数理解析研究所講究録
第 1831 巻 2013 年 16-30



# シルヴェスター表示を用いた終結式の計算と田中由真の方法

Calculation of resultant by Sylvester and by Tanaka Yoshizane

小松彦三郎 (Komatsu, Hikosaburo)
東京大学・数理科学研究科・名誉教授
Professor Emeritus, Graduate School of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

シルヴェスター [7] は二つの代数方程式

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = 0, \tag{1}$$
$$g(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_m X^m = 0, \tag{2}$$

から共通の未知数 $X$ を消去した結果が $n+m$ 次の行列式

$$\mathcal{R}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ p_0 & p_1 & \cdots & \cdots & p_m & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & \cdots & p_m & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_0 & p_1 & \cdots & \cdots & p_m \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

として表されることを示した[1]。この左辺を (1), (2) の終結式という。

## 1　2次方程式と3次方程式からなる連立方程式

この場合には

$$\begin{array}{c} \quad\ ① \quad ② \quad ③ \quad ④ \quad ⑤ \\ \mathcal{R}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \\ & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \end{array} \tag{4}$$

[1]關孝和の消去法の結果との一致については [17] を見よ。

となる。これを最初の3行と後の2行に分けてラプラス展開 [13] §32をする。$3+2=5$ 個から3個のものを選ぶ組み合わせは10あり、(4) は次のように展開できる：

$$
\begin{aligned}
&= + \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❹}\;\text{❸} \\ \text{①}\;\text{②}\;\text{③} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ & a_0 & a_1 \\ & & a_0 \end{vmatrix} \end{array} X^0 \times \begin{array}{c} \text{❷}\;\text{❶} \\ \text{④}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} p_3 & \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix} \end{array} X^6 - \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❹}\;\text{❷} \\ \text{①}\;\text{②}\;\text{④} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \\ & a_0 & a_2 \\ & & a_1 \end{vmatrix} \end{array} X^1 \times \begin{array}{c} \text{❸}\;\text{❶} \\ \text{③}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} p_2 & \\ p_1 & p_3 \end{vmatrix} \end{array} X^5 \\
&+ \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❹}\;\text{❶} \\ \text{①}\;\text{②}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \\ & a_0 & \\ & & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^2 \times \begin{array}{c} \text{❸}\;\text{❷} \\ \text{③}\;\text{④} \\ \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} \end{array} X^4 + \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❸}\;\text{❷} \\ \text{①}\;\text{③}\;\text{④} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \\ & a_1 & a_2 \\ & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \end{array} X^2 \times \begin{array}{c} \text{❹}\;\text{❶} \\ \text{②}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} p_1 & \\ p_0 & p_3 \end{vmatrix} \end{array} X^4 \\
&- \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❸}\;\text{❶} \\ \text{①}\;\text{③}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \\ & a_1 & \\ & a_0 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^3 \times \begin{array}{c} \text{❹}\;\text{❷} \\ \text{②}\;\text{④} \\ \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix} \end{array} X^3 + \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❷}\;\text{❶} \\ \text{①}\;\text{④}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} a_0 & & \\ & a_2 & \\ & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^4 \times \begin{array}{c} \text{❹}\;\text{❸} \\ \text{②}\;\text{③} \\ \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix} \end{array} X^2 \qquad (5) \\
&- \begin{array}{c} \text{❹}\;\text{❸}\;\text{❷} \\ \text{②}\;\text{③}\;\text{④} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \end{array} X^3 \times \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❶} \\ \text{①}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} p_0 & \\ & p_3 \end{vmatrix} \end{array} X^3 + \begin{array}{c} \text{❹}\;\text{❸}\;\text{❶} \\ \text{②}\;\text{③}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & \\ & a_0 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^4 \times \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❷} \\ \text{①}\;\text{④} \\ \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ & p_2 \end{vmatrix} \end{array} X^2 \\
&- \begin{array}{c} \text{❹}\;\text{❷}\;\text{❶} \\ \text{②}\;\text{④}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} a_1 & & \\ a_0 & a_2 & \\ & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^5 \times \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❸} \\ \text{①}\;\text{③} \\ \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ & p_1 \end{vmatrix} \end{array} X^1 + \begin{array}{c} \text{❸}\;\text{❷}\;\text{❶} \\ \text{③}\;\text{④}\;\text{⑤} \\ \begin{vmatrix} a_2 & & \\ a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^6 \times \begin{array}{c} \text{❺}\;\text{❹} \\ \text{①}\;\text{②} \\ \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ & p_0 \end{vmatrix} \end{array} X^0 .
\end{aligned}
$$

ここで白丸の番号はシルヴェスターの行列式 (4) の何列から取った小行列式であるかを示し、黒丸の番号は白丸の番号の $n+m+1$ に関する補数を示す。各小行列式の右肩にある $X$ の冪は $a_i$ および $p_i$ を $a_iX^i$ および $p_iX^i$ に置き換えたときに現われる因子であると同時に、この冪指数は、後に §5 で論ずる白丸の番号および黒丸の番号の配列の乱れ数 (derangement) および余乱れ数 (coderangement) にもなっている。

$$
\begin{aligned}
\text{第 I 項}: &\ + {a_0}^3{p_3}^2 \\
\text{第 II 項}: &\ - {a_0}^2 a_1 p_2 p_3 \\
\text{第 III 項}: &\ + {a_0}^2 a_2(-p_1p_3 + {p_2}^2) \\
\text{第 IV 項}: &\ + (-{a_0}^2 a_2 + a_0{a_1}^2)p_1p_3 \\
\text{第 V 項}: &\ - a_0a_1a_2(-p_0p_3 + p_1p_2) \\
\text{第 VI 項}: &\ + a_0{a_2}^2(-p_0p_2 + {p_1}^2) \\
\text{第 VII 項}: &\ - (-2a_0a_1a_2 + {a_1}^3)p_0p_3 \\
\text{第 VIII 項}: &\ + (-a_0{a_2}^2 + {a_1}^2a_2)p_0p_2 \\
\text{第 IX 項}: &\ - a_1{a_2}^2p_0p_1 \\
\text{第 X 項}: &\ + {a_2}^3{p_0}^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

これらの総和

$$
\begin{gathered}
{a_0}^3{p_3}^2 - {a_0}^2a_1p_2p_3 - 2{a_0}^2a_2p_1p_3 + {a_0}^2a_2{p_2}^2 + a_0{a_1}^2p_1p_3 \\
+3a_0a_1a_2p_0p_3 - a_0a_1a_2p_1p_2 - 2a_0{a_2}^2p_0p_2 + a_0{a_2}^2{p_1}^2 \\
-{a_1}^3p_0p_3 + {a_1}^2a_2p_0p_2 - a_1{a_2}^2p_0p_1 + {a_2}^3{p_0}^2
\end{gathered}
\tag{7}
$$

が (1), (2) の終結式である。

これを　$a = a_0, b = a_1, c = a_2, p = p_0, q = p_1, r = p_2, s = p_3$ で表した

$$
\begin{gathered}
a^3s^2 - a^2brs - 2a^2cqs + a^2cr^2 + ab^2qs + 3abcps \\
-abcqr - 2ac^2pr + ac^2q^2 - b^3ps + b^2cpr - bc^2pq + c^3p^2
\end{gathered}
\tag{8}
$$

は当然ながら、田中由真の方法 [19] で計算した (11) 式と一致する。

## 2　三乗冪演式の終結式としての計算

これを

$$f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = 0, \tag{9}$$

$$g(X) = p - X^4 = 0 \tag{10}$$

の終結式として計算する [18]。シルヴェスター表示は

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{array} \\
\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \\
 & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\
 & & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
p & & & & -1 & & \\
 & p & & & & -1 & \\
 & & p & & & & -1
\end{vmatrix} = 0.
\end{array}
\tag{11}
$$

但し、ここでの1は単なる数字の1ではなく、添字4をもつ変数に1を代入したものと見做さなければならない。

これを上の4行、下の3行に分けてラプラス展開をしたとき、$p$ に関する3次の行列式で列④を含むものは消えるから①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦の6列から3列を選んだものだけを計算すればよい。この組合わせの数は20であるが、実際にはもっと多くの行列式が消えて次の8項の和が展開式となる：

$$
\begin{aligned}
= &+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❼} & \text{❻} & \text{❺} & \text{❹} \\ \text{①} & \text{②} & \text{③} & \text{④} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & a_0 & a_1 & a_2 \\ & & a_0 & a_1 \\ & & & a_0 \end{vmatrix} \end{array} X^0 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❸} & \text{❷} & \text{❶} \\ \text{⑤} & \text{⑥} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix} \end{array} X^{12}
+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❻} & \text{❺} & \text{❹} & \text{❸} \\ \text{②} & \text{③} & \text{④} & \text{⑤} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & a_0 & a_1 & a_2 \\ & & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \end{array} X^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❼} & \text{❷} & \text{❶} \\ \text{①} & \text{⑥} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} p & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{vmatrix} \end{array} X^8 \\
&+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❼} & \text{❺} & \text{❹} & \text{❷} \\ \text{①} & \text{③} & \text{④} & \text{⑥} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 & \\ & a_1 & a_2 & \\ & a_0 & a_1 & a_3 \\ & & a_0 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❻} & \text{❸} & \text{❶} \\ \text{②} & \text{⑤} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} & -1 & \\ p & & \\ & & -1 \end{vmatrix} \end{array} X^8
+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❼} & \text{❻} & \text{❹} & \text{❶} \\ \text{①} & \text{②} & \text{④} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 & \\ & a_0 & a_2 & \\ & & a_1 & \\ & & a_0 & a_3 \end{vmatrix} \end{array} X^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❺} & \text{❸} & \text{❷} \\ \text{③} & \text{⑤} & \text{⑥} \end{array} \\ \begin{vmatrix} & -1 & \\ & & -1 \\ p & & \end{vmatrix} \end{array} X^8 \\
&+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❺} & \text{❹} & \text{❸} & \text{❷} \\ \text{③} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \end{array} X^8 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❼} & \text{❻} & \text{❶} \\ \text{①} & \text{②} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} p & & \\ & p & \\ & & -1 \end{vmatrix} \end{array} X^4
+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❻} & \text{❹} & \text{❸} & \text{❶} \\ \text{②} & \text{④} & \text{⑤} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & & \\ a_0 & a_2 & a_3 & \\ & a_1 & a_2 & \\ & a_0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \end{array} X^8 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❼} & \text{❺} & \text{❷} \\ \text{①} & \text{③} & \text{⑥} \end{array} \\ \begin{vmatrix} p & & \\ & & -1 \\ & p & \end{vmatrix} \end{array} X^4 \\
&+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❼} & \text{❹} & \text{❷} & \text{❶} \\ \text{①} & \text{④} & \text{⑥} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & & \\ & a_2 & & \\ & a_1 & a_3 & \\ & a_0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \end{array} X^8 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❻} & \text{❺} & \text{❸} \\ \text{②} & \text{③} & \text{⑤} \end{array} \\ \begin{vmatrix} & & -1 \\ p & & \\ & p & \end{vmatrix} \end{array} X^4
+ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{❹} & \text{❸} & \text{❷} & \text{❶} \\ \text{④} & \text{⑤} & \text{⑥} & \text{⑦} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_3 & & & \\ a_2 & a_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \end{array} X^{12} \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{❼} & \text{❻} & \text{❺} \\ \text{①} & \text{②} & \text{③} \end{array} \\ \begin{vmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{vmatrix} \end{array} X^0
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{I}: & = -\,[{a_0}^4] \\
\mathrm{II}: & +\,[2{a_0}^2 a_1 a_3 + {a_0}^2{a_2}^2 - 3a_0{a_1}^2 a_2 + {a_1}^4]p \\
\mathrm{III}: & +\,[+{a_0}^2 a_1 a_3 + {a_0}^2{a_2}^2 - a_0{a_1}^2 a_2]p \\
\mathrm{IV}: & +\,[{a_0}^2 a_1 a_3]p \\
\mathrm{V}: & +\,[-2a_0 a_2{a_3}^2 - {a_1}^2{a_3}^2 + 3a_1{a_2}^2 a_3 - {a_2}^4]p^2 \\
\mathrm{VI}: & +\,[-a_0 a_2{a_3}^2 - {a_1}^2{a_3}^2 + a_1{a_2}^2 a_3]p^2 \\
\mathrm{VII}: & +\,[-a_0 a_2{a_3}^2]p^2 \\
\mathrm{VIII}: & +\,[{a_3}^4]p^3.
\end{array}
\tag{13}
$$

これらの総和

$$
\begin{gathered}
-{a_0}^4 + [4{a_0}^2 a_1 a_3 + 2{a_0}^2{a_2}^2 - 4a_0{a_1}^2 a_2 + {a_1}^4]p \\
-[4a_0 a_2{a_3}^2 - 2{a_1}^2{a_3}^2 + 4a_1{a_2}^2 a_3 - {a_2}^4]p^2 + {a_3}^4 p^3
\end{gathered}
\tag{14}
$$

が (7), (8) の終結式である。これを $a = a_0, b = a_1, c = a_2, d = a_3$ で表わした

$$
\begin{gathered}
-a^4 + 4a^2bdp + 2a^2c^2p - 4ab^2p + b^4p \\
-4acd^2p^2 - 2b^2d^2p^2 + 4bc^2dp^2 - c^4p^2 + d^4p^3
\end{gathered}
\tag{15}
$$

を $-1$ 倍して [19] (11) 式になる。ここで更に $p = X^4$ を代入したものが通常の三乗冪演式 [18] である。

## 3　二つの3次方程式の終結式の計算

$n = m = 3$ の場合の終結式 (3) をこれまでと同じ方法で計算する。

$$
\begin{array}{cccccc}
① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\
 & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & & \\
 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \\
 & & p_0 & p_1 & p_2 & p_3
\end{vmatrix}
\tag{16}
$$

を上下半分に切った ラプラス展開は次の20項からなる。

$$
= + \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❺}&\text{❹}\\ \text{①}&\text{②}&\text{③}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ & a_0 & a_1 \\ & & a_0 \end{vmatrix}\end{array} X^0 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❸}&\text{❷}&\text{❶}\\ \text{④}&\text{⑤}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_3 & & \\ p_2 & p_3 & \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}\end{array} X^9 - \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❺}&\text{❸}\\ \text{①}&\text{②}&\text{④}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ & a_0 & a_2 \\ & & a_1 \end{vmatrix}\end{array} X^1 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❹}&\text{❷}&\text{❶}\\ \text{③}&\text{⑤}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_2 & & \\ p_1 & p_3 & \\ p_0 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}\end{array} X^8
$$

$$
+ \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❺}&\text{❷}\\ \text{①}&\text{②}&\text{⑤}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \\ & a_0 & a_3 \\ & & a_2 \end{vmatrix}\end{array} X^2 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❹}&\text{❸}&\text{❶}\\ \text{③}&\text{④}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & \\ p_1 & p_2 & \\ p_0 & p_1 & p_3 \end{vmatrix}\end{array} X^7 - \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❺}&\text{❶}\\ \text{①}&\text{②}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \\ & a_0 & \\ & & a_3 \end{vmatrix}\end{array} X^3 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❹}&\text{❸}&\text{❷}\\ \text{③}&\text{④}&\text{⑤}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix}\end{array} X^6
$$

$$
+ \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❹}&\text{❸}\\ \text{①}&\text{③}&\text{④}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ & a_1 & a_2 \\ & a_0 & a_1 \end{vmatrix}\end{array} X^2 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❺}&\text{❷}&\text{❶}\\ \text{②}&\text{⑤}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_1 & & \\ p_0 & p_3 & \\ & p_2 & p_3 \end{vmatrix}\end{array} X^7 - \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❹}&\text{❷}\\ \text{①}&\text{③}&\text{⑤}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \\ & a_1 & a_3 \\ & a_0 & a_2 \end{vmatrix}\end{array} X^3 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❺}&\text{❸}&\text{❶}\\ \text{②}&\text{④}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & \\ p_0 & p_2 & \\ & p_1 & p_3 \end{vmatrix}\end{array} X^6
$$

$$
+ \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❹}&\text{❶}\\ \text{①}&\text{③}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \\ & a_1 & \\ & a_0 & a_3 \end{vmatrix}\end{array} X^4 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❺}&\text{❸}&\text{❷}\\ \text{②}&\text{④}&\text{⑤}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & \\ p_0 & p_2 & p_3 \\ & p_1 & p_2 \end{vmatrix}\end{array} X^5 + \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❸}&\text{❷}\\ \text{①}&\text{④}&\text{⑤}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & \\ & a_2 & a_3 \\ & a_1 & a_2 \end{vmatrix}\end{array} X^4 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❺}&\text{❹}&\text{❶}\\ \text{②}&\text{③}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \\ p_0 & p_1 & \\ & p_0 & p_3 \end{vmatrix}\end{array} X^5
$$

$$
- \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❸}&\text{❶}\\ \text{①}&\text{④}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & \\ & a_2 & \\ & a_1 & a_3 \end{vmatrix}\end{array} X^5 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❺}&\text{❹}&\text{❷}\\ \text{②}&\text{③}&\text{⑤}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \\ p_0 & p_1 & p_3 \\ & p_0 & p_2 \end{vmatrix}\end{array} X^4 + \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❻}&\text{❷}&\text{❶}\\ \text{①}&\text{⑤}&\text{⑥}\end{array}\\ \begin{vmatrix} a_0 & & \\ & a_3 & \\ & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\end{array} X^6 \times \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{❺}&\text{❹}&\text{❸}\\ \text{②}&\text{③}&\text{④}\end{array}\\ \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ & p_0 & p_1 \end{vmatrix}\end{array} X^3 \tag{17}
$$

❺ ❹ ❸ ❻ ❷ ❶ ❺ ❹ ❷ ❻ ❸ ❶
② ③ ④ ① ⑤ ⑥ ② ③ ⑤ ① ④ ⑥

$$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ & a_0 & a_1 \end{vmatrix} X^3 \times \begin{vmatrix} p_0 & & \\ & p_3 & \\ & p_2 & p_3 \end{vmatrix} X^6 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & a_3 \\ & a_0 & a_2 \end{vmatrix} X^4 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_3 & \\ & p_2 & \\ & p_1 & p_3 \end{vmatrix} X^5$$

❺ ❹ ❶ ❻ ❸ ❷ ❺ ❸ ❷ ❻ ❹ ❶
② ③ ⑥ ① ④ ⑤ ② ④ ⑤ ① ③ ⑥

$$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & \\ & a_0 & a_3 \end{vmatrix} X^5 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_3 & \\ & p_2 & p_3 \\ & p_1 & p_2 \end{vmatrix} X^4 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \\ a_0 & a_2 & a_3 \\ & a_1 & a_2 \end{vmatrix} X^5 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & \\ & p_1 & \\ & p_0 & p_3 \end{vmatrix} X^4$$

❺ ❸ ❶ ❻ ❹ ❷ ❺ ❷ ❶ ❻ ❹ ❸
② ④ ⑥ ① ③ ⑤ ② ⑤ ⑥ ① ③ ④

$$+\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \\ a_0 & a_2 & \\ & a_1 & a_3 \end{vmatrix} X^6 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & \\ & p_1 & p_3 \\ & p_0 & p_2 \end{vmatrix} X^3 - \begin{vmatrix} a_1 & & \\ a_0 & a_3 & \\ & a_2 & a_3 \end{vmatrix} X^7 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_3 \\ & p_1 & p_2 \\ & p_0 & p_1 \end{vmatrix} X^2$$

❹ ❸ ❷ ❻ ❺ ❶ ❹ ❸ ❶ ❻ ❺ ❷
③ ④ ⑤ ① ② ⑥ ③ ④ ⑥ ① ② ⑤

$$+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} X^6 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \\ & p_0 & \\ & & p_3 \end{vmatrix} X^3 - \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \\ a_1 & a_2 & \\ a_0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} X^7 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \\ & p_0 & p_3 \\ & & p_2 \end{vmatrix} X^2$$

❹ ❷ ❶ ❻ ❺ ❸ ❸ ❷ ❶ ❻ ❺ ❹
③ ⑤ ⑥ ① ② ④ ④ ⑤ ⑥ ① ② ③

$$+\begin{vmatrix} a_2 & & \\ a_1 & a_3 & \\ a_0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} X^8 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_3 \\ & p_0 & p_2 \\ & & p_1 \end{vmatrix} X^1 - \begin{vmatrix} a_3 & & \\ a_2 & a_3 & \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} X^9 \times \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ & p_0 & p_1 \\ & & p_0 \end{vmatrix} X^0.$$

以上20項のおのおのを多項式として展開した結果は次の通りである：

$$
\begin{aligned}
\text{I:}\ & + {a_0}^3{p_3}^3, \\
\text{II:}\ & - {a_0}^2a_1p_2{p_3}^2, \\
\text{III:}\ & - {a_0}^2a_2p_1{p_3}^2 + {a_0}^2a_2{p_2}^2p_3, \\
\text{IV:}\ & - {a_0}^2a_3p_0{p_3}^2 + 2{a_0}^2a_3p_1p_2p_3 - {a_0}^2a_3{p_2}^3, \\
\text{V:}\ & - {a_0}^2a_2p_1{p_3}^2 + a_0{a_1}^2p_1{p_3}^2, \\
\text{VI:}\ & - {a_0}^2a_3p_0{p_3}^2 + {a_0}^2a_3p_1p_2p_3 + a_0a_1a_2p_0{p_3}^2 - a_0a_1a_2p_1p_2p_3, \\
\text{VII:}\ & - a_0a_1a_3p_0p_2p_3 - a_0a_1a_3{p_1}^2p_3 + a_0a_1a_3p_1{p_2}^2, \\
\text{VIII:}\ & + a_0a_1a_3p_0p_2p_3 - a_0a_1a_3{p_1}^2p_3 - a_0{a_2}^2p_0p_2p_3 + a_0{a_2}^2{p_1}^2p_3, \\
\text{IX:}\ & + a_0a_2a_3p_0p_1p_3 + a_0a_2a_3p_0{p_2}^2 - a_0a_2a_3{p_1}^2p_2, \\
\text{X:}\ & + a_0{a_3}^2{p_0}^2p_3 - 2a_0{a_3}^2p_0p_1p_2 + a_0{a_3}^2{p_1}^3, \\
\text{XI:}\ & - {a_0}^2a_3p_0{p_3}^2 + 2a_0a_1a_2p_0{p_3}^2 - {a_1}^3p_0{p_3}^2, \\
\text{XII:}\ & - a_0a_1a_3p_0p_2p_3 - a_0{a_2}^2p_0p_2p_3 + {a_1}^2a_2p_0p_2p_3, \\
\text{XIII:}\ & - a_0a_2a_3p_0p_1p_3 + a_0a_2a_3p_0{p_2}^2 + {a_1}^2a_3p_0p_1p_3 - {a_1}^2a_3p_0{p_2}^2, \\
\text{XIV:}\ & + a_0a_2a_3p_0p_1p_3 + {a_1}^2a_3p_0p_1p_3 - a_1{a_2}^2p_0p_1p_3, \\
\text{XV:}\ & + a_0{a_3}^2{p_0}^2p_3 - a_0{a_3}^2p_0p_1p_2 - a_1a_2a_3{p_0}^2p_3 + a_1a_2a_3p_0p_1p_2, \\
\text{XVI:}\ & + a_1{a_3}^2{p_0}^2p_2 - a_1{a_3}^2p_0{p_1}^2, \\
\text{XVII:}\ & + a_0{a_3}^2{p_0}^2p_3 - 2a_1a_2a_3{p_0}^2p_3 + {a_2}^3{p_0}^2p_3, \\
\text{XVIII:}\ & + a_1{a_3}^2{p_0}^2p_2 - {a_2}^2a_3{p_0}^2p_2, \\
\text{XIX:}\ & + a_2{a_3}^2{p_0}^2p_1, \\
\text{XX:}\ & - {a_3}^3{p_0}^3.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

これに $a = a_0, b = a_1, c = a_2, d = a_3, p = p_0, q = p_1, r = p_2, s = p_3$ を代入し総和をとったものは

$$
\begin{aligned}
& a^3s^3 - a^2brs^2 - 2a^2cqs^2 + a^2cr^2s - 3a^2dps^2 + 3a^2dqrs - a^2dr^3 \\
& +ab^2qs^2 + 3abcps^2 - abcqrs - abdprs - 2abdq^2s + abdqr^2 - 2ac^2prs \\
& +ac^2q^2s + acdpqs + 2acdpr^2 - acdq^2r + 3ad^2p^2s - 3ad^2pqr + ad^2q^3 \\
& -b^3ps^2 + b^2cprs + 2b^2dpqs - b^2dpr^2 - bc^2pqs - 3bcdp^2s + bcdpqr \\
& +2bd^2p^2r - bd^2pq^2 + c^3p^2s - c^2dp^2r + cd^2p^2q - d^3p^3.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

となり、これも当然ながら田中由真の方法 [19] で計算した (23) 式と一致する。

## 4 終結式を構成する単項式の斉重性

これまで扱ってきた $a_0{a_3}^2{p_0}^2p_3$ や $2a_1a_2a_3{p_0}^2p_3$ のような、数字を添字とする変数からなる単項式の各因子の添字の和をこの単項式の重さ (weight) という。この例ではいずれも 9 である。

これまでの例から容易に推測できるように、終結式を構成する単項式は同じ重さをもつ。このような多項式を斉重 (isobaric) という。次はファン・デア・ヴェルデンの「現代代数学」[11] 下巻 §72 の末尾に演習問題の一つとして述べられている結果である。

**定理 1** $n$ 次及び $m$ 次の方程式 (1) 及び (2) からなる連立方程式の終結式 (3) は斉重であり、いずれも $nm$ に等しい重さをもつ単項式の和として表される。

**証明** シルヴェスター表示 (3) の内 $g(X)$ の係数の添字を並べた部分の添字から $m$ を引いたものを新しい添字 として (3) を書き改める。このようにすれば、$i$ 行 $j$ 列の場所にあるのは 0 または $j-i$ を添字とする文字が一つである。(現代の) 行列式の定義に従ってこれらの積和をとった各項は 0 であるか、またはある $n+m$ 個の数字の置換 $\sigma$ があって、 $i$ が 1 から $n+m$ まで動くとき、 $j$ が $\sigma i$ にある変数を掛け合わせたものである。これらの添字の和は $\Sigma\sigma i - \Sigma i = \Sigma i - \Sigma i = 0$ である。しかし、実際の添字は、$i > m$ ならば、$m$ だけ足さなければならない。このような $i$ がちょうど $n$ 個あるので全体の重さは $0 + nm = nm$ になる。**証明終**

高木 [13] §28 にはコーシーの表示 [8]

$$\mathcal{R}(f,g) = {a_n}^m {b_m}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\xi_i - \eta_j) \tag{20}$$

を用いた短い証明がある。但し、$\xi_i$ 及び $\eta_j$ はそれぞれ (1) と (2) の根全体とする:

$$f(X) = a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\xi_i), \quad g(X) = b_m\prod_{j=1}^{m}(X-\eta_j). \tag{21}$$

この他、終結式を構成する単項式は $\{a_i\}$ に関して $m$ 次斉次、$\{p_j\}$ に関して $n$ 次斉次であることは容易にわかるが、田中由真の方法で使われるよりはるかに多くの単項式がこれら三つの条件を満たしてしまう。

## 5 何故終結式は田中由真の方法で計算できるのか

(1), (2) のような連立代数方程式から共通の未知数を消去することは代数学が始まったときからいろいろな試みが発表されてきた。誰もが思いつくのは、それぞれの最高次の係数を別の方程式に掛け、必要ならば次数の低い方程式に $X$ の冪を掛

けて同じ次数にして引き算することである。こうして少なくとも一つの方程式の次数を下げることができ、これを続けてゆけば二つの1次方程式に還元することができる。ここで始めて割算を適用すれば消去したい共通の未知数 $X$ が元の方程式の係数に現われる他の未知数の有理式で表せるようになる。田中由真 [2] 巻之一の始めの章は「双式一貫之術」と題され、この方法に宛てられている。オイラー [3],[4] は割算も許す同様な方法によって二つの平面代数曲線の交点の数を論じた。

本当はこれが一番早い計算法なのであるが、実際に実行してみるとむやみに項数の多い多項式が係数として現われ、いつこの計算が終るか心配になって途中で止めてしまうという結果になりがちであった。もっと見通しのよい方法が求められた中で、世界最初に一般的な方法を確立したのは關孝和である。終結式の概念を発見したのはあるいは田中由真であったかもしれない。これとは独立にオイラーも同じ発見をしている。しかし、關は、1683年までに「解伏題之法」[1] を著して、世界で最初に行列式を導入、これを用いれば消去の結果である終結式が簡潔に書き表されることを示した。こうして連立代数方程式は常に1変数の代数方程式に帰着できることが確立されたのである。

これは約80年後にヨーロッパで発表されたベズーの仕事 [5] と殆ど同じである。行列式のサイズはシルヴェスターのものの約半分である $n, m$ の大きい方になる。換式を作るというそのための前準備も両者ほぼ同じである。關には澤口一之の「古今算法記」に出された遺題などを解く為の一般的な方法を与えることに目的があり、ベズーにはは同一平面上の $n$ 次曲線と $m$ 次曲線はたかだか $nm$ 個の点で交わるというオイラー [3]、[4] の予想を証明することに目的があった。オイラーの論文 [3] と本 [4] には具体的な $n, m$ に対して上に述べた素朴な方法で消去を行った計算が書かれている。

一方、關と同時代に京都にいた田中由真は「算学紛解」(ca1690)[2] を発表し、關とは違う行列式の使い方をしたものと行列式を使わない終結式の計算方法を与えた。

一例として連立代数方程式

$$f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = 0, \tag{22}$$

$$g(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 = 0 \tag{23}$$

を考える。田中由真の後の方法では、以下のようにまず前式 (22) を後式 (23) の次数だけ自乗したものと、後式 (23) を前式 (22) の次数だけ自乗して和の順序を逆転したものを作る：

$$a_0^2 + a_0a_1X + \left\{\begin{matrix} a_0a_2 \\ a_1^2 \end{matrix}\right\} X^2 + \left\{\begin{matrix} a_0a_3 \\ a_1a_2 \end{matrix}\right\} X^3 + \left\{\begin{matrix} a_1a_3 \\ a_2^2 \end{matrix}\right\} X^4 + a_2a_3X^5 + a_3^2X^6 = 0, \tag{24}$$

$$p_2^3X^6 + p_1p_2^2X^5 + \left\{\begin{matrix} p_0p_2^2 \\ p_1^2p_2 \end{matrix}\right\} X^4 + \left\{\begin{matrix} p_0p_1p_2 \\ p_1^3 \end{matrix}\right\} X^3 + \left\{\begin{matrix} p_0^2p_2 \\ p_0p_1^2 \end{matrix}\right\} X^2 + p_0^2p_1X + p_0^3 = 0. \tag{25}$$

ただし、数係数および符号は無視する。

終結式は、この時、上下の式の各項の積で次数が前後式の次数の積となるものの係数を書き並べた

$$a_0^2p_2^3,\ a_0a_1p_1p_2^2,\ \left\{\begin{matrix} a_0a_2p_0p_2^2 \\ a_0a_2p_1^2p_2 \\ a_1^2p_0p_2^2 \\ a_1^2p_1^2p_2 \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} a_0a_3p_0p_1p_2 \\ a_0a_3p_1^3 \\ a_1a_2p_0p_1p_2 \\ a_1a_2p_1^3 \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} a_1a_3p_0^2p_2 \\ a_1a_3p_0p_1^2 \\ a_2^2p_0^2p_2 \\ a_2^2p_0p_1^2 \end{matrix}\right\},\ a_2a_3p_0^2p_1,\ a_3^2p_0^3 \tag{26}$$

という 16 箇の単項式の整数係数 $C_i$ の一次結合で表される。

$X=\xi$ が（ある拡大体の中での）方程式 (1), (2) の共通の解であるときには $X=\xi$ を代入した終結式も当然零とならなければならないから、上の単項式の 1 次結合で表される終結式の候補に対して

$$a_0=-a_1X-a_2X^2-a_3X^3, \tag{27}$$

$$p_0=-p_1X-p_2X^2 \tag{28}$$

を代入して得られる多項式が恒等的に零となるという条件を課して係数 $C_i$ を決定することができる。これが田中の方法である。実際の計算例は、2010 年秋の日本数学会及び 2011年数理解析研究所で開かれた研究集会「数学史の研究」[19] で報告したのでここでは省略する。

田中由真の方法が上に述べたものであることは藤原松三郎 [14][15] が明晰に述べており「この考えは新しいもので、西洋数学には見当たらぬものである。」と書いている。他方、竹之内脩 [16] は二つの 3 次方程式の場合「紛解」に書かれている通りの計算は難し過ぎて田中自身違う方法で計算したのではないかと疑っている。実際書かれているこの場合の終結式の計算結果には間違いが多いが、だからといって、これが由真の方法では計算不可能であるという証拠になるほどではない」[19]。

同じ所で藤原松三郎が注意するように、田中由真の方法の正当性を示すことと「解伏題之法」第五丁にある「定乗」の章を理解することは同じである。そこにある結果を用いれば、今日ベズーの定理の名で知られている平面上の二つの代数曲線の交点数に関するオイラーの予想は直ちに証明できる。オイラーが 16 年間も一般的に解くことができなかった問題をそれが問題であることすら知らなかった關がその 80 年も前に解いていたという事実は、スミス–三上 [9] の 127 ページにある關に対する彼らの悪評が全く根拠のないものであることを示している。彼らに理解できた和算は和算のごく初等的な部分に過ぎない。

「定乗」の章で關は二つの方程式から共通の未知数 $X$ を消去して得られた方程式の (他の未知数)$Y$ に関する次数を次のようにして評価している。例えば、方程式 (22), (23) に対しては、まず、上の (24), (25) 式と同様に元の方程式の冪乗を作り、一方を逆順にして並べる。そして、$X$ の冪ごとにその係数となっている多項

式の $Y$ に関する次数の最大を書き添える。このとき、$X$ を消去して得られた方程式の $Y$ に関する次数はここで上下に書き添えた次数の和の最大以下である。

これは、田中の方法が根拠としている、二式の終結式は (26) に列記されている単項式の数係数の一次結合になるという事実を認めれば明らかである。

一般に、(1) と (2) の終結式を構成する単項式はシルヴェスターの行列式 (3) のラプラス展開の各項を構成する単項式と同じものであるから、これらがすべて田中の構成法に現われるものであることを示せば、田中の方法の正当性、ひいては關の定乗の結果が証明されたことになる。そのラプラス展開の各項は $\{1,2,\cdots,n+m\}$ の分割 $J\sqcup\overline{J}, J=\{j_1<j_2<\cdots<j_m\}, \overline{J}=\{\overline{k}_1<\overline{k}_2<\cdots<\overline{k}_n\}$ に対して $J$ に対する上半分の小行列式と $\overline{J}$ に対する下半分の余因子の積であることに注意して、この積を構成する単項式が全て田中の方法で得られることを示せばよい。

まず上の分割 $J\sqcup\overline{J}$ の乱れ数 (derangement) $d(J;\overline{J})$ を、一列に並べた $J\sqcup\overline{J}$ から隣り同士を互換することによって元の自然な順序 $\{1,2,\cdots,n+m\}$ に並び替えるのに必要な最小の互換数と定義する：例えば $n=3, m=2$ の場合、

$$\begin{aligned} &d(1,2;3,4,5)=0, \quad d(1,3;2,4,5)=1,\\ &d(1,4;2,3,5)=2, \quad d(1,5;2,3,4)=3,\\ &d(2,3;1,4,5)=2, \quad d(2,4;1,3,5)=3,\\ &d(2,5;1,3,4)=4, \quad d(3,4;1,2,5)=4,\\ &d(3,5;1,2,4)=5, \quad d(4,5;1,2,3)=6. \end{aligned} \tag{29}$$

これは、また、対応するラプラス展開の余因子の符号を決めるために使われる $(-1)$ の冪指数 $(j_1-1)+(j_2-2)+\cdots+(j_m-m)$ に等しいことに注意する。

次に、同じ分割 $J\sqcup\overline{J}$ の余乱れ数 (coderangement) を、それぞれ $J,\overline{J}$ の成分を $n+m+1$ に関する補数に置き換え、それぞれを大きさの順序に置き換えてできる分割の乱れ数と定義し、$\overline{d}(J\sqcup\overline{J})$ または単に $\overline{d}$ で表す。上の例では

$$\begin{aligned} &\overline{d}(1,2;3,4,5)=d(4,5;1,2,3)=6, \quad \overline{d}(1,3;2,4,5)=d(3,5;1,2,4)=5,\\ &\overline{d}(1,4;2,3,5)=d(2,5;1,3,4)=4, \quad \overline{d}(1,5;2,3,4)=d(1,5;2,3,4)=3,\\ &\overline{d}(2,3;1,4,5)=d(3,4;1,2,5)=4, \quad \overline{d}(2,4;1,3,5)=d(2,4;1,3,5)=3,\\ &\overline{d}(2,5;1,3,4)=d(1,4;2,3,5)=2, \quad \overline{d}(3,4;1,2,5)=d(2,3;1,4,5)=2,\\ &\overline{d}(3,5;1,2,4)=d(1,3;2,4,5)=1, \quad \overline{d}(4,5;1,2,3)=d(1,2;3,4,5)=0. \end{aligned} \tag{30}$$

恒に $d+\overline{d}=nm$ が成り立つが、これが定義から直ちに証明できるかどうかは知らない。

**定理 2** (1) 及び (2) を $n$ 次及び $m$ 次の方程式、(3) をそれらの終結式のシルヴェスター表示とする。このとき、$\{1,2,\cdots,n+m\}$ の分割 $J\sqcup\overline{J}, J=\{j_1<j_2<\cdots<j_m\}, \overline{J}=\{\overline{k}_1<\overline{k}_2<\cdots<\overline{k}_n\}$ に対応する (3) のラプラス展開の項の第一因

子は、$\{a_i\}$ に関して $m$ 次斉次かつ重さ $d$ の斉重多項式、第二因子は $\{p_k\}$ に関して $n$ 次斉次かつ重さ $\overline{d}$ の斉重多項式であり、これらの積に $(-1)^d$ を掛けたものが対応するラプラス展開の項となる。

**証明** これは行と列の役割を取り換えることを除けば定理1の証明と同じである。第一因子の行列式は第1列として第 $j_1$ 列、第2列として第 $j_2$ 列, $\cdots$, 第 $m$ 列として第 $j_m$ 列の上半分を持ってきた $m\times m$ 行列の行列式である. これらの列の $k$ 番目を構成する $a_i$ の添字から一斉に $j_k-k$ を引くということを全ての $k=1,\cdots,m$ について行ったあとの行列での $i$ 行 $j$ 列の場所にあるのは定理1の証明の場合と同じく0または $j-i$ を添字とする文字一つである。従って、この行列の行列式は0または重さ0の斉重多項式となる。これを構成する単項式はどの $k$ 列においてもこれを構成する $a_i$ を一つずつ因子として含み、その添字は実際は $j_k-k$ だけ大きい。従って、全体としては乱れ数 $d$ に等しい重さをもつ。第二因子に対する証明も同様である。余因子の符号に関する部分はラプラス展開の公式または実際 $d$ 回列の互換を行って第一因子を主小行列式に移して確かめることができる。**証明終**

連立方程式 (1) 及び (2) の終結式を構成する単項式から数係数を除いたものを

$$a_0{}^{e_0}a_1{}^{e_1}\cdots a_n{}^{e_n}\cdot p_0{}^{t_0}p_1{}^{t_1}\cdots p_m{}^{t_m} \tag{31}$$

とする。 定義によりこれは $\{1,2,\cdots,n+m\}$ のある分割 $J\sqcup\overline{J}$ に対応するラプラス展開の項を構成する単項式であるから、定理2により、

$$e_0+e_1+\cdots+e_n=m,\qquad e_1+2e_2+\cdots+ne_n=d; \tag{32}$$

$$t_0+t_1+\cdots+t_m=n,\qquad t_1+2t_2+\cdots+nt_n=\overline{d} \tag{33}$$

を満たさなければならない。(32) は (31) の第一因子 $a_0{}^{e_0}a_1{}^{e_1}\cdots a_n{}^{e_n}$ が $f(X)^m$ の $X^d$ の係数を構成する単項式であることを示し、(33) は第二因子 $p_0{}^{t_0}p_1{}^{t_1}\cdots p_m{}^{t_m}$ が $g(X)^n$ の $X^{\overline{d}}$ の係数を構成する単項式であることを示している。一方、この場合、定理1は

$$d(J\sqcup\overline{J})+\overline{d}(J\sqcup\overline{J})=nm \tag{34}$$

という内容であるから、丁度 $X^{nm}$ の係数となる因子の積だけが許される。こうして終結式を構成する単項式はすべて田中由真の方法で得られることが証明された。

## 参考文献


[1] 關孝和: 解伏題之法, 重訂 1683, 松永貞辰写, 東北大学付属図書館蔵 林集書 648 松永文庫 2490; 小松彦三郎: 「解伏題之法」山路主住本の復元と「關孝和全集」との比較, 数理解析研究所講究録 **1392**(2004), 225–245.

[2] 田中由眞：算學紛解, 8 巻中 巻之一〜四, ca. 1690, 大阪府立中之島図書館 618/204.

[3] L. Euler; Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelquonques peuvent se couper, Mémoires Acad. Sci. Berlin, **4**(1748), 234–248; Opera Omnia **I-XXVI**(1953). 46–59.

[4] L. Euler; Introductio in Analysin Infinitorum. tom. II, Lausannæ, 1748 ; Opera Omnia **I-IX**(1945); 高瀬正仁訳: オイラーの解析幾何, 海鳴社, 2005.

[5] E. Bézout: Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations, Mémoires Acad. Royale Sci. Paris, (1764), 288–338.

[6] L. Euler: Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations, Mémoires Acad. Sci. Berlin, **20**(1764), 91–104; Opera Omnia **I-VI**(1921), 197–211.

[7] J. J. Sylvester: A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree, Phil. Magazine, **16**(1840), 132–135; The Collected Mathematical Papers, **I**, 54–57.

[8] A. Cauchy: Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques, Exercices d'analyse et de physique mathématique, **1**(1840), 91–104; Œuvres Complètes **II-XI**(1913), 466–509.

[9] D. E. Smith and Yoshio Mikami: A history of Japanese mathematics, Open Court Publishing, Chicago, 1914; Dover, Mineola, N.Y., 2004.

[10] Yoshio Mikami: On the Japanese theory of determinants, Isis **2**(1914), 9–36.

[11] B.L. van der Waerden: Moderne Algebra, zweiter teil, Verlag von J. Springer, Berlin, 1931.

[12] 三上義夫: 關孝和の業續と京阪の算家並びに支那の算法との關係及び比較, 東洋学報 **20**(1932), 217–249, 543–566, **21**(1933), 45–65, 352–373, 557–575, **22**(1935), 54–99.

[13] 高木貞治, 改訂代数学講義, 共立出版, 1948.

[14] 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史, 第二巻, 岩波書店, 1956.

[15] 藤原松三郎著 日本学士院編, 明治前日本数学史, 第三巻, 岩波書店, 1957.

[16] 竹之内脩: 田中由真の終結式について The construction of resultant due to Tanaka Yoshizane, 和算研究所紀要, **2**(1999), 3–18.

[17] 後藤武史–小松彦三郎: 17 世紀日本と 18–19 世紀西洋の行列式、終結式及び判別式,「数学史の研究」, 数理解析研究所講究録 **1392**(2004), 117–129; 西北大学学報 (J. of Northwest University, Xian, (Natural Science Edition)), **33**(2003), 363–367 & 376–380.

[18] 小松彦三郎: 関東の消長法と関西の冪乗演段,「数学史の研究」数理解析研究所講究録 **1583**(2008), 19–39.

[19] 小松彦三郎: 田中由真著『算学紛解』の消去理論,「数学史の研究」数理解析研究所講究録, **1787**(2012), 1–17.

[20] 小松彦三郎: 何故終結式は田中由真の方法で計算できるのか, 日本数学会 2012 年度年会, 数学基礎論および歴史講演アブストラクト, 7–8.

email: komatsu@ms.u-tokyo.ac.jp