

Logarithmic invariants for knots in three manifolds

早稲田大学・理工学術院 村上 順

Jun Murakami

Faculty of Science and Engineering

Waseda University

1. はじめに

Kashaev [9] や [13] などにより 3次元球面 S^3 中の結び目の量子不変量と結び目補空間の双曲体積との関係が明らかにされた. そこで, 一般の 3次元多様体中の結び目に対してもこのような不変量ができないかと考えたのがここで紹介する logarithmic 不変量である. これは, Hennings [7] で構成された 3次元多様体の Hennings 不変量と, [15] で構成された S^3 中の結び目の logarithmic 不変量とをあわせることで構成されるのであるが, どちらもリー環 sl_2 に対応する小さな量子群と呼ばれるものを用いて構成される不変量である.

量子群 $U_q(sl_2)$ は次の生成元と関係式を満たす.

$$U_q(sl_2) = \left\langle E, F, K \mid KEK^{-1} = q^2 E, KFK^{-1} = q^{-2} E, EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \right\rangle$$

さらに, $U_q(sl_2)$ には余積と対合射と呼ばれるものも定義されていてホップ代数となっている. ここで $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/N)$ とし, $E^N = F^N = 0, K^{2N} = 1$ という関係を追加すると $2N$ 次元のホップ代数となる. これを **小さな量子群** と呼び $\hat{U}_q(sl_2)$ で表す. 有限次元のホップ代数には right integral と呼ばれる特別な性質を持つ線形関数が存在する. この right integral の特別な性質が結び目を用いて 3次元多様体を表すときの基本的な同値変形である Kirby 変形と相性がよく, right integral を用いて容易に 3次元多様体の不変量を構成することができる. このようにして構成されたのが Hennings 不変量である.

一方, 小さな量子群の正則表現は半単純でない直既約表現を持ち, このことから冪零な中心を持つことがわかる. 結び目を切り開いて $(1, 1)$ タングルを作り, Lawrence [12] と Ohtsuki [17] による普遍不変量の構成法をこのタングルに適用すると, 小さな量子群の元が構成される. この元は $\hat{U}_q(sl_2)$ 中心の元となるが, これを中心の基底の一

時結合として表したときの係数が logarithmic 不変量である。特に、冪零元に対応する部分が、これまであまり注目されていなかった部分である。

上の2種類の不変量の構成法を組み合わせることで一般の3次元多様体中の結び目の不変量を作ろうというのが目標である。具体的には、 S^3 中の枠付き結び目の組 (K, L) に対し、 L に沿って手術することで、 L に対応する3次元多様体中の結び目が得られる場合に、 L に対して Hennings 不変量、 K に対して logarithmic 不変量を対応させることで構成する。

2. 小さな量子群

2.1. **定義.** N を2以上の自然数とする。量子群 $U_q(sl_2)$ で $q = \exp(\sqrt{-1}/N)$ としたものの商である small quantum group $\hat{U}_q(sl_2)$ を次で定義する。

$$\begin{aligned} \hat{U}_q(sl_2) = \langle & K, K^{-1}, E, F \mid K K^{-1} = K^{-1} K = 1, \\ & K E K^{-1} = q^2 E, \quad K F K^{-1} = q^{-2} F, \quad E F - F E = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ & E^N = F^N = 0, \quad K^{2N} = 1 \rangle \end{aligned}$$

さらに、通常の量子群 $U_q(sl_2)$ の時と同様、次の余積 Δ 、余単位元 ϵ と対合射 S により $\hat{U}_q(sl_2)$ は $2N^3$ 次元のホップ代数となる。

$$\begin{aligned} \Delta(K^{\pm 1}) &= K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1}, \quad \Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F, \\ \epsilon(K) &= 1, \quad \epsilon(E) = \epsilon(F) = 0, \\ S(K^{\pm 1}) &= K^{\mp 1}, \quad S(E) = -E K^{-1}, \quad S(F) = -K F. \end{aligned}$$

2.2. **表現.** $\hat{U}_q(sl_2)$ の $2N$ 個の表現 \mathcal{X}_s^\pm ($1 \leq s \leq N$) を次で定める。 \mathcal{X}_s^\pm は s 次元の表現であり、その基底を e_0, e_1, \dots, e_{s-1} とするとき、 $\hat{U}_q(sl_2)$ の作用を次で与える。

$$K e_j = \pm q^{s-1-2j} e_j, \quad E e_j = \pm [j][s-j] e_{j-1}, \quad (e_{-1} = 0) \quad F e_j = e_{j+1}. \quad (e_s = 0)$$

このとき、 $\hat{U}_q(sl_2)$ の有限次元既約表現は \mathcal{X}_s^\pm のどれかと同型になる。

また、次のような $2N$ 個の N 次元表現 \mathcal{V}_s^\pm ($1 \leq s \leq N$) が存在する。 $\mathcal{V}_N^\pm = \mathcal{X}_N^\pm$ であり、 \mathcal{V}_s^\pm の基底を e_0, e_1, \dots, e_{N-1} とするとき、 $\hat{U}_q(sl_2)$ の作用は \mathcal{X}_s^\pm のときと同様次で与えられる。

$$K e_j = \pm q^{s-1-2j} e_j, \quad E e_j = \pm [j][s-j] e_{j-1}, \quad (e_{-1} = 0) \quad F e_j = e_{j+1}. \quad (e_N = 0)$$

また、次の完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}_{N-s}^\mp \longrightarrow \mathcal{V}_s^\pm \longrightarrow \mathcal{X}_s^\pm \longrightarrow 0$$

\mathcal{V}_s^\pm への $\widehat{U}_q(sl_2)$ の作用の様子は次のように表すこともできる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_s^\pm & \xrightarrow{F} & \mathcal{X}_{N-s}^\mp \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

さらに, $\widehat{U}_q(sl_2)$ の射影的加群が以下に述べる \mathcal{P}_s^\pm ($1 \leq s \leq N-1$) で与えられる. \mathcal{P}_s^\pm は $2N$ 次元で, 次の基底と作用で定まるものである.

基底: $\{x_k, y_k\}_{0 \leq k \leq N-s-1} \cup \{a_n, b_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$

作用:

$$K x_k = \pm q^{-s-1-2k} x_k, \quad K y_k = \pm q^{2N-s-1-2k} y_k, \quad (0 \leq k \leq N-s-1)$$

$$K a_n = \pm q^{s-1-2n} a_n, \quad K b_n = \pm q^{s-1-2n} b_n, \quad (0 \leq n \leq s-1)$$

$$E x_k = \mp [k][N-s-k] x_{k-1}, \quad (0 \leq k \leq N-s-1, x_{-1} = 0)$$

$$E y_k = \begin{cases} \mp [k][N-s-k] y_{k-1}, & (1 \leq k \leq N-s-1) \\ a_{s-1}, & (k=0) \end{cases}$$

$$E a_n = \pm [n][s-n] a_{n-1}, \quad (0 \leq n \leq s-1, a_{-1} = 0)$$

$$E b_n = \begin{cases} \pm [n][s-n] b_{n-1}, & (1 \leq n \leq s-1) \\ x_{N-s-1}, & (n=0) \end{cases}$$

$$F x_k = \begin{cases} x_{k+1}, & (0 \leq k \leq N-s-2) \\ a_0, & (k=N-s-1) \end{cases}$$

$$F y_k = y_{k+1}, \quad (0 \leq k \leq N-s-1, y_{N-s} = 0)$$

$$F a_n = a_{n+1}, \quad (0 \leq n \leq s-1, a_s = 0)$$

$$F b_n = \begin{cases} b_{n+1}, & (0 \leq n \leq s-2) \\ y_0, & (n=s-1) \end{cases}$$

\mathcal{P}_s^\pm は次の完全系列を満たす.

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_{N-s}^\mp \longrightarrow \mathcal{P}_s^\pm \longrightarrow \mathcal{V}_s^\pm \longrightarrow 0$$

また, $\widehat{U}_q(sl_2)$ の作用は次のように表すことができる.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{X}_s^\pm(b_n) & & \\ & \swarrow E & & \searrow F & \\ \mathcal{X}_{N-s}^\mp(x_k) & & & & \mathcal{X}_{N-s}^\mp(y_k) \\ & \searrow F & & \swarrow E & \\ & & \mathcal{X}_s^\pm(a_n) & & \end{array}$$

2.3. **正則表現.** $\widehat{U}_q(sl_2)$ の $\widehat{U}_q(sl_2)$ への左作用で定まる正則表現は, [5] にあるように上で定義した \mathcal{P}_s^\pm と \mathcal{X}_N^\pm により次のように分解する.

$$\bigoplus_{s=1}^{N-1} s \mathcal{P}_s^+ \oplus \bigoplus_{s=1}^{N-1} s \mathcal{P}_{N-s}^- \oplus N \mathcal{X}_N^+ \oplus N \mathcal{X}_N^-.$$

2.4. **普遍 R -行列.** 上のホップ代数に対し, 普遍 R -行列と呼ばれるものを次で定義する. まず, $\widehat{U}_q(sl_2)$ に K の 2 乗根にあたる元 k を追加する. k は次を満たすとする.

$$k^2 = K, \quad k^{-2} = K^{-1}, \quad k E k^{-1} = q E, \quad k F k^{-1} = q^{-1} F,$$

$$\Delta(k^{\pm 1}) = k^{\pm 1} \otimes k^{\pm 1}, \quad \epsilon(k^{\pm 1}) = 1, \quad S(k^{\pm 1}) = k^{\mp 1}.$$

$\widehat{U}_q(sl_2)$ に k を追加したものを $\widehat{U}'_q(sl_2)$ とする. 先に述べた $\widehat{U}_q(sl_2)$ の表現 $\mathcal{X}_s^\pm, \mathcal{P}_s^\pm$ はどれも $\widehat{U}'_q(sl_2)$ の表現に 2 通りに拡張される. これは K の平方根 k の取り方が 2 通りあることによる.

上で導入された k を用いて $\widehat{U}'_q(sl_2) \otimes \widehat{U}'_q(sl_2)$ の元 R を次で定める.

$$R = \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n,j=0}^{4N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2 + m(n-j) - nj/2} E^m k^n \otimes F^m k^j.$$

ただし, 自然数 m に対し,

$$[m] = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}, \quad [m]! = [m][m-1] \cdots [1], \quad [0]! = 1$$

とする. また, $\tau: \widehat{U}'_q(sl_2) \otimes \widehat{U}'_q(sl_2) \rightarrow \widehat{U}'_q(sl_2) \otimes \widehat{U}'_q(sl_2)$ を

$$\tau(a \otimes b) = b \otimes a$$

とする. このとき, 上で定義した R は次を満たす.

$$R \Delta(x) R^{-1} = \Delta'(x), \quad (x \in \widehat{U}'_q(sl_2))$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13} R_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}.$$

ここで $\Delta' = \tau \circ \Delta$ である. また, $R = \sum a_i \otimes b_i$ とするとき,

$$R_{12} = \sum a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum a_i \otimes 1 \otimes b_i, \quad R_{23} = \sum 1 \otimes a_i \otimes b_i$$

である.

$\widehat{U}'_q(sl_2)$ の2つの表現 U, V に対し, それぞれの元 u, v で $ku = q^{p/2}u, kv = q^{q/2}v$ を満たすものとするとき

$$\begin{aligned} R(u \otimes v) &= \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n,j=0}^{4N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2 + m(n-j) - nj/2} E^m k^n u \otimes F^m k^j v \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2} \sum_{n,j=0}^{4N-1} q^{m(n-j) - nj/2 + np/2 + jq/2} E^m u \otimes F^m v \\ &= \frac{1}{4N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2} \sum_{n,j=0}^{4N-1} q^{n(2m-j+p)/2 - mj + jq/2} E^m u \otimes F^m v \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2} q^{(p+2m)(q-2m)/2} E^m u \otimes F^m v \end{aligned}$$

となる.

2.5. **Right integral.** $\widehat{U}'_q(sl_2)$ は有限次元のホップ代数であり, right integral と呼ばれる線形形式

$$\mu : \widehat{U}'_q(sl_2) \longrightarrow \mathbf{C}$$

で次の性質を持つものが存在する.

$$(\mu \otimes \text{id})\Delta(x) = \mu(x)1.$$

μ は $\widehat{U}'_q(sl_2)$ の基底 $E^j F^m k^n$ に対し次のようになる.

$$\mu(E^j F^m k^n) = \delta_{j,N-1} \delta_{m,N-1} \delta_{k,2N+2}.$$

また, μ を $\widehat{U}_q(sl_2)$ に制限したものが $\widehat{U}_q(sl_2)$ の right integral となる.

2.6. **Symmetric linear function.** $\widehat{U}_q(sl_2)$ や $\widehat{U}'_q(sl_2)$ の線形形式 f で任意の元 x, y に対して $f(xy) = f(yx)$ となるものを *symmetric linear function* と呼ぶ. 表現行列の対角成分の和である指標は symmetric linear function であり, \mathcal{X}_s^\pm に対応する指標を X_s^\pm とすると \mathcal{P}_s^\pm に対応する指標は $2X_s^\pm + 2X_{N-s}^\mp$ である. また, 先に定義した right integral μ に対し

$$\phi(x) = \mu(xK^{N-1})$$

としたものは symmetric linear function になることが知られている.

これら以外に, 表現 \mathcal{P}_s^\pm の (a_0, b_0) 成分, (a_1, b_1) 成分, \dots , (a_{s-1}, b_{s-1}) 成分の和を G_s^\pm とし,

$$G_s = G_s^+ + G_{N-s}^-$$

とすると, G_s は symmetric linear function である. $\widehat{U}_q(sl_2)$ の symmetric linear function は X_s^\pm ($1 \leq s \leq N$) と G_s ($1 \leq s \leq N-1$) で張られ,

$$\phi = c_N \left(X_N^- + (-1)^{N-1} X_N^+ + \sum_{s=1}^{N-1} (-1)^s ((q^s + q^{-s})(X_s^+ + X_s^-) + [s]^2 G_s) \right),$$

$$c_N = \frac{(-1)^{N-1}}{2N^2} \left(2 \sin \frac{\pi}{N} \right)^{2(N-1)}$$

であることが Arike [2] により知られている.

2.7. 中心. $\widehat{U}_q(sl_2)$ の中心 \mathcal{Z} は次の2種類の元で張られている. 最初のタイプは e_s という \mathcal{P}_s^\pm で表現すると単位行列になり, \mathcal{P}_t^\pm ($t \neq 0$) では零行列となる, 中心冪等元と呼ばれるものである. 2番目のタイプは w_s^\pm という, \mathcal{P}_s^\pm での (a_1, b_1) 成分, \dots , (a_{s-1}, b_{s-1}) 成分が1でそれ以外の成分はすべて0となるものである. これらの $3s-1$ 個の元で中心が張られている. また, これらは [10] や [3] にあるようにカシミール元とその固有値とを用いてカシミール元の多項式として表すこともできる.

e_s と w_s^\pm は積に関して次の関係を満たす.

$$e_s e_t = \delta_{s,t} e_s, \quad e_s w_t^\pm = \delta_{s,t} w_s^\pm, \quad w_s^\pm w_t^\pm = w_s^\pm w_t^\mp = 0.$$

さらに \mathcal{Z} の次の基底 $\{\kappa_0, \dots, \kappa_N, \rho_1, \dots, \rho_{N-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}\}$ が, 後で述べるホップリンクを用いた $SL(2, \mathbf{Z})$ の作用に関して自然な基底となることが [5] で示されている.

$$\kappa_0 = (-1)^{N+1} e_0,$$

$$\kappa_s = \frac{1}{[s]^2} (w_s^+ + w_s^-), \quad (1 \leq s \leq N-1)$$

$$\kappa_N = e_N,$$

$$\rho_s = (-1)^{N+s} \frac{1}{N(q^s - q^{-s})} \left(e_s - \frac{q^s + q^{-s}}{[s]^2} (w_s^+ + w_s^-) \right), \quad (1 \leq s \leq N-1)$$

$$\varphi_s = \frac{1}{[s]^2} \left(\frac{N-s}{N} w_s^+ - \frac{s}{N} w_s^- \right), \quad (1 \leq s \leq N-1)$$

3. 結び目の普遍不変量

ここでは, [12], [17] による枠付き結び目 (絡み目を含む) の普遍不変量について述べる.

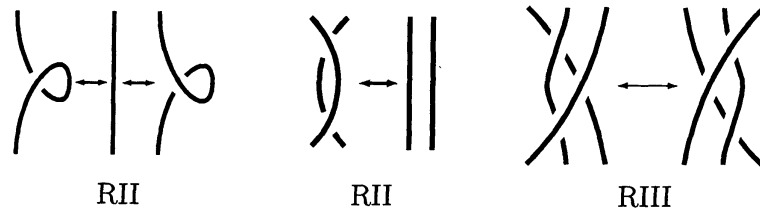


FIGURE 1. Reidemeister 変形

3.1. **枠付き結び目.** 結び目の図は次の Reidemeister 変形と呼ばれる 3 種類の変形で互いに移り合うとき、同値な結び目を表す. 枠付き結び目 L とは, L の紐を表裏のある帯状のものに置き換えてできる結び目で, Reidemeister 変形の II, III では同値なものになるが, Reidemeister 変形の I では帯のねじれ方がかわるため, 異なるものになる. 枠付き結び目の各成分のねじれ数とは, その成分をあらわす帯の 2 つの境界線がなす絡み目の絡み数 (linking number) のことである. 枠付き結び目を図示するときは, 対応する結び目の図に各成分のねじり数を書き加えて表示する. また, ねじり数を書かずに, 図での紐を表す線をそのまま太くして帯を表すと枠付き結び目 L となるような図もある. このような図のことを枠付き結び目として L を表す図と呼ぶ.

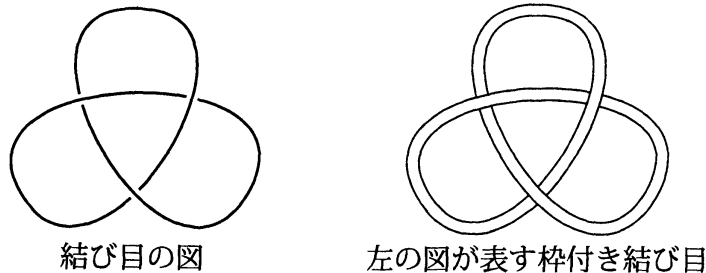


FIGURE 2. 枠付き結び目を表す図

3.2. **タングル.** 図のように四角の下辺に p 個, 上辺に q 個の点があり, これらの点を結ぶ線と四角内の閉じた線とでできる結び目の図のようなものを (p, q) タングルと呼ぶ. このとき, $p+q$ は偶数である. なお, 線には向きがついているものとする. また, タングルの図で線をそのまま太くして帯と考えたものを枠付きタングルと呼ぶ. 以下では, $p=q$ で, 上辺での点と下辺での点においてその点を端点とする線がどれも下向きに向き付けられているものとする.

3.3. **普遍不変量の構成.** T を (p, p) タングルで ℓ 個の閉じた線を含むものとする. そして, 極大, 極小点に対しては図のように id または K^{N-1} を対応させ, 正の交点に対して R , 負の交点に対して R^{-1} を対応させる. ただし, 交点において線が上から下に

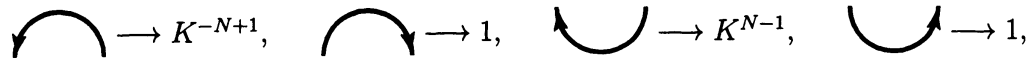


FIGURE 3. 極大, 極小点

向きづけられていないときは図 5 のように変形する. そして, T の各成分に対し, 閉

$$R = \sum_i a_i \otimes b_i, \quad R^{-1} = \sum_j a'_j \otimes b'_j \quad \text{とするとき}$$



FIGURE 4. 交点と R 行列の対応

じていない線に対しては終点を起点とし, 閉じた線に対してはその 1 点を起点として, そこからその成分の向きと逆方向にこの線たどって行って, 交点や極大, 極小点での

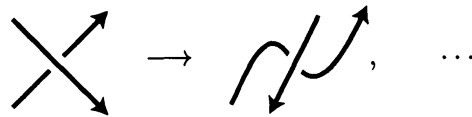


FIGURE 5. 交点の変形

$\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元を見ていき, これらを掛けていくことで $\otimes^{p+\ell} \widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+\ell}$ が定まる. これを $W(D_{y_1, \dots, y_\ell})$ とする. ここで y_1, \dots, y_ℓ は各成分での起点を表す. さらに, I を $\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の交換子の生成する両側イデアルとし, $\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ から $\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)/I$ への射影を π とすると, $(\text{id}^{\otimes p} \otimes \pi^{\otimes \ell})(W(D_{y_1, \dots, y_\ell}))$ は T の $\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes p} \otimes (\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)/I)^{\otimes \ell}$ に値をとる不変量となる. これを T の **普遍不変量** と呼ぶ.

3.4. **Symmetric linear function との合成.** さらに, f_1, f_2, \dots, f_ℓ を $\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の symmetric linear function とするとき, $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_\ell)(W(D_{y_1, \dots, y_\ell}))$ は \mathbb{C} に値をとる不変量となる. この不変量を $\Psi_{f_1, \dots, f_\ell}$ と書く. なお, f_i と f'_i が $\widehat{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ 上同じ symmetric linear function となるときは,

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_i \otimes \cdots \otimes f_\ell)(W(D_{y_1, \dots, y_\ell})) = (f_1 \otimes \cdots \otimes f'_i \otimes \cdots \otimes f_\ell)(W(D_{y_1, \dots, y_\ell}))$$

$$R = \sum_i a_i \otimes b_i, \quad R^{-1} = \sum_j a'_j \otimes b'_j \quad \text{と} \text{する} \text{と} \text{き}$$

$$\sum_{i,j,k,l,m} a_i \otimes b_l$$

$$\sum_{i,j,k,l,m} a'_i b'_j \otimes K^{1-N} b'_i a'_j b_k a_l b_m K^{1-N} a_k b_l a_m$$

FIGURE 6. 2成分結び目の普遍不変量の構成 (× は閉じた成分の起点)

となるので、以下では $\widehat{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の symmetric linear function だけを考える。各 f_i が X_s^+ のどれかと等しくなるとき、この不変量は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の s 次元表現に対応する colored Jones 不変量で $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/N)$ としたものと等しくなる。

3.5. **中心との合成.** D から定まる $W(D_{y_1, \dots, y_\ell}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_\ell$ と、 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の中心 \mathcal{Z} の元 z_1, z_2, \dots, z_ℓ に対し、

$$\Psi_{f_1, \dots, f_\ell}^{z_1, \dots, z_\ell} = (f_1 \otimes \dots \otimes f_\ell)((z_1 \otimes \dots, z_\ell) W(D_{y_1, \dots, y_\ell}))$$

もまた結び目の不変量となる。

3.6. **$SL(2, \mathcal{Z})$ の作用.** 中心 \mathcal{Z} に対し、[5] にあるように、次のようにして $SL(2, \mathbf{Z})$ の作用を定めることができる。まず、図のような正の一回ひねりに対応する $U'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元を τ とする。 τ は \mathcal{Z} の元となり、 τ の左作用により $\text{End } \mathcal{Z}$ の元に対応する。また、 D をホップリンクに対応する $(1, 1)$ タングルとする。このとき、 $W(D_{y_1, y_2})$ を $U'_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元で、2番目の成分が閉じた成分に対応しているものとする。このとき、 $(\text{id} \otimes \phi)(W(D_{y_1, y_2}))$ は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は \mathcal{Z} の元となる。さらに、 \mathcal{Z} の元 z に対し、 $(\text{id} \otimes \phi)((\text{id} \otimes z)W(D_{y_1, y_2}))$ も $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ となる。これにより定まる $\text{End } \mathcal{Z}$ の元を σ とする。

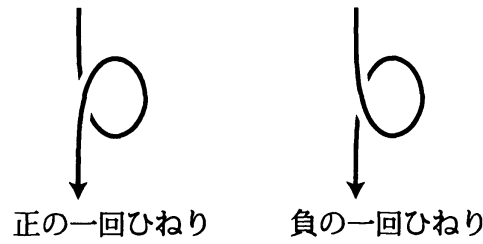


FIGURE 7. ひねり

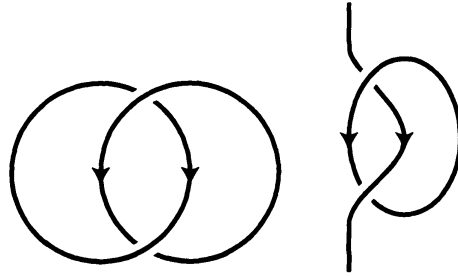


FIGURE 8. ホップリンクと対応する (1,1) タングル

$SL(2, \mathbf{Z})$ の生成元

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, T を τ に, S を σ に対応させることで $SL(2, \mathbf{Z})$ の $\text{End } \mathcal{Z}$ への表現が得られる.

4. 3次元多様体の HENNINGS 不変量

4.1. **Kirby 変形.** 任意の3次元多様体は, S^3 中の枠付き結び目から「手術」(surgery) という操作により得られることが知られている. また, 2つの枠付き結び目が次の KI, KII という2種類の Kirby 変形により移り合うとき, 同相な3次元多様体となることが知られている.

4.2. **Right integral と Kirby 変形.** KII 変形で移り合う2つの枠付き結び目の図 D_1, D_2 に対し,

$$W(D_1) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_\ell$$

とするとき,

$$W(D_2) = (\Delta(x_1) \otimes \text{id}^{\otimes \ell-2}) (\text{id} \otimes K^{N-1} x_2 \otimes x_3 \otimes \cdots \otimes x_\ell)$$

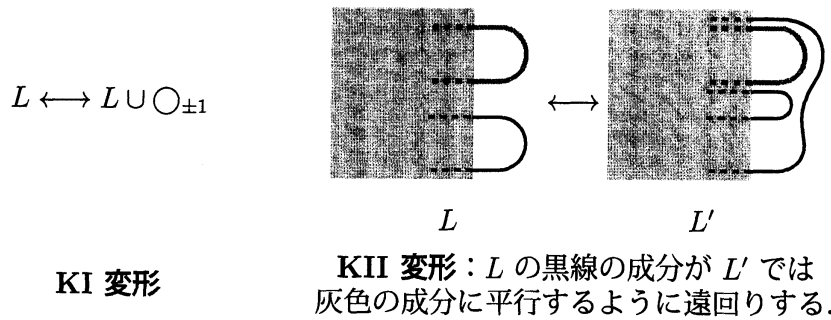


FIGURE 9. Kirby 変形

となっている. ここで $W(D_1)$ と $W(D_2)$ に $\phi \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id}$ を適用すると

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \text{id}^{\ell-1})(W(D_1)) &= \phi(x_1)(x_2 \otimes \cdots \otimes x_\ell), \\ (\phi \otimes \text{id}^{\ell-1})(W(D_2)) &= (\phi \otimes \text{id}^{\ell-1})((\Delta(x_1) \otimes \text{id}^{\otimes \ell-2})(\text{id} \otimes K^{N-1} x_2 \otimes \cdots \otimes x_\ell)) \\ &= (\lambda \otimes \text{id}^{\ell-1})((\Delta(x_1) \otimes \text{id}^{\otimes \ell-2})(K^{N-1} \otimes K^{N-1} x_2 \otimes \cdots \otimes x_\ell)) \\ &= (\lambda \otimes \text{id}^{\ell-1})((\Delta(K^{N-1} x_1) \otimes \text{id}^{\otimes \ell-2})(\text{id} \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_\ell)) \end{aligned}$$

となるが,

$$(\lambda \otimes \text{id})(\Delta(x)) = \lambda(x) 1$$

なので

$$\begin{aligned} (\phi \otimes \text{id}^{\ell-1})(W(D_2)) &= \lambda(K^{N-1} x_1)(x_2 \otimes \cdots \otimes x_\ell) \\ &= \phi(x_1)(x_2 \otimes \cdots \otimes x_\ell) \end{aligned}$$

となり,

$$(\phi \otimes \text{id}^{\ell-1})(W(D_1)) = (\phi \otimes \text{id}^{\ell-1})(W(D_2))$$

となる. この関係式から, KII 変形で移り合う 2 つの枠付き結び目 D_1, D_2 に対し,

$$\Psi_{\phi, \dots, \phi}(D_1) = \Psi_{\phi, \dots, \phi}(D_2)$$

となる.

4.3. 3次元多様体の不変量. 成分が L_1, L_2, \dots, L_ℓ の ℓ 個ある結び目 L の L_i と L_j の絡み数を l_{ij} とする. 絡み数 (linking number) とは, 一方の成分が他方の成分のまわりを右回りに何回まわるかを表したものである. また, 絡み数行列 (linking matrix) $lk(L)$ とは, l_{ij} を (i, j) 成分とする行列で, l_{ii} は i 成分の帯のねじりを表すねじり数とする. そして, $lk(L)$ の正の固有値の数を $\sigma_+(L)$, 負の固有値の数を $\sigma_-(L)$ とする.

D を L の枠付き結び目としての図とし, $H(L)$ を次で定める. U_+, U_- を 1 成分の自明な結び目で, ねじり数がそれぞれ $1, -1$ のものとし

$$H(L) = \Psi_\phi(U_+)^{-\sigma_+(L)} \Psi_\phi(U_-)^{-\sigma_-(L)} \Psi_{\phi, \dots, \psi}(D)$$

とする,

4.4. **定理 (Hennings [7]).** M_L を L の手術によりできる 3 次元多様体とし, D を L の枠付き結び目としての図とすると $H(L)$ は M_L の不変量となる.

以下では $H(L)$ を $H(M_L)$ とも書く. N が奇数のとき, $H(M_L)$ は 3 次元多様体の $SO(3)$ に対応する Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量 $\tau(M_L)$ で表されることが知られている.

4.5. **定理 (Chen-Kupum-Slinivasan [3]).** N が奇数のとき

$$H(M_L) = h(M_L) \tau_N(M_L)$$

である. 但し $h(M_L)$ は M_L の 1 次元ホモロジー群の位数が有限のときはその位数, 位数が無限大のときは 0 であり, 先に定義した L の絡み数行列の行列式に等しい数である.

4.6. **中心と Hennings 不変量との関係.** $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_\ell$ と成分で表し, L_1 を切り開いてできる $(1, 1)$ タングルを T とする. このとき, $W(T)$ の 2 番目以降の成分に ϕ を適用して得られる $\tilde{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元は中心 \mathcal{Z} の元となる. この元を $z(T)$ とし, \mathcal{Z} の基底 $\kappa_s, \rho_s, \varphi_s$ の一次結合として

$$z(T) = \sum_{s=0}^N \alpha_s(T) \kappa_s + \sum_{s=1}^{N-1} \beta_s(T) \rho_s + \sum_{s=1}^{N-1} \gamma_s(T) \varphi_s$$

と表されるものとする. このとき, $H(M_L) = \phi(z(T) K^{1-N})$ であるが,

$$\phi(\kappa_s K^{1-N}) = 0, \quad \phi(\varphi_s K^{1-N}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\phi(\rho_s K^{1-N}) &= c_N \left(\frac{N-s}{N} (q^{(1-N)(s-1)} + q^{(1-N)(s-3)} + \dots + q^{(1-N)(-s+1)}) - \right. \\
&\quad \left. \frac{s}{N} (q^{(1-N)(-s-1)} + q^{(1-N)(-s-3)} + \dots + q^{(1-N)(-2N+s+1)}) \right) \\
&= c_N (-1)^s \left(\frac{N-s}{N} (q^{s-1} + q^{s-3} + \dots + q^{-s+1}) - \right. \\
&\quad \left. \frac{s}{N} (q^{-s-1} + q^{-s-3} + \dots + q^{-2N+s+1}) \right) \\
&= c_N (-1)^s [s]
\end{aligned}$$

であるので、結局

$$\Psi_{\phi, \dots, \phi}(L) = c_N \sum_{s=1}^{N-1} (-1)^s [s] \beta_s(T)$$

となる。このことから、Hennings 不変量 $H(M_L)$ を決定する情報は ρ_s の係数だけが持っていることがわかる。

5. LOGARITHMIC 不変量

いよいよ、目標であった logarithmic 不変量の 3次元多様体中の枠付き結び目の不変量への拡張について述べよう。

5.1. 3次元多様体中の結び目. M を境界のない 3次元多様体、 $\tilde{K} = \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2 \cup \dots \cup \tilde{K}_m$ をその中の m 個の成分を持つ枠付き結び目とする。 M が S^3 中の枠付き結び目 $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_\ell$ という ℓ 成分の結び目の手術によって得られるものとする。このとき、必要なら \tilde{K} を動かして、 S^3 から L の管状近傍を除いたものの M での像に \tilde{K} が含まれるようにできる。そこで、この \tilde{K} に対応する S^3 の結び目を $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ とする。すなわち、 M とその中の結び目 \tilde{K} との組は、 S^3 とその中の枠付き結び目 $K \cup L$ を、 L に沿って手術することにより得ることができる。

5.2. Kirby 変形. S^3 中の互いに交わらない枠付き結び目の組 (K, L) に対し、 L に沿って手術することで M_L 中の結び目が得られる。 S^3 中の 2つの枠付き結び目の組 (K, L) と (K', L') に対し、 L から L' への Kirby 変形が存在すればこの 2組は同相な多様体の同値な結び目を表す。さらに、KII 変形として、KII 変形の図 9 での黒線の成分として K または K' の成分が対応し、灰色の成分として L または L' の成分が対応するものも同相な多様体の同値な結び目同士の変形を与える。

逆に、同相な多様体中の同値な結び目が 2つの枠付き結び目の組 (K, L) と (K', L') で与えられているときは、 L, L' に関する KI, KII 変形と、上のように拡張された KII

変形とを何回か繰り返し適用することで (K, L) から (K', L') へ変形できることが知られている。

5.3. **ホモロジー球面中の枠付き結び目.** 3次元多様体 M がホモロジー球面とは、 M のホモロジー群が S^3 のホモロジー群と同型なものである。このとき、 M が S^3 中の枠付き結び目 L の手術でできているとすると、 L の絡み数行列 $lk(L)$ の行列式は ± 1 である。また、 M 中の結び目 \tilde{K} に対し、必要なら Kirby 変形を適用して \tilde{K} の S^3 での像 K の各成分と L の各成分との絡み数が 0 となるようにできる。このときの K のねじり数を \tilde{K} のねじり数とする。

5.4. **3次元多様体中の結び目の普遍不変量.** 3次元多様体 M 中の結び目 \tilde{K} が、 S^3 中の互いに交わらない結び目の組 (K, L) から L に沿った手術で構成されているとき、 $K \cup L$ の L の部分に対して ϕ を適用してできる普遍不変量を $\tilde{H}(K, L)$ とする。すなわち

$$\tilde{H}(K, L) = (\pi^{\otimes m} \otimes \phi^{\otimes \ell}) W(D_{y_1, \dots, y_m})$$

である。ここで D は $K \cup L$ の図とし、 y_1, \dots, y_m は普遍不変量を求めるための K_1, \dots, K_m 成分の起点を表す。 $\tilde{H}(K, L)$ は $\tilde{U}_q(sl_2)^{\otimes m}$ の元であり、 L の各成分にそった KII 変形で不変である。 $\tilde{H}(K, L)$ を L の絡み数行列から定まる $\sigma_+(L)$ と $\sigma_-(L)$ で次のように補正したものを $H(K, L)$ とする。

$$H(K, L) = \Psi_\phi(U_+)^{-\sigma_+(L)} \Psi_\phi(U_-)^{-\sigma_-(L)} \tilde{H}(K, L).$$

5.5. **定理.** 上で定めた $H(K, L)$ は M_L 中の枠付き結び目 \tilde{K} の不変量である。

$H(K, L)$ を M_L 中の枠付き結び目 \tilde{K} の **普遍不変量** と呼ぶ。

また、 M_L がホモロジー球面のときは、 \tilde{K} の各成分のねじり数を f_1, f_2, \dots, f_m とし、 ± 1 回ねじり $T_{\pm 1}$ に対応する $W(T_{\pm 1})$ をもちいて

$$\bar{H}(K, L) = (W(T_{-\text{sign}(f_1)})^{|f_1|} \otimes \dots \otimes W(T_{-\text{sign}(f_m)})^{|f_m|}) H(K, L)$$

とすると $\bar{H}(K, L)$ は (枠付きでない) 結び目の不変量となる。

5.6. **Symmetric linear function から得られる不変量.** M_L 中の枠付き結び目 \tilde{K} の普遍不変量 $H(K, L)$ に対し、 K の各成分に symmetric linear function f_1, \dots, f_m を対応させたものを $\Psi_{f_1, \dots, f_m}(\tilde{K})$ とする。すなわち

$$\Psi_{f_1, \dots, f_m}(\tilde{K}) = (f_1 \otimes \dots \otimes f_m) H(K, L)$$

である. f_i がどれも X_0^\pm, \dots, X_N^\pm のどれかと等しいときは, $\Psi_{f_1, \dots, f_m}(\tilde{K})$ は colored Jones 不変量で表すことのできる不変量であるが, そのいくつかは G_1, \dots, G_{N-1} のどれかと等しいときは, 知られている不変量で表すことができるかどうかはまだわかっていない.

5.7. 中心から得られる不変量. M_L 中の枠付き結び目 \tilde{K} を表す結び目の組 (K, L) に対し, K の成分 K_1 を切り開いてできる $(1, 1)$ タングルを T とする. また, $H(T, L)$ を, $H(K, L)$ のときと同様に L に対して ϕ を適応し, $\sigma_\pm(L)$ で補正したものとする. このとき, $T \cup L$ に対して,

$$P_{s_2, \dots, s_m}(T \cup L) = (\text{id} \otimes X_{s_2} \otimes X_{s_3} \otimes \dots \otimes X_{s_m}) H(T, L)$$

とすると, $P_{s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ は $\tilde{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の中心 \mathcal{Z} の元となる. これを e_s, w_s^\pm の一次結合で表す.

$$P_{s_2, \dots, s_m}(T \cup L) = \sum_{s_1=0}^N a_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) e_{s_1} + \sum_{s_1=1}^{N-1} (b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^+(T \cup L) w_s^+ + b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^-(T \cup L) w_s^-)$$

このとき, $a_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ は $m = 1$ のときは $\Psi_{X_{s_1}^+}(\tilde{K})$ で表すことができ, $m \geq 2$ のときは 0 となる. また, $b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^\pm(T \cup L)$ については, 後 (定理 6.7) で述べるように, S^3 中の結び目で定義されている colored Alexander 不変量を一般化したもので表すことができる. この表示から, $b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^\pm(T \cup L)$ を適切に補正することによって, T を得るために切り開く K の成分の取り方にはよらない \tilde{K} の不変量が得られる.

5.8. $\kappa_s, \rho_s, \varphi_s$ による表示. 上で求めた中心 \mathcal{Z} の元 $P_{s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ は e_s, w_s^\pm でなく, \mathcal{Z} の別の基底 $\kappa_s, \rho_s, \varphi_s$ の一次結合としても次のように表すことができる.

$$\sum_{s_1=1}^{N-1} (\alpha_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) \rho_s + \beta_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) \varphi_s) + \sum_{s_1=0}^N \gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) \kappa_s$$

このとき

$$\begin{aligned} \alpha_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) &= (-1)^{N+s} N (q^s - q^{-s}) a_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L), \\ \beta_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) &= [s]^2 (b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^+(T \cup L) - b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^-(T \cup L)), \\ \gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) &= [s]^2 \left(\frac{s}{N} b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^+(T \cup L) + \frac{N-s}{N} b_{s_1, s_2, \dots, s_m}^-(T \cup L) \right) + \\ &\quad (q^s + q^{-s}) a_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L) \end{aligned}$$

となる。これらは logarithmic conformal field theory とも深く関係しているので、 $\alpha_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$, $\beta_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$, $\gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ を \tilde{K} を logarithmic 不変量 と呼ぶことにする。

5.9. $\gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ の特殊性. 上で求めた $\alpha_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$, $\beta_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ はどちらも $P_{s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ に K^{1-N} をかけたもの、すなわち、 $T \cup L$ の普遍不変量の 2 番目以降の成分に symmetric linear function を適用したものに X_s もしくは G_s という symmetric linear function を適用することで求めることができる。それに対し、 $\gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ は、 $T \cup L$ の普遍不変量に symmetric linear function を適用することでは得ることができない。また、 $\alpha_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$, $\beta_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ はどちらも N に関する double scaling limit を考えると指数関数的な増大度よりも小さくなるのに対し、 $\gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ は、多くの場合指数関数的に増大する。

さらに、前に述べた $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用に関しても $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N$ は閉じており、WRT 不変量に対応する $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用とは異なっている。例えば、 S 行列に対応する WRT の場合の作用は \sin に関する離散フーリエ変換であるのに対し、 κ_s に対する作用では、 \cos に関する離散フーリエ変換になっている。

以上のように、 $\alpha_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$, $\beta_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ と $\gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ とは大変異なった性質を持っており、また、 $\gamma_{N, N, \dots, N}(T \cup L)$ が Kashaev の不変量の一般化とも考えられることから、logarithmic 不変量の中でも特に $\gamma_{s_1, s_2, \dots, s_m}(T \cup L)$ が大変興味深い。

6. COLORED ALEXANDER 不変量

ここでは Akutsu-Deguchi-Ohtsuki [1] で導入され、[14] で具体例が計算されている colored Alexander 不変量を導入し、これを用いて logarithmic 不変量を表し、定理 5.5 に必要な性質を示す。

6.1. 中ぐらいの量子群. まず、中ぐらいの量子群 $\bar{U}_q(sl_2)$ を導入する。これは $U_q(sl_2)$ で $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/N)$ としたものに $F^N = E^N = 0$ という条件を付加した無限次元のホップ代数である。この $\bar{U}_q(sl_2)$ に $K^{2N} = 1$ という条件を付加することで小さな量子群 $\tilde{U}_q(sl_2)$ が得られ、 $\tilde{U}_q(sl_2)$ の表現は $\bar{U}_q(sl_2)$ の表現とも見ることができる。

6.2. 最高ウェイト表現. 整数ではない任意の複素数 λ に対し、 λ (もしくは q^λ) を最高ウェイトとする中ぐらいの量子群 $\bar{U}_q(sl_2)$ の既約な最高ウェイト表現 V^λ が存在す

る。これは N 次元であり、基底を e_0, e_1, \dots, e_{N-1} とするとき、作用は

$$\begin{aligned} K e_j &= q^{\lambda-1-2j} e_j, \\ E e_j &= [j][\lambda-1-j] e_{j-1}, \quad (e_{-1} = 0) \\ F e_j &= e_{j+1} \quad (e_N = 0) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 $q^\lambda = \exp(\pi\sqrt{-1}\lambda/N)$ である。この表現は λ を整数 s としたときは既約でなくなり、 $\mathcal{X}_{(s \bmod N)}^+ \oplus \mathcal{X}_{(s \bmod N)}^-$ と同型になる。

6.3. R -行列. $\bar{U}_q(sl_2)$ の普遍 R -行列にあたるものとして、次のものを考える。

$$R = q^{\frac{1}{2}H \otimes H} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]!} q^{m(m-1)/2} (E^m \otimes F^m)$$

ここで H は $K = q^H = \exp(\pi\sqrt{-1}H/N)$ となる元で $\bar{U}_q(sl_2)$ の任意の 2 つの表現のベクトル u, v で $Ku = q^\mu u, Kv = q^\nu v$ を満たすものについて

$$(H \otimes H)(u \otimes v) = \mu\nu(u \otimes v)$$

となるものとする。このとき

$$q^{\frac{1}{2}H \otimes H}(u \otimes v) = \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}\mu\nu}{2N}\right) u \otimes v = q^{\frac{1}{2}\mu\nu} u \otimes v$$

となる。この R -行列を小さな量子群を経由して小さな量子群の表現で見たものは、小さな量子群の R -行列を同じ表現で見たものと一致している。

6.4. Colored Alexander 不変量. ℓ 個の成分 L_1, \dots, L_ℓ を持つ枠付き結び目 L に対し、 T を K の L_1 成分を切り開いてできる $(1, 1)$ タングルとする。また、 $\bar{U}'_q(sl_2)$ を $\bar{U}_q(sl_2)$ に H を加えたものとする。そして、 $\hat{U}_q(sl_2)$ に対する普遍不変量を定義したときと同様に、 $\bar{U}'_q(sl_2)$ に対応する不変量を次のように定義する。まず、極大、極小点に対しては図 10 のように id または K^{N-1} を対応させ、さらに正の交点に対して R 、負の交点に対して R^{-1} を対応させる。ただし、交点において線が上から下に向きづけられて

$$\begin{array}{cccc} \text{↘} \text{---} \text{↗} & \rightarrow K^{-N+1}, & \text{↘} \text{---} \text{↘} & \rightarrow 1, & \text{↗} \text{---} \text{↗} & \rightarrow K^{N-1}, & \text{↗} \text{---} \text{↘} & \rightarrow 1, \end{array}$$

FIGURE 10. 極大、極小点

いないときは前と同様に図 5 のように変形する。そして、 T の各成分に対し、閉じていない線に対しては終点を起点とし、閉じた線に対してはその 1 点を起点として、そこからその成分の向きと逆方向にこの線たどって行って、交点や極大、極小点での $\bar{U}'_q(sl_2)$

$$R = \sum_i a_i \otimes b_i, \quad R^{-1} = \sum_j a'_j \otimes b'_j \quad \text{と} \text{する} \text{と} \text{き}$$

FIGURE 11. 交点と R 行列の対応

の元を見ていき、これらを掛けていくことで $\bigotimes^{p+\ell} \bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_\ell$ が定まる。これを $W(D_{y_2, \dots, y_\ell})$ とする。ここで y_2, \dots, y_ℓ は L_2, \dots, L_ℓ 成分での起点を表す。さらに、 I を $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の交換子の生成する両側イデアルとし、 $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ から $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)/I$ への射影を π とすると、 $(\text{id} \otimes \pi^{\otimes(\ell-1)})(W(D_{y_2, \dots, y_\ell}))$ は T の $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes (\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)/I)^{\otimes(\ell-1)}$ に値をとる不変量となる。これは T の $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ に関する普遍不変量である。

さて、 $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現

$$\rho_\lambda : \bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow \text{End}(V_\lambda)$$

に対し、その指標（トレース）を V_λ する。 L_1, \dots, L_ℓ に表現 $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_\ell}$ を対応させ、

$$(\text{id} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_\ell})(W(D))$$

という $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の元を考えると、これは $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の元と可換になり、 $\bar{U}'_q(\mathfrak{sl}_2)$ の中心に入ることがわかるので、 V_λ への表現 $\rho_\lambda((\text{id} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_\ell})(W(D)))$ はスカラー行列となる。この行列に対応するスカラーを $O_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell}(T)$ とする。 $O_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell}(T)$ はタンゲル T の不変量である。

さらに

$$d_\lambda = \frac{1}{[\lambda + N - 1][\lambda + N - 2] \cdots [\lambda + 1]}$$

とし

$$\Phi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell}(T) = d_\lambda O_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell}(T)$$

とすると次が知られている。

6.5. **定理.** (Akutsu-Deguchi-Ohtsuki [1]) $\Phi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell}(T)$ は K をタンゲルにするときの成分 L_1 の選び方によらず、結び目 L の不変量である。

この不変量のことを **colored Alexander 不変量** あるいは **ADO 不変量** と呼ぶ。

6.6. **Logarithmic 不変量との関係.** まず colored Alexander 不変量を 3次元多様体中の結び目に拡張してみよう. 3次元多様体 M 中の結び目 \tilde{K} に対し, 前でもやったように, M を S^3 中の枠付き結び目の手術で得られるものとし, この構成での \tilde{K} の S^3 での像を K とする. K のある成分で切り開いてできるタングルを T とし, D を $T \cup L$ に対応する図とし, $H(K, L) \in \overline{U}(sl_2)^{\otimes m}$ を前に定義した普遍不変量とする. さて, 以前に導入した $\widehat{U}_q(sl_2)$ の symmetric linear function は, $\overline{U}_q(sl_2)$ から $\widehat{U}_q(sl_2)$ への自然な射影を通じて, $\overline{U}_q(sl_2)$ の symmetric linear function とも見なすことができる. 特に, $\widehat{U}_q(sl_2)$ の right integral から構成した ϕ も $\overline{U}_q(sl_2)$ の symmetric linear function と見なすことができる. K の成分数を p , L の成分数を ℓ とする. 表現行列

$$\rho_{\lambda_1}((\text{id} \otimes V_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_m})(H(K, L)))$$

は中心の既約表現での表現となるのでスカラー行列となる. このスカラーを $O_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(D)$ とする. さらに

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(D) = d_{\lambda_1} O_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(D)$$

とする. ϕ は中ぐらいの量子群 $\overline{U}_q(sl_2)$ でも定義されるが, 小さい量子群 $\widehat{U}_q(sl_2)$ の元 x に対して成り立つ関係式 $(\mu \otimes 1)\Delta(x) = \mu(x)1$ は $\overline{U}_q(sl_2)$ では成り立たず, 整数でない $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ に対しては, $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(D)$ は \tilde{K} の不変量ではない. $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(D)$ は $K \cup L$ の不変量にはなるのだが, K の成分と L の成分に関する KII 変型では不変ではないのである.

しかし $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を整数 s_1, \dots, s_m にした極限により logarithmic 不変量が以下のように表される.

$$\begin{aligned} b_{s_1, \dots, s_m}^+(K \cup L) &= \\ \frac{N \sqrt{-1}^{N-1} (-1)^{s_1}}{[s_1]^2} \lim_{\lambda \rightarrow 2N - s_1 - 1} & \left(\Phi_{\lambda, \dots, \lambda_m}^N(K \cup L) + \Phi_{\lambda - 2N + 2s_1, \dots, \lambda_m}^N(K \cup L) \right) \\ & - \frac{2 \cos\left(\frac{s_1 \pi}{N}\right)}{[s_1]^2} a_{s_1, \dots, s_m}(K \cup L), \\ b_{s_1, \dots, s_m}^-(K \cup L) &= \\ \frac{N \sqrt{-1}^{N-1} (-1)^{s_1}}{[s_1]^2} \lim_{\lambda \rightarrow s_1 - 1} & \left(\Phi_{\lambda, \dots, \lambda_m}^N(K \cup L) + \Phi_{\lambda - 2s_1, \dots, \lambda_m}^N(K \cup L) \right) \\ & - \frac{2 \cos\left(\frac{s_1 \pi}{N}\right)}{[s_1]^2} a_{s_1, \dots, s_m}(K \cup L). \end{aligned}$$

ここで $a_{s_1, \dots, s_m}(K \cup L)$ は K をタングルにするときの切り開く成分によるように見える不変量であるが、実際は $m \geq 2$ のときは 0 となり、このような成分の取り方によらない不変量である。従って、次を得る。

6.7. **定理.** Logarithmic 不変量 $a_{s_1, \dots, s_m}(K \cup L)$, $\frac{[s_1]^2}{N\sqrt{-1}^{N-1}(-1)^{s_1}} b_{s_1, \dots, s_m}^\pm(K \cup L)$ は K をタングルにするときの切り開く成分の取り方によらない、 \tilde{K} の不変量である。

なお、 d_{λ_1} が λ_1 が整数のところ極を持つので、 $\Phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^N(L)$ も λ_1 が整数のところ極を持つが、 Φ を 2 つ足すことによりこれらの極は消える。また、 $m \geq 2$ の場合は、 $\Phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^N(K \cup L)$ が K の成分に対して対称で、 $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ については極を持たないことから、 $\Phi_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^N(K \cup L)$ が λ_1 についても極を持たないことがわかる。

7. LOGARITHMIC 不変量に対応する量子 $6j$ -記号

上で構成した logarithmic 不変量と双曲体積の関係については、実はまだ具体的にはよくわかっていないのだが、この不変量に対応する量子 $6j$ -記号と双曲切頭四面体の体積との関係がわかっているので、このことについて紹介する。

7.1. **量子 $6j$ -記号の構成.** Kirillov と Reshetikhin による量子 $6j$ -記号の構成法をまねた colored Alexander 不変量に関する $6j$ -記号の構成が [4] で与えられており、次のようになる。まず、四面体に対応する辺に向きのついたグラフの各辺に、図のように表現を表す整数でない複素数のパラメータを対応させる。ただし、パラメータは 2 つの表現のテンソル積の分解に対応する次の条件を満たすものとする。

$$a + b - e, a + f - c, b + d - f, d + e - c \in 2\mathbf{Z} + 1$$

このとき、

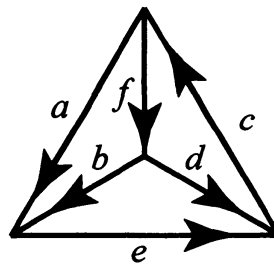


FIGURE 12. 辺に向きとラベルのついた四面体

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{bmatrix} = (-1)^{N-1} \frac{\{B_{dec}\}! \{B_{abe}\}!}{\{B_{bdf}\}! \{B_{afc}\}!} \begin{bmatrix} e \\ A_{abe} - N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ B_{ecd} \end{bmatrix}^{-1} \\ \sum_{z=m}^M \begin{bmatrix} A_{afc} - N \\ c + z + 1 - N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{acf} + z \\ B_{acf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{bfd} + B_{dec} - z \\ B_{bfd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{dce} + z \\ B_{dfb} \end{bmatrix}.$$

ただし

$$A_{abc} = \frac{a+b+c+1}{2}, \quad B_{abc} = \frac{a+b-c-1}{2}, \\ m = \max(0, N-c, \frac{b-c+e+f}{2} - N, \frac{-b-c+e+f}{2}), \\ M = \min(B_{dec}, B_{afc}, N-1-B_{acf}, N-1-B_{dce})$$

である。

7.2. **注意.** 上で定義した $6j$ -記号は $\begin{bmatrix} e \\ B_{ecd} \end{bmatrix}^{-1}$ の項があることから、 e が整数のところで極があるように見えるのだが、他のパラメータに関しては極はなく、四面体の対称性から、 e についての極もないことがわかる。よって、この $6j$ -記号はパラメータが整数の場合にも意味があるが、以前から知られていた量子 $6j$ -記号とは異なるものであり、小さな量子群に特有のものである。また、整数パラメータの場合は、 z に関する和の各項が実数になるのは以前のものと同様だが、各項の符号が同符号になるところが以前のものとは大きく異なる点である。

7.3. **切頭四面体の体積との関係.** 上で定義された $6j$ -記号は双曲切頭四面体の体積と関係している。3次元の双曲幾何では、通常の四面体に加え、その頂点を無限に遠くに移動した極限を考えた理想四面体と呼ばれるものがよく使われるが、この頂点を、さらに無限大よりも遠くに移動したものは、これは双曲空間の射影モデルにおいて、頂点が双曲空間の無限遠面を表す球面よりも外にでてしまった場合の四面体も考えることができ、この場合は、頂点の代わりに、頂点をなす3つの側面すべてに直交する双曲平面で切り取ってできる図のような立体が考えられる。この四面体のことを切頭四面体と呼ぶ。双曲空間では、四面体の形は各辺でその2つの面がなす角により決まるのだが、頂点に集まる3辺での各の和が π より小さいときは、対応する頂点において、上に述べたように面で切り取ったもの考えるのである。

上で定義された $6j$ -記号と切頭四面体の体積との間には次の関係が成り立つ。

7.4. **定理** (Costantino-Murakami [4]). T を各辺が図 14 のようにラベル付けされた双曲切頭四面体とする。角 $0 < \theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d, \theta_e, \theta_f < \pi$ を各辺での2つの面がなす角とする。頂点に集まる3本の辺に対応する3つの角 $\theta_i, \theta_j, \theta_k$ は $\theta_i + \theta_j + \theta_k < \pi$ を満たす。

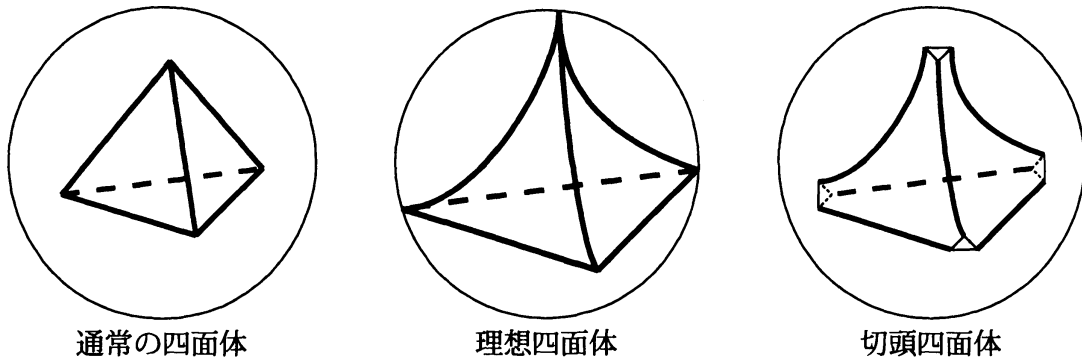
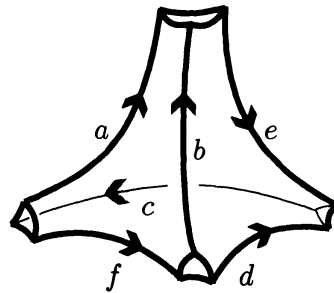


FIGURE 13. 様々な双曲四面体

正の整数の列 $a_N, b_N, c_N, d_N, e_N, f_N$ を $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi a_N}{2N} = \pi - \theta_a, \dots, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi f_N}{2N} = \pi - \theta_f$ を満たすようにとる. さらに $\bar{a}_N = 2N - a_N, \dots, \bar{f}_N = 2N - f_N$ とすると, T の体積 $\text{Vol}(T)$ は次で与えられる.

$$\text{Vol}(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2N} \log \left(\begin{bmatrix} a_N & b_N & e_N \\ d_N & c_N & f_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_N & \bar{b}_N & \bar{e}_N \\ \bar{d}_N & \bar{c}_N & \bar{f}_N \end{bmatrix} \right).$$

FIGURE 14. 切頭四面体 T

7.5. 注意. Kirillov-Reshetikhin による量子 $6j$ -記号からも [16] にあるように同様な極限を考え, 形式的に鞍点法を適用することで, 通常の変曲四面体の体積を得ることができるが, 鞍点法で求まる値は本当の極限とは異なっている. それに対し, 今回構成した $6j$ -記号からは本当の極限と鞍点法による極限とが一致し, 極限として体積が得られる.

8. 最後に

ここまで、3次元多様体中の結び目に対する logarithmic 不変量の構成と、対応する $6j$ -記号の双曲体積との対応をみてきた。また、ここでは述べなかったが、[4] で colored Alexander 不変量をこの新しい $6j$ -記号を用いて構成する方法が与えられている。さらに、logarithmic 不変量が colored Alexander 不変量の極限として表されることを考え合わせると、logarithmic 不変量が何らかの意味で双曲体積と関係していることは間違いないように思えるのだが、次の点が具体例での計算を困難にしている。

1. 大きな数の交代和の処理

これは鞍点法により解決できるものであるが、鞍点法を使えるかどうかの厳密なチェックができていない。

2. $\frac{0}{0}$ 型の極限の処理

これはロピタルの定理により計算できるものであるが、 q -階乗など微分すると項の数が非常に増えてしまって計算が難しくなる。

しかし、なんとかして、3次元多様体中の結び目の logarithmic 不変量と双曲体積との具体的な対応を見つけたいと考えている。

Logarithmic 不変量の応用として、幾何構造の量子化がある。ここで新たに定義された量子 $6j$ -記号を用いて写像類群や TQFT (topological quantum field theory) が構成できる。この構成は、穴あき曲面を三角形分割したときの辺に対し有限個の状態を対応させるものとなり、辺に関する幾何情報に対し一種の量子化を行っているように思える。実際には、上で述べた2番目の問題を解決する必要が出てくるが、これを克服して具体的な性質を明らかにしたい。また、双曲体積から出発した量子化としては、現在量子 dilog 関数を用いたものが盛んに研究されているので、これとの関係についても明らかにできたらと考えている。

REFERENCES

- [1] Y. Akutsu, T. Deguchi, and T. Ohtsuki, Invariants of colored links. *J. Knot Theory Ramifications* 1 (1992), no. 2, 161–184.
- [2] Y. Arike, A construction of symmetric linear functions on the restricted quantum group $U_q(sl_2)$. *Osaka J. Math.* 47 (2010), no. 2, 535–557.
- [3] Q. Chen, S. Kuppum and P. Srinivasan, On the relation between the WRT invariant and the Hennings invariant. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 146 (2009), no. 1, 151–163.

- [4] F. Costantino and J. Murakami, On $SL(2, \mathbb{C})$ quantum 6j-symbol and its relation to the hyperbolic volume, arXiv:1005.4277.
- [5] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov and I. Yu. Tipunin, Modular group representations and fusion in logarithmic conformal field theories and in the quantum group center. *Comm. Math. Phys.* **265** (2006), no. 1, 47–93.
- [6] N. Geer, B. Patureau-Mirand and V. Turaev, Modified quantum dimensions and re-normalized link invariants. *Compos. Math.* **145** (2009), no. 1, 196–212.
- [7] M. Hennings, Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras. *J. London Math. Soc. (2)* **54** (1996), no. 3, 594–624.
- [8] M. Jimbo, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー東京, 1990.
- [9] R. M. Kashaev, The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm. *Lett. Math. Phys.* **39** (1997), no. 3, 269–275.
- [10] T. Kerler, Mapping class group actions on quantum doubles. *Comm. Math. Phys.* **168** (1995), no. 2, 353–388.
- [11] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, Representations of the algebra $\mathcal{U}_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links. *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, 285–339, Adv. Ser. Math. Phys., **7**, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [12] R. J. Lawrence, *A universal link invariant using quantum groups*. Differential geometric methods in theoretical physics (Chester, 1988), 55–63, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [13] H. Murakami and J. Murakami, The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot. *Acta Math.* **186** (2001), no. 1, 85–104.
- [14] J. Murakami, Colored Alexander invariants and cone-manifolds. *Osaka J. Math.* **45** (2008), no. 2, 541–564.
- [15] J. Murakami and K. Nagatomo, Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups. *Internat. J. Math.* **19** (2008), no. 10, 1203–1213.
- [16] J. Murakami and M. Yano, On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron. *Comm. Anal. Geom.* **13** (2005), no. 2, 379–400.
- [17] T. Ohtsuki, Colored ribbon Hopf algebras and universal invariants of framed links. *J. Knot Theory Ramifications* **2** (1993), no. 2, 211–232.

Department of Mathematics
 Faculty of Science and Engineering
 Waseda University
 Tokyo 169-8555
 Japan
 E-mail address: murakami@waseda.jp