数理解析研究所講究録
第1831巻 2013年 53-56

『大成算経』における消去法：解伏題之法及び算法発揮との比較

Method of elimination in *Taisei-Sankei* compared with *Kaifukudai-no-hō* and *Sanpō-Hakki*

松本 堯生 (Matumoto, Takao)
広島大学名誉教授
Professor Emeritus, Hiroshima University

1 序

大成算経における消去法として、まず十七巻伏題篇を取り上げるのは自然である。十七巻伏題篇と解伏題之法との比較は既に多くの方がご存知のことと思われるが敢えて取り上げることとする。算法発揮との比較も同様である。十九巻の伏題例六問も当然取り上げるが、他に伏題で演段も付いているものを探すと、十巻の六斜法が注目される。三巻の適尽方級相乗法つまり判別式の所でも当然消去法を用いていると考えられるが明示的でないのでここでは扱わない。

筆者が使用し易いテキストという理由から、大成算経は京都大学数学教室蔵のもの及び関算四伝書のもの、解伏題之法は関全集のものを主として使用する。算法発揮は刊本で版による数学的内容の差はなく、岩知道秀樹氏による現代語訳 [1] が「和算の館」で公開されており、千々和智大氏と私による英訳もある。この英訳はいずれ何らかの形で公開したいと考えている。

消去法というともっと広いものを指すと考えられるが、解伏題之法と比較できる部分に限らせていただいた。潜淵子（＝有馬）著「開法要旨」[7] は上巻が開方飜変法、中巻が解伏題之法、下巻が伏題要訣となっており、コメントする意味があるように思われる。とくに中巻は虚術第一・両式第二・畳乗第三・定乗第四・換式第五・生尅第六・寄消第七となっており、大成算経十七巻を引用するとともに、算法発揮第七問についても解説している。生尅第六で換五式の行列式を解伏題之法の方法つまり交式斜乗の方法で具体的に書こうとしていろいろ間違っているのはどうしたことであろうか。

2 十七巻伏題篇と解伏題之法の比較（換式第四と交乗第五は別記）

この章は二つの書の内容の細かい差を明らかにして、その関係を考察する材料とするための章である。

十七巻伏題篇は虚術・両式・定乗・換式・交乗・寄消からなってるが、解伏題之法（以下では解伏題と略記）の方は真虚・両式・定乗・換式・生尅・寄消からなっている。

虚術第一には単伏・衆伏の副題がついており、単伏二問と衆伏二問がある。

単伏の第一問は真虚第一の第一問と同じ問題で、真術の天元は勾、虚術の天元は勾開方数である。虚術では平方消長法で解方程式が求まる勾開方数の２次式が具体的に与えられている。解伏題ではこの最後の式の明示は省略されているが、虚術に「初」が肩書きされ、只云数・股・勾に関する式つまり上の２次式が前式、勾＝天元の平方が後式とされている。

単伏の第二問は、解伏題の両式第二の本文にある例であり、同じことではあるが、大成算経は真術で上方を求むとし虚術で天元を高に定め二式を導いているのに対し、解伏題では真術で上方を得るとし虚術で高を見るとして前術で前式そして後術で後式を得ている。注目すべきは、問題文では只云数として上下方と高の和が与えられているのに解法では下方と高の和しか使われていない。つまり、問題文の「上」が余分というか間違いらしいのだが、それが共通して残っているということである。これはいくつかの写本に当たったが、その範囲では共通していた。

衆伏の第一問は真虚第一の第二問である。本文は初虚術・次虚術の順に書かれているが、次虚術では中斜有として小斜を消去するための二式を具体的に記述し、初虚術の天元は中斜としているので、現代流に言えば次・初の順に解くことになる。ちなみに解伏題では二・初の順に書かれているが初・二の順に解くことになる。

衆伏の第二問は真虚第一の第三問つまり最終問に似ているが、問題自身は異なる。第一問と同様に初虚術・次虚術の順に書かれ、次虚術では三式を具体的に記述しているが、現代流に言えば次虚術を二段構えで解きそして初の順に解くことになると思われる。解伏題では三・二・初の順に書かれ、明治前日本数学史 [5] 第二巻 200 ページに解説があるように初・二・三の順に解くことになる。

両式第二には大成算経独特の説明の後、上の続きと考えられる始中終の三式から一番簡単な式と他の二つのそれぞれを組み合わせて前後式二組を得る二例が示されている。解伏題にこれはない。

両式第二の附である「略（次数の高い式を次数の低い×変数等を加減して簡単にすること）」「省（式を共通文字で割ること）」「約（式を共通数で割ること）」「縮（空級がある場合に変数を変数の平方等に変える）」は略が解伏題より複雑なこと、縮に例が一つ加わっていることを除けば、例も込めて大差ない。

定乗第三の本文は真術の式の次数を前後式の係数の真術の天元に関する次数から決定しようとするものだが、最初の例は大成算経と解伏題は全く同じである。二つ目の例は解伏題に比べると後式をひとつ増やし二組としたものであり、残りは解伏題とほぼ同じである。藤原松三郎 [4] の指摘のように田中由真の「雙式異乗之陰陽率並求根源術」の議論は正しいが、ここに記載された方法は不充分である。また、筆者はこの部分の次数に誤記があるように思うが、大成算経も訂正していない。

定乗第三の附である「畳（前式×後式係数 − 前式係数×後式等）」「括（括弧の代わりに文字で置換）」「分」「合（分の逆）」に関して、分と合は解伏題にない。分は勾股和を勾＋股等とすることであり、畳と括の例はいろいろ変わっているが、解伏題と大差はない。ただ、文字（子丑寅卯）の順序が降巾と昇巾と異なっているのは不思議である。

寄消第六にも第五の違いがそのまま現れているが、例は三つで少し複雑だが解伏題の例二つと大差はない。

寄消第六で注目すべきは、解伏題では寄消第六の本文の最後に「各起末虚術、而求到寄消、亦起次前虚術、而求到寄消、次第如此、而得真術也」とあり、大成算経では寄消第六の説明の最後に「各起前虚術而求到寄消起次前虚術遂求到寄消遂如此而施真術也」とある点である。つまり、解伏題では「末虚術＝＞次前虚術＝＞真術」であり、大成算経では「前虚術＝＞次前虚術＝＞真術」となっている。それにもかかわらず、後でも述べるが、十九巻最後の問では「末虚術＝＞中虚術＝＞初虚術＝＞真術」となっているのである。

3　伏題篇換式第四と交乗第五について

換式第四では、正負や数係数が単純でないものが例となっているが、単純化して現代流に書くと、前後式 $b+ax=0, d+cx=0$ に対し換一式 $bc-ad=0$ 、前後式 $c+bx+ax^2=0,\ f+ex+dx^2=0$ に対し換二式 $(cd-af)+(bd-ae)x=0, (ce-bf)+(cd-af)x=0$（両写本には符号に誤りあり）、前後式 $d+cx+bx^2+ax^3=0,\ h+gx+fx^2+ex^3=0$ に対し換三式 $(de-ah)+(ce-ag)x+(be-af)x^2=0,\ (df-bh)+(cf-bg+de-ah)x+(ce-ag)x^2=0,\ (dg-ch)+(df-bh)x+(de-ah)x^2=0$、空級ありの前後式 $c+bx+ax^2=0,\ g+fx^2+2x^3+dx^4=0$ に対し換四式が与えられている。

換式の与え方は換三式の場合 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ (前), $b_0+b_ax+b_2x^2+b_3x^3=0$ (後) に対し、まず最高次を消して (1) 式 $=$ (前) $\times b_3-a_3\times$ (後) を得る。次に最高 -1 次の項を消して (1) 式で加減つまり (前) $\times b_2-a_2\times$ (後) $+(1)x$ を計算すると、$(a_0b_2-a_2b_0)+(a_1b_2-a_2b_1+a_0b_3-a_3b_0)x+(a_1b_3-a_3b_1)x^2=0$ となり、これを (2) 式とする。以下同様に順に次に次数の低いところを消して前の換式で加減するとよく、1次の項のときには定数項を消すのと同じになる。算法発揮では定数項を消す方から始め、係数が一般の場合に上のような説明もあり、最後は最高次の項を消す方法で記述している。解伏題及び大成算経には具体的な係数に関する計算例しかないが、このような方法で得ていると考えられ、本質的には算法発揮の方法やベズーの方法 [3] と同じである。また、このようにして得られる係数行列は自然に特定の対称性を持つ。

面白いのは算法発揮と同じく前式の係数×後式を正とすると消し始める係数の次数が逆なので得られる換式の符号が算法発揮とは逆になるということである。実際、解伏題と算法発揮では換二式以上の符号が逆になっている。大成算経は前後式の係数の符号が複雑で換四式は解伏題の前後式が入れ替えられるなど判断が難しいが、算法発揮の換式とは並べる順序は逆であるが少なくとも換一式と換三式では符号が一致している。また、次に述べる交乗法でも算法発揮と同様に第1式と第2式以降を組み合わせて定数項を消すことから始めているとも考えられる。建部は当然「算法発揮」を所蔵していたと思われるので、「算法発揮」をどの程度意識して大成算経を書いたかは知りたいところである。

換式第四の附「芟（式または級の共通係数や文字を約す)」「治（式または級の数係数の公約数を約す)」に関しては、例も解伏題とほぼ同じであるが、縦芟・横芟及び縦治・横治の用語は大成算経のみにある。

交乗第五と解伏題の生尅第五とは同じく行列式について記述しているとはいうもの、行列式の与え方は全く違うと言ってよい。良く知られているように、大成算経のこの部分は解伏題ではなく算法発揮の方法に近いのである。

換二式の行列式を作る方法つまり平方交乗法は換一式に相当とか無交乗法とか説明もあるが、所謂維乗で三書とも右上から左下に行く斜乗が正である。解伏題の換一式とは符号が異なることも指摘しておく。算法発揮は第1式の定数項と余因子の積から始め以降も一貫している。大成算経も算法発揮と同じく帰納的に第1式の係数と余因子行列の行列式を掛けたものに正負をつけて和を取ったものと説明し説明図もあるが、結果の表は違う順序になっている。三乗方交乗法と四乗方交乗法は右下から左上に行く斜乗が初項で、立方交乗法の初項は正のものを選ぶため右斜乗でも左斜乗でもない。

いずれにしても大成算経の換三式以上の交乗法の説明図は符号を込めて算法発揮の捷法と同じであると考えられるのに、換四式以上の交乗法の項の順序は算法発揮が第1式の定数項から数え、大成算経は最高次数の係数から数え正のものから始めており大きく異なる。また、前後式に共通根がある場合にこの式が零であることについて、大成算経には何の説明もない。一方、変乗法は単に対称な行列のときに係数を代入して和を取っただけである。

消長法は関西でいう巾演式のことで、商の n 乗と商の $n-1$ 次方程式の係数の間の関係式を求めるものであり、この場合には大成算経でも式の導出が証明に近い形で与えられている。

ここで、算法発揮三巻の構成について注意をしておく。上巻では、はじめに一度に求めたいものの式を得られない場合に、前式と後式を作り、それから求めたいものの式を作る方法があると一言述べてから、前後平方式の場合から前後6次式の場合まで、換n式を作ってその係数行列を求め、このn次正方行列を陽率と呼び、その陽率の行列式つまり陰率を求めている。合わせると、前後式の終結式を求めていることになる。中巻では伏題七問の術が述べられ、下巻ではその演段が書かれている。注目すべきは、換二式のときに陰率が零であることの証明と、それを用いて換三式のときの陰率が零であることの証明がなされていることである。そして、換四式以上でも成り立つが証明は省略して行列式の作り方だけを

書くとなっている。この後者の方法を捷法と上で引用した。

大成算経の交乗第五には、換三式に続いて換四式の交乗法の説明と結果・変乗法の結果・消長法の理由づけが与えられ、さらに換五式の交乗法・変乗法・消長法の結果のみが8頁に渡って記載されている。消長法＝巾演式は関西でも良く研究されている（例えば [4] 参照）が、算法発揮には立方巾演式までしか表だっては書かれていないので、消長法だけ説明したのかなとも思える。

4　伏題例の比較など

まず、虚術第一の第一問は平方巾式、第二問は3次と2次、第三問は衆伏で次虚術が立方巾式で初虚術は次数が明示されていない。第四問は次虚術が2次と4次と4次で、初虚術は次数が明示されていない。

十巻斜法第四は第六問四斜法、第七問五斜法、第八問六斜法と次々と前問の解法を使って解いている。六斜法の最後では前式が2次で後式が4次の終結式を扱っており、三乗方（換四式）変乗法を用いると宣言している。変乗法が引用される最初の箇所であり、十巻を書く時点で十七巻の内容がある程度できていたことを想像させる。

十九巻伏題例六問に対しては藤井康生氏のノートがある。第一問から第三問は単伏であり、平方消長法、立方消長法、前後2次式が使われている。第四問は末虚術が平方消長法、初虚術が立方消長法である。第五問は末虚術は2次式二つと1次式の三式からなり、これを畳んで1次式の二組を得、初虚術では前後4次式を得て三乗方交乗法を用いている。実際に与えられている係数行列は対称でない。第六問は末虚術が始中終の三式からなり、中虚術は二組の始終前後式からなり、初虚術では5次の前後式となり、四乗方変乗法が用いられている。

ちなみに、算法発揮では、第一問から第六問が単伏で、2次と2次、2次と2次、3次と3次、2次と3次、3次と4次、2次と3次である。最終の第七問は進前後2次式から4次の退後式を得、それまでと同様な2次の退前式と合わせて、3次式に畳んでから立陰率（立方交乗法に対応）を得ている。

参考文献

[1] 岩知道秀樹:「算法発揮」ー現代語訳とその解説ー, 広島大学理学部数学科平成19年度卒業論文（和算の館で閲覧ダウンロード可）2008.

[2] 小松彦三郎:『解伏題之法』山路主住本の復元と「關孝和全集」との比較, 数理解析研究所講究録 1392 (2004), 225-245.

[3] 藤原松三郎: 代数学, 内田老鶴圃, 1928-1929.

[4] 藤原松三郎: 和算史の研究, X, (田中由真の業績), Tohoku Mathematical Journal 49 (1943), 90-105; 東洋数学史への招待 - 藤原松三郎数学史論文集, 東北大学出版会, 2007.

[5] (藤原松三郎): 明治前日本数学史, 日本学士院編, 5巻, 岩波書店, 東京, 1954-1960.

[6] 加藤平左エ門: 行列式及円理, 開成館, Tokyo, 1944.

[7] 近世歴史資料集成 日本科学技術古典籍資料 数学篇, 第4期第1～8巻, 第5期4巻, 科学書院, 東京, 2001-2008.

所属追加：四日市大学関孝和数学研究所・副所長，京都大学数理解析研究所・長期研究員

e-mail: matumoto@math.sci.hiroshima-u.ac.jp