は分割合同の考え方のようだ，が伝わるようにしよう．デーンの結果について触れるのも良いだろう．

概ね以上のような調子でプログラムを実行しつつ，我々が目指す教材研究の遣り方を伝えることが出来ればと願っている．(あとチョットでピタゴラスの定理まで行けたのに．．．． 進むことを優先しない．自分で遣り続けられる力をつけること.)

2.2 方程式論とユークリッド作図

小節の題に関する内容は [1, 2.5] を見て頂くことにして，ここでは学生指導等の経験から気になったことについて，注意しておきたいと思ったことを記すことにした．

$f(x) = ax^n +$ (terms of lower degrees) を n 次多項式 ($n > 0$) とする．(係数は 高校までは実数を主に扱うことになっている．) 方程式 $f(x) = 0$ の解とは，$f(\alpha) = 0$ となる α のことである．解 α の重複度とは，$(x-\alpha)^e \mid f(x)$, $(x-\alpha)^{e+1} \nmid f(x)$ なる自然数 e のことである．方程式を解くとは，解(with 重複度)を全て求めることである．方法は問わない．解がどこにどれだけ在るのかに答えるのが，代数学の基本定理である．この基本事項を正確に把握させておく必要性を強く感じさせる事例等があった．

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は，$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である．このことを，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ と表すのが普通採られている方式である．ここで明確に認識させておかなければならないことは，

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解とは $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ のこと，ではない

ということである．

また，「$b^2 - 4ac$ を判別式と言い，解が実数か否かを判定するのに用いる．」という風に高校では習うが，方程式 $f(x) = 0$ の判別式は (解の差積)$^2 \times a^{2n-2}$ 或いは (解の差積)^2 として定義され，重解の有無が $= 0, \neq 0$ で判るのであり，実数係数 2 次方程式の場合には正 0 負により 異なる 2 実数解・実数の重解・異なる 2 虚数解 の判別に使えるのだということを認識させよう．(ここではこの位でよいだろう．何故二乗するのかとの質問が出れば有難い．)

係数を与えれば，方程式の解は定まる．従って，係数の関数(多価)である．では，どのような関数なのか 或いは 如何なる手続きで解が得られるのであろうか．

1 次方程式 $ax + b = 0$ の解は，$x = -\dfrac{b}{a}$ である．(1 次方程式の解の公式)

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である．

(2 次方程式の解の公式)

3 次方程式と 4 次方程式についても，同様の公式 (係数から 加減乗除と冪根をとる操作で 解が得られる一定の手続き) が存在することが知られている．そして「5 次以上の方程式には解の公式が存在しない」と言われるが，それは「係数から加減乗除と冪根をとる操作で解を得ることが出来ない 5 次方程式が存在する」ことを意味していることを明確に認識させておこう．「5 次以上の方程式には解が存在しないものが在る」ではなく．「係数から加減乗除と冪根をとる操作で解が得られる方程式はどのようなものか」に答を与えたのがガロワである．その結果の一部として，ユークリッド作図の可能性についての定理が得られる訳である．(ここらあたりの歴史は興味深く，それを知ることは有意義と思われる故，数学教師は概略を素養として持っていることが望ましいだろう．)

2.3 角の三等分に関して

この小節では，定木とコンパスに加え 標識定木 or 直角定木 or 折り紙 を用いた角の三等分について述べることにする．角の三等分が作図出来れば，3 次方程式,4 次方程式の解を作図することが可能になり，正七角形も作図可能になるが，これらについては割愛させていただく．

標識定木

標識定木とは何か，[7, II 30(p.23–)] に依拠して述べる．定木に，与えられた線分に等しくなるように線分 AB を取ることが出来る．そして定木を滑らせて，点 A が与えられた直線上に，点 B がもう一つの与えられた直線上に在り，さらに定木が与えられた点を通るように出来る．(然るべき時に)

標識定木を用いて $\angle XOZ$ の三等分線 OA を作図しよう．(図 2.1)

半直線 OZ 上に点 P ($P \neq O$) を取る．P を通り OX に平行な直線 PQ と垂直な直線 PR を引く．標識定木上に線分 OP の 2 倍に等しくなるように線分 AB を取る．A が PQ 上に在り，B が PR 上に在り，標識定木が O を通るようにする．このとき，OA は $\angle XOZ$ の三等分線である．AB の中点と P を結んで考えてみると，証明を与えることが出来るだろう．

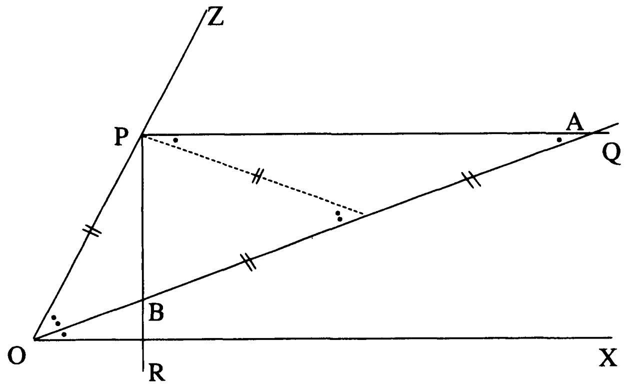


図 2.1: 標識定木による角の三等分 (鋭角)

図 2.1 は鋭角の場合であるが，鈍角の場合の図も見てみよう．(図 2.2)
上と同様に作図してみる．今度は 2 本の直線が引ける．どちらが三等分線であろうか．
実は，上記の作図により常に 4 本(重複を込めて)の直線が引けるのである．
図 2.2 において太線と細線を用いて示してあるが，その意図する処は理解して頂けると思う．

学生には，以上の事をきっちりと分析させる必要がある．旨く座標を入れて，方程式を立ててそれを解き，．．． そして，もし可能ならば，実際の授業で遣らせてみよう．但し，座標は使わずに三等分線を見出す方法を，自分で探させ知識として持たせておかないと効果はかなり減少してしまう．また，先立つ授業で何となく角の三等分がユークリッド作図可能ではないことを匂わせることをさせておこう．

コンピューターソフトウェアの中には図 2.2 の太線部分だけを表示して動かして見せるものがあることを注意しておく．

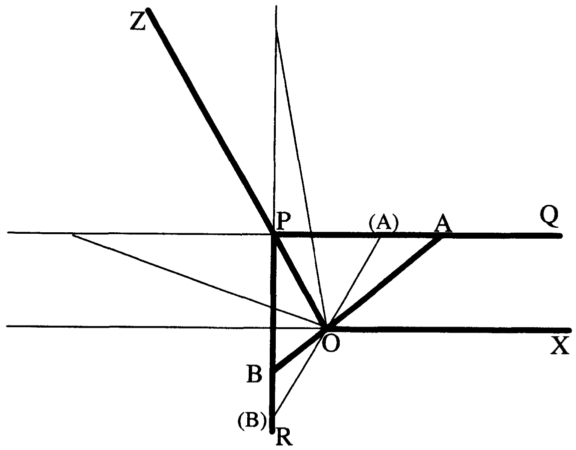


図 2.2: 標識定木による角の三等分 (鈍角)

直角定木

直角定木とはどういうもので，それによる角の三等分は如何になされるかについては，図 2.3 で了解して頂けるであろうから，詳しい説明は省略させて貰いたい．

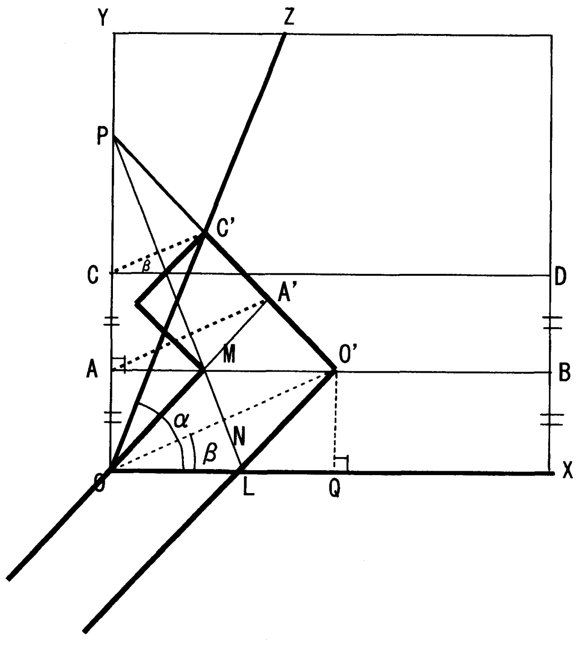


図 2.3: 直角定木による角の三等分

$\angle$XOZ の三等分線 OO′, OA′ を作図している．必要なものは，$\angle$XOZ，直角定木の本質部分である線分 O′C′ とその中点 A′，半直線 A′O with O′C′$\perp$A′O（直角定木の長い部分の一辺が O を通るようにすることを含意)，作図の補助直線 AB である．ここに，OA$\perp$OX, OA $=$ O′A′, AB//OX で，O′ は AB 上に，C′ は OZ 上に置く．他の部分に惑わされないように．折り紙の図 2.5 に直角定木を書き加えたのでこうなっている．

で，学生に何をさせるかであるが．ここでは直角定木の設計をユークリッド作図で行い，実際に直角定木を作成させてみよう．さらには，図 2.3 において直線 AB を引く必要のない半円付直角定木をユークリッド作図で設計させ (cf. 図 2.4，必要不可欠な円の部分は何処かも)，作成させてみよう．また，鈍角の場合もやらせておこう．そして，もし可能ならば，実際の授業で使わせてみよう．但し，その前に何となく角の三等分がユークリッド作図可能ではないことを匂わせる授業をさせておこう．

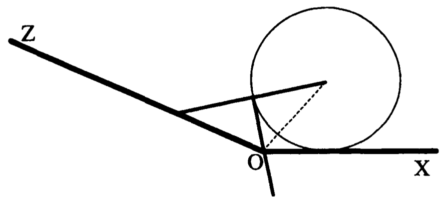


図 2.4: 半円付直角定木のイメージ

折り紙

図 2.5 において $\angle$XOZ の三等分線 OO′, OA′ を求める．

手順：(1) 直線 OX に平行で等間隔な直線 AB, CD を折る．

(2) 点 O が直線 AB 上に，点 C が直線 OZ 上に来るように折り曲げる．

(3) 点 O の写る先を O′，点 A の写る先を A′ とする．

確かめ は，直角定木の図 2.3 を参考にすれば推察できるだろう．

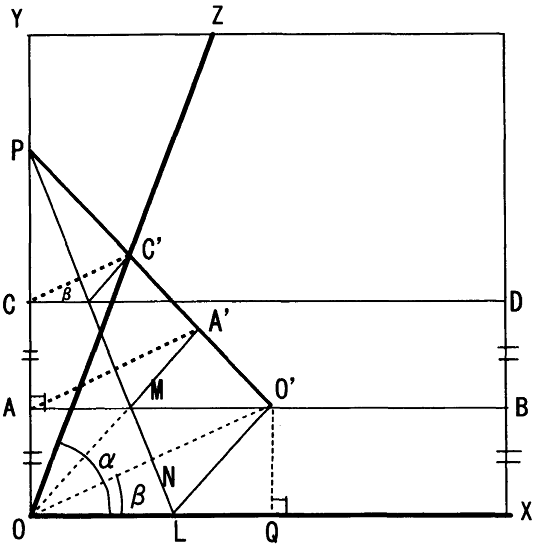


図 2.5: 折り紙による角の三等分

実際に学生に行わせ，証明をさせよう．そして，もし可能ならば，実際の授業で遣らせてみよう．但し，その前に何となく角の三等分がユークリッド作図可能ではないことを匂わせる授業をさせておこう．

折り紙を用いた授業は，作業を行い確かめることが出来るなど，有意義なものと思うが，教師が確りとした知識を持っていないと単に生徒に手を動かさせただけになってしまう．かっちりとした教材研究が欠かせない．この辺りのことは，[10] に任せることとしよう．

[**References**]

[1] RIMS 共同研究 数学教師に必要な数学能力形成に関する研究，数理解析研究所講究録 1657，京都大学数理解析研究所，2009 July．p.105 – p.127
６．教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法（Team 2 プロジェクト）．

[2] RIMS 共同研究 数学教師に必要な数学能力に関する研究，数理解析研究所講究録 1711，京都大学数理解析研究所，2010 September．p.130 – p.155
６．教科専門科目の内容を活用する教材研究の指導方法 II（Team 2 プロジェクト）．

[3] ユークリッド原論（訳・解説　中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵），共立出版，1971 July（縮刷版 1996 June）．

[4] エウクレイデス全集 (全 5 巻)，東京大学出版会，2008 January, 未刊, 未刊, 2010 May, 未刊.

[5] D. Hilbert（寺坂英孝・大西正男 訳），幾何学の基礎，共立出版 現代数学の系譜 第1期 7，1970 July.

[6] D. Hilbert（中村幸四郎 訳），幾何学基礎論，ちくま学芸文庫 ヒ–8–1，2005 December.

[7] R. Hartshorne（難波誠 訳），幾何学 I,II — 現代数学から見たユークリッド原論，シュプリンガー・ジャパン，2007 October, 2008 February.

[8] 小林昭七，ユークリッド幾何から現代幾何へ，日本評論社 日評数学選書，1990 October.

[9] 砂田利一，現代幾何学への道 — ユークリッドの蒔いた種，岩波書店 シリーズ「数学, この大きな流れ」，2010 April.

[10] 中馬悟朗，折り紙を用いた教材研究について (仮題)，in preparation.