

# Diagram 代数の cell 構造

琉球大学 理学部 数理科学科 小須田 雅 (Masashi Kosuda)  
kosuda@math.u-ryukyu.ac.jp

## 1 はじめに

対称群の積が、あみだくじの図の結合として表されることは、よく知られているが、これと同じように、結合代数の中には、その基底に長方形の領域に描かれた図式 (diagram) を対応させることにより、基底の積を図式の結合として解釈することで、代数構造を視覚的に理解できるようになるものがある。対称群の群環に  $q$ -変形を行なった Iwahori-Hecke 代数 [6, 23] やその商環として得られる Temperley-Lieb 代数 [3], Brauer 代数 [2, 24] とその  $q$ -変形である BMW 代数 [20], Walled Brauer 代数 [15, 9] など、古典群やその量子変形のテンソル積表現の中心化環として得られる代数の多くは、この性質を持つ。これらは古典群や中心化環そのものの研究ばかりでなく、図式の対応から結び目や絡み目の不変量の研究などにも利用されている。古典群ではないものから得られる同種の結合代数 (基底に図式が対応する代数) として、Partition 代数 [7, 16, 17, 18, 25], Party 代数 [22, 11, 12] などがある。これら一連の代数を diagram 代数と呼ぶことにする。

「diagram 代数を数学的にどのように定義したら良いか?」ということは一つの研究課題であるが、そのためには diagram 代数と呼ぶのに相応しいであろう多くの具体例についての考察が必要である。今回はそのような結合代数の中から、1) 対称群の群環, 2) Temperley-Lieb 代数, 3) Party 代数・Partition 代数, および、最近、Benkart-Halverson によって研究された 4) Motzkin 代数 [1], について考察したいと思う。

上記に上げた diagram 代数に共通する別の性質として、これらが皆 cellular であるということがある。diagram 代数と違い、結合代数が cellular であることについては、数学的に厳密な定義がなされており、これについては 3 節で述べるが、非常に大雑把な言い方をすれば、(C1) Robinson-Schensted (RS) 対応が構成できて、(C2) 直既約表現に半順序が入り、(C3) 図形の上下反転により RS 対応の P 盤と Q 盤が逆転する、結合代数である。本稿では、上記 4 つの diagram 代数が cellular であることの概略を示す。<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(C3) の性質の書き方は cellular 代数であるためには、diagram 代数であることが必要であるような書き方であるが、実際はいくつかの性質を満たす involution として定義されており、図形的な解釈とは別に存在する。詳しくは 3 節を参照。実際、cellular 代数の中には単なる 1 変数

## 2 Diagram 代数

「はじめに」で記したように diagram 代数についての数学的な定義はないため、4つの例を挙げることで、筆者がどういう代数を diagram 代数と考えているかを紹介することにする。最後の Motzkin 代数は講演では取り上げなかったものである。これらの例は全て cellular 代数となっていることを次節で説明する。なお、以下の例では  $R$  はすべて乗法の単位元  $1_R$  を持つ可換環とし、 $R$  もしくは  $R$  に 1 つ元を添加した環上の結合代数を考えている。

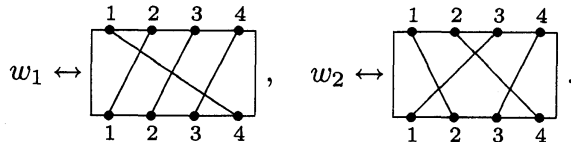
### 2.1 $R[\mathfrak{S}_n]$ (対称群の群環)

#### 基底

の基底は対称群  $\mathfrak{S}_n$  の元である。 $\mathfrak{S}_n$  は  $n$  文字の置換に対応する  $n!$  個の元からなる。 $\mathfrak{S}_n$  の元  $\sigma$  にあみだくじの図式に対応させる方法はいくつかの流儀があるが、ここでは次の流儀を採用するものとする。

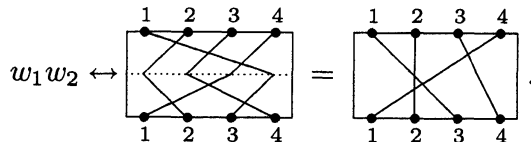
1. 図式の上下に左から  $\{1, 2, \dots, n\}$  の数字を書く。
2. 図式の下側の  $i$  番と図式の上側の  $\sigma(i)$  番が結ばれるように線を描く。

例えば  $n = 4$  で  $R[\mathfrak{S}_4] \ni w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  のとき対応する図式は次のようになる:



#### 積

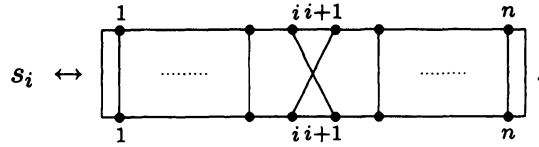
積  $w_1 w_2$  は写像の合成として定義する。これに対応する図式は、 $w_1$  に対応する図式を  $w_2$  に対応する図式の上に乗せて得られる図式である:



多項式環のように、現在のところ diagram 代数としての解釈をどのように与えたら良いのかわからないものがある。また逆に、diagram 代数を cellular 代数の中で特別なものと決めてしまうのも早計であるような気がする。

**生成元**

良く知られているように対称群は隣接互換  $\{s_i \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$  で生成されている。これらは群環としての生成元でもある。これに対応する図式は次の図で与えられる:



**関係式**

$R[\mathfrak{S}_n]$  の生成系として上記のものを選んだ場合、次の関係式が  $R[\mathfrak{S}_n]$  の定義関係式となることは良く知られている:

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1_R \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \\ s_i s_j &= s_j s_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1, |i-j| > 1). \end{aligned}$$

**2.2  $TL_n(\delta)$  (Templerley-Lieb 代数)**

$TL_n(\delta)$  は Iwahori-Hecke 環の商環として得られる。あるいは同じことだが量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  のテンソル積表現の中心化環として定義される。

ここでは、 $TL_n(\delta)$  を diagram 代数として捉えるために、次のように Planar Brauer 図式を使って定義する。

**基底**

まず、次のようにして得られる図式 (Planar Brauer 図式) を考える。

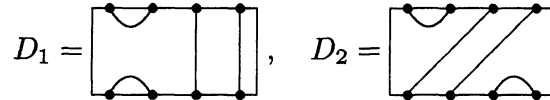
1. 横長の長方形の上下に  $n$  個ずつ、合計  $2n$  個の頂点を打つ。
2.  $2n$  個の頂点を  $n$  本の線で結ぶ。その際に長方形からはみ出ないように、かつお互いの線が交わったり接したりしないようにする。

Temperley-Lieb 代数  $TL_n(\delta)$  は、このようにして得られる図式 (の ambient isotopy による同値類) を  $R[\delta]$ -基底とする代数である。定義の仕方から、Planar Brauer 代数という言い方をすることもある。例えば、 $TL_{10}(\delta) \ni D$  として次のようなものが取れる:

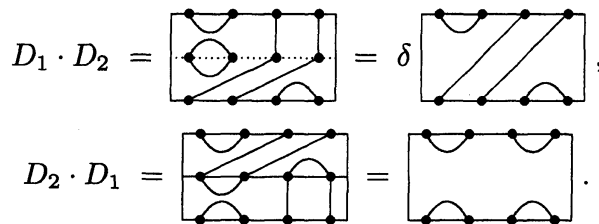


**積**

$R[\mathfrak{S}_n]$  の場合と同様  $TL_n(\delta) \ni D_1, D_2$  に対し,  $D_1$  に対応する図式を  $D_2$  に対応する図式の上に乗せて得られる図式を考える. 2つの図式をこのように結合すると, 端点を持たない閉じた曲線が生じることがある. その場合, 生じた閉曲線を取り除いたものは再び  $TL_n(\delta)$  の元になる. この元に取り除いた閉曲線の個数だけ  $\delta$  を掛けたものを積  $D_1 D_2$  と定義する. 例えば,  $TL_4(\delta) \ni D_1, D_2$  が以下の様な図式のとき,

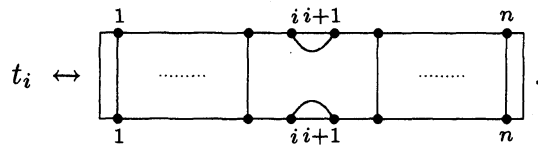


積  $D_1 \cdot D_2, D_2 \cdot D_1$  は, それぞれ, 次のようになる:



**生成元**

$TL_n(\delta)$  の生成元は下側の  $i$  番と  $i+1$  番目の頂点を結び, 上側の  $i$  番と  $i+1$  番目の頂点を結び, その他の頂点については上側の頂点と下側の頂点を垂直な線分で結んだ図  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) であることが知られている:



**関係式**

$TL_n(\delta)$  の生成元として上記のものを選んだ場合, 次の関係式が  $TL_n(\delta)$  の定義関係式となる:

$$\begin{aligned}
 t_i^2 &= \delta t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
 t_i t_{i\pm 1} &= t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
 t_i t_j &= t_j t_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1, |i-j| > 1).
 \end{aligned}$$

### 2.3 $P_{n,r}(Q)$ (Party 代数, Partition 代数)

Party 代数  $P_{n,r}(Q)$  は 2 種の  $n$  元からなる集合

$$M = \{1, 2, \dots, n\}, F = \{1', 2', \dots, n'\}$$

の和集合  $F \sqcup M$  の次のような集合分割を基底とする  $R[Q]$ -加群に積を入れることで定義される ( $r = 1$  のときは Partition 代数の定義となる):

#### 基底

$$\begin{aligned} \Sigma_n^r = & \{ \{T_1, \dots, T_s\}; s = 1, 2, \dots, \\ & T_j (\neq \emptyset) \subset M \cup F, |T_j \cap M| \equiv |T_j \cap F| \pmod{r} (j = 1, 2, \dots, s), \\ & \cup T_j = M \cup F, T_i \cap T_j = \emptyset \text{ if } i \neq j \}. \end{aligned}$$

上の定義において  $r = 1$  のとき, すなわち Partition 代数のとき,  $|T_i \cap M| \equiv |T_i \cap F|$  は常に成り立つことに注意しておく.  $\Sigma_n^r$  の元に次のような図を対応させる.

1. 前の 2 つの例と同じく横長の長方形を用意し, その上下に  $n$  個の点を打つ.
2. 上の  $n$  頂点を  $F$  の元  $\{1' < 2' < \dots < n'\}$  で左から順にラベル付けする. 同様に下の  $n$  頂点を  $M$  の元  $\{1 < 2 < \dots < n\}$  で左から順にラベル付けする.
3.  $\Sigma_n^r$  の元  $T_1, T_2, \dots, T_s$  に対応して長方形の中に円を描く (各  $T_i$  をテーブルと呼ぶことにする).
4. 各テーブルとテーブルに属する元 (メンバーと呼ぶことにする) を太い線で結ぶ.

図 1 は  $P_{5,2}(Q)$  の基底の一つである.

#### 積

やはり前の 2 つの例と同様, 基底に対応する図式を上下に繋げた図式をもとに積を定義する. 図式を繋げることでいくつかのテーブルが線を辿って繋がることがある. 線で繋がったテーブルを新しい円として描き直し, このテーブルに属するメンバーを太い線で結び直す. テーブルを繋ぐことで, 外側の長方形に連結されなくなったテーブルは除去し, 除去したテーブルの個数分図形を  $Q$  倍する.

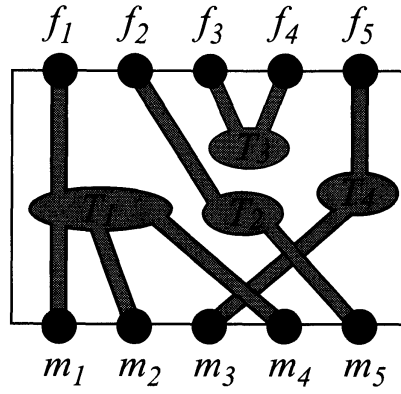


図 1:  $P_{5,2}(Q)$

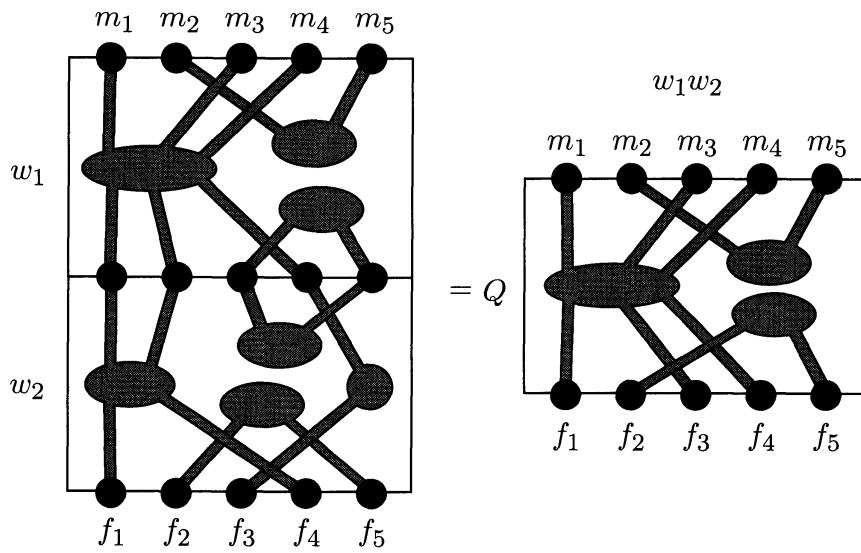


図 2:  $P_{5,2}$  の積

例えば

$$w_1 = \{\{m_1, m_3, m_4, t_1, t_2, t_4\}, \{m_2, m_5\}, \{f_3, f_5\}\},$$

$$w_2 = \{\{m_1, m_2, f_1, f_4\}, \{m_4, m_5\}, \{f_2, f_5\}\}$$

の場合,

$$w_1 w_2 = \{\{m_1, m_3, m_4, f_1, f_3, f_4\}, \{m_2, m_5\}, \{f_2, f_5\}\}$$

となる (図 2).

**生成元**

$P_{n,r}$  の生成元は図 3 である. なお, テーブルの絵は代数構造には関係無いので省略してある. ここで

$$\begin{aligned}
 f &= \{\{m_1, m_2, f_1, f_2\}, \{m_3, f_3\}, \{m_4, f_4\}, \dots, \{m_n, f_n\}\} \\
 e_r &= \{\{m_1, m_2, \dots, m_r\}, \{f_1, f_2, \dots, f_r\}, \{m_{r+1}, f_{r+1}\}, \dots, \{m_n, f_n\}\} \\
 s_i &= \{\{m_1, f_1\}, \dots, \{m_{i-1}, f_{i-1}\}, \\
 &\quad \{m_i, f_{i+1}\}, \{m_{i+1}, f_{i+1}\}, \{m_{i+2}, f_{i+2}\}, \dots, \{m_n, f_n\}\}
 \end{aligned}$$

である. また  $r > n$  の場合は  $e_r$  を取り除いたものが生成元になる.

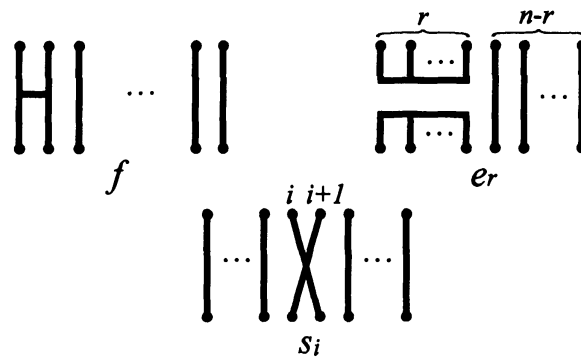


図 3:  $P_{n,r}$  の生成元

**関係式**

$P_{n,r}(Q)$  の生成元として上記のものを選んだ場合の関係式についても結果が得られているが, 複雑なのでここでは記さない.  $r = 1$  の場合が文献 [5, 14] に  $r = 2$  の場合が [13] に  $r > n$  の場合が [10] に記されている.

**2.4  $M_n(x)$ (Motzkin 代数)**

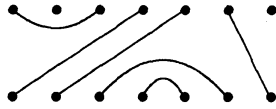
Motzkin 代数  $M_n(x)$  は, Temperley-Lieb 代数  $TL_n(\delta)$  と同様, Planar Brauer 図式の作る結合代数であるが,  $TL_n(\delta)$  と異なり, 線で結ばれない頂点が単独に存在するような図式も許したものである. 従って次のようにして描かれた図が基底となる.

**基底**

1. 横長の長方形の上下に  $n$  個ずつ, 合計  $2n$  個の頂点を打つ.

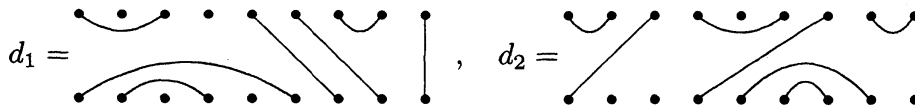
2.  $2k$  個の頂点を  $k$  本の線で結ぶ ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). その際に長方形からはみ出ないように, かつお互いの線が交わったり接したりしないようにする.

このようにして得られる図式 (の ambient isotopy による同値類) を  $R[x]$ -基底とする代数である. 例えば, 次は  $M_7(x)$  の基底をなす元の一つである:

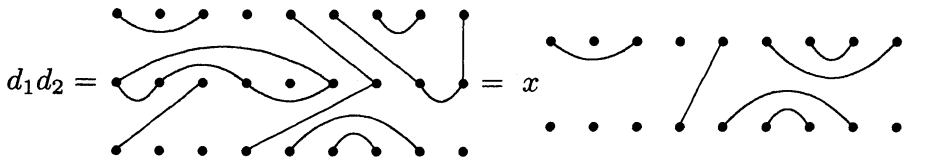


**積**

$TL_n(\delta)$  の場合と同様  $M_n(x) \ni d_1, d_2$  に対し,  $d_1$  に対応する図式を  $d_2$  に対応する図式の上に乗せて得られる図式を考える. 2つの図式の結合により, 端点を持たない閉じた曲線が生じた場合は, 生じた閉曲線を取り除いて, その個数分だけ  $x$  を掛けたものを積  $d_1 d_2$  と定義する.  $TL_n(\delta)$  と異なり, 図式の結合により, 結合前の図式を構成する弧 (線分) が, 長方形の端点を結ばなくなる場合がある. その場合には, その弧を取り除いた図式が新たな図式となる. 例えば



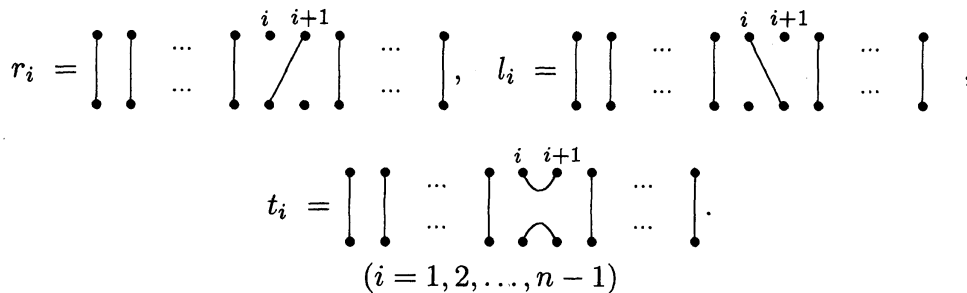
とすると



となる.

**生成元**

$M_n(x)$  の生成元は下の図式で与えられることが知られている [1].





## 関係式

$M_n(x)$  の定義関係式は知られていないが、次がそうであると予想している。  
 $n = 3$  までは正しいことは確認済みである<sup>2</sup>。

$$l_i r_i = r_{i+1} l_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (R0)$$

$$r_i l_i r_i = r_i, \quad l_i r_i l_i = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (R1)$$

$$r_i t_i r_i = r_i^2, \quad l_i t_i l_i = l_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (R2)$$

$$t_i r_i t_i = t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (R3)$$

$$r_i t_i = l_i t_i, \quad t_i r_i = t_i l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (R4)$$

$$t_i^2 = x t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (R5)$$

$$(r_i l_i) r_{i+1} = r_{i+1} (r_i l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$(r_i l_i) l_{i+1} = l_{i+1} (r_i l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (R6)$$

$$(r_i l_i) t_{i+1} = t_{i+1} (r_i l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$(l_{i+1} r_{i+1}) r_i = r_i (l_{i+1} r_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$(l_{i+1} r_{i+1}) l_i = l_i (l_{i+1} r_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (R6')$$

$$(l_{i+1} r_{i+1}) t_i = t_i (l_{i+1} r_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$t_{i+1} r_i = t_{i+1} t_i l_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (R7)$$

$$r_{i+1} t_i = l_i t_{i+1} t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$r_i t_{i+1} = l_{i+1} t_i t_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (R8)$$

$$t_{i+1} l_i = t_{i+1} t_i r_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$t_i r_{i+1} = t_i t_{i+1} l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (R8')$$

$$l_{i+1} t_i = r_i t_{i+1} t_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$x_i y_j = y_j x_i$$

$$(x_i \in \{t_i, r_i, l_i\}, y_j \in \{t_j, r_j, l_j\}, |i-j| > 1, \quad (R9)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

## 3 Cellular 代数

この節では cellular 代数の定義を与え、前節で与えた diagram 代数がすべて cellular 代数でもあることを述べる。始めに cellular 代数の定義である。

**定義 3.1.**  $R$  を乗法の単位元  $1_R$  を含む可換環とする。 $R$  上の結合代数  $A$  に対して、以下の性質を満たす集合と写像の 4 つ組  $(\Lambda, M, C, *)$  が存在するとき「 $A$  は cell 構造を持つ」あるいは「 $A$  は cellular である」という：

<sup>2</sup>この原稿の提出直前に成瀬弘氏から文献 [21] について教えていただいた。この文献中で上記の予想が正しいと証明されている。

- (C1)  $\Lambda$  は半順序集合 (Poset) で,  $\forall \lambda \in \Lambda$  に対し, 有限集合  $M(\lambda)$  が定まる.  $M(\lambda)$  の元を  $\lambda$  を台 (shape) に属する盤 (tableau) と呼ぶ. 同じ台に属する盤の組から  $A$  への単射  $C$

$$C : \prod_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda) \times M(\lambda) \rightarrow A$$

が存在し,  $C$  の像  $\text{Image } C$  は  $A$  の  $R$  上の基底となる.

- (C2) 盤の組  $S, T \in M(\lambda)$  に対し, (C1) で定めた写像  $C$  による行き先である  $A$  の基底を  $C_{S,T}^\lambda$  と書く. このとき,  $A$  の  $R$ -線形反対合  $*$  が存在して,  $(C_{S,T}^\lambda)^* = C_{T,S}^\lambda$  となる.

- (C3) (C2) で定めた  $A$  の基底の元  $C_{S,T}^\lambda$  に対して  $a$  を左から掛けると, 次のように順位の低い台に属する盤から定まる基底との線形結合になる:

$$aC_{S,T}^\lambda \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C_{S',T}^\lambda \pmod{A(< \lambda)}.$$

ここで  $r_a(S', S) \in A$  であり,  $A(< \lambda)$  とは次で定まる  $A$  の  $R$ -部分加群である:  $A(< \lambda) = \langle C_{S'',T''}^\mu \mid \mu < \lambda \rangle$ .

上記の 4 つ組を「 $A$  の cell データ」といい, cell 構造を持つ結合代数を cellular 代数という.  $A$  が cell 代数のとき, (C1) の  $C$  で定まる  $A$  の基底を  $A$  の cell 基底という.

**注) 3.2.**  $A$  が cellular 代数であったとしても, cell 基底の取り方は一般には色々ある.

**注) 3.3.** (C3) の式の  $*$ -involution を取ると  $C_{T,S}^\lambda$  に右から  $a^*$  を掛けるとやはり順位の低い台に属する盤に対応する基底との線形結合になることがわかる:

$$(C3') \quad C_{T,S}^\lambda a^* \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C_{T,S'}^\lambda \pmod{A(< \lambda)}.$$

以下, 2 節の例が全て cellular であることを確かめる. 重要なのは図式に対応する盤の組を見つけることと, 盤に対応する基底を定めることである.

### 3.1 $R[\mathfrak{S}_n]$ の cell 基底

セルを与える  $\Lambda = \Lambda_n$  は  $n$  次の分割の集合である. 良く知られているように整数  $n$  の分割は  $n$  次の Young 図形として表すことができる. 対称群の cell 基底を与える盤は, 台  $\lambda \in \Lambda_n$  の Young 図形に 1 から  $n$  までの数字を右に単調増大, 下に単調増大になるように書き込むことによって得られる<sup>3</sup>. この盤の組と  $\mathfrak{S}_n$  の元と間には, これもまた良く知られているように, Robinson-Schenstead

<sup>3</sup>所謂 Young 盤そのものである

対応と呼ばれるものがある。これは、 $w \in \mathfrak{S}_n$  の 2 行表示の下段に得られる数列  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  から bumping という操作を行って得られる。例えば  $\mathfrak{S}_4 \ni w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  の場合、2 行表示の下段に書かれた数列 4123 を使った bumping は以下のようなになる。盤はまた、図 5 のような Young 図

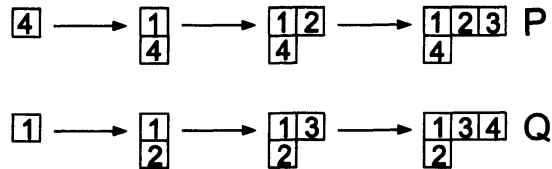


図 4: 4123 の bumping

形の生成を表した Hasse 図形の path として表される。これは  $R[\mathfrak{S}_4]$  が半単純のとき、その中心的原始冪等元の分岐を表した図 (Bratteli 図形という) にもなっている。破線が盤 P に対応する path で太線が盤 Q に対応する path である。Robinson-Schenstead 対応の性質として大事な性質の一つに次のよう

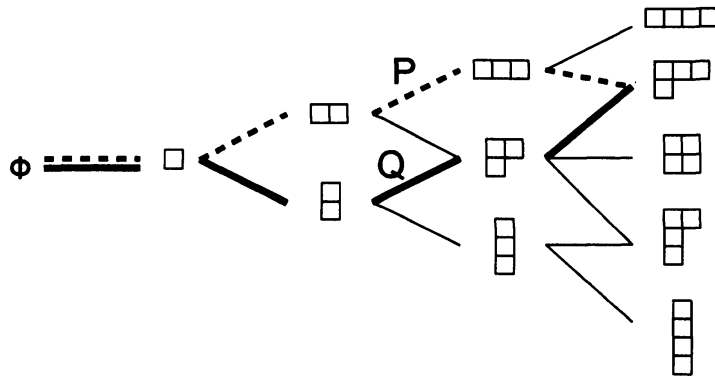


図 5:  $\mathfrak{S}_4$  の Bratteli 図形

なものがある:

$$w \leftrightarrow (P, Q) \text{ ならば } w^{-1} \leftrightarrow (Q, P) \text{ となる.}$$

ところで、 $R[\mathfrak{S}_n]$  には Kazhdan-Lusztig 基底と呼ばれる基底が存在し、 $\mathfrak{S}_n$  の各元  $w$  に対応して  $R[\mathfrak{S}_n]$  の元  $C_w$  が定まる。  $w$  に対応する盤の組が  $(P, Q)$  のとき、これを  $C_{P, Q}$  と書く。このとき、 $(C_w)^* = C_{w^{-1}}$  と定めると、上記の Robinson-Schenstead 対応の性質より、 $(C_{P, Q})^* = (C_w)^* = C_{w^{-1}} = C_{Q, P}$  となる。これは Kazhdan-Lusztig 対応が (C2) の性質を満たすことを示す。(C3) を満たすことは Kazhdan-Lusztig の論文 [8] に記載されている。

### 3.2 $TL(\delta)$ の cell 基底

$TL(\delta)$  のセル  $\Lambda = \Lambda_n$  は高々深さ 2 の  $n$  次の Young 図形の集合である.  $\Lambda_0$  の唯一の元  $\emptyset$  から始めて,  $\Lambda_1$  の元,  $\Lambda_2$  の元,  $\dots$ ,  $\Lambda_n$  の元が次々に生成される様子を Hasse 図形に表したとき, その path が  $TL(\delta)$  の盤であり, 半単純な場合の Bratteli 図形である (図 6).

ところで,  $n$  を固定した場合, 高々深さ 2 の  $n$  次の Young 図形は

$$t = (\text{1 行目の Young 図形の箱の数}) - (\text{2 行目の Young 図形の箱の数})$$

の値によって自然数  $\{n, n-2, n-4, \dots\}$  と 1 対 1 に対応がついている.  $t$  を propagating 数と呼ぶことにする. 図 6 では対応する propagating 数を path の終点である右端の Young 図形の横に記してある.  $R[\mathfrak{S}_n]$  のときとは逆に

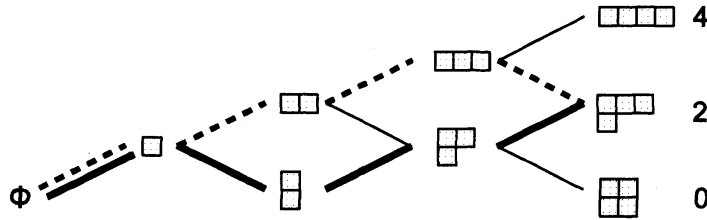
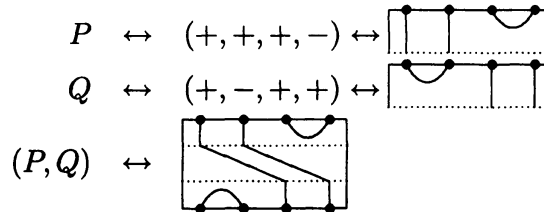


図 6:  $TL_4(\delta)$  の Bratteli 図形

Bratteli 図形の path の組  $(P, Q)$  から,  $C_{P, Q}$  に対応する  $TL(\delta)$  の図を構成してみる.

1. まず propagating 数  $t$  の頂点を選ぶ, ここに描かれた Young 図形の 1 行目には  $(n+t)/2$  個の 2 行目には  $(n-t)/2$  個箱がある.
2. 1. で選んだ頂点への path の組  $(P, Q)$  を選ぶ.
3. path  $P, Q$  をそれぞれ  $+, -$  の符号の列で表す. 始点から始めて右上へ向かうとき (1 行目に箱を加えるとき) は  $+$ , 右下へ向かうとき (2 行目に箱を加えるとき) は  $-$  符号を対応させる.
4. 2. で得られた 2 つの符号列に対し, それぞれ, Planar Brauer 図形の「上半分」を与える. 符号を左から見て行き, 初めて  $-$  符号が現れたとき直前の  $+$  符号と  $U$  字で結ぶ. さらに右に進み同じことを繰り返す. 既に  $+$  符号が他の  $-$  符号と結ばれているときは, それより左にある ( $-$  符号と結ばれていない)  $+$  符号の中で最も右にあるものと結ぶ. 最後に残った  $+$  符号を始点とする半直線を下方に描く.
5. 3. で得られた  $P, Q$  に対応する 2 つの Planar Brauer 図形の「上半分」のうち,  $Q$  に対応する方を上下反転し (水平軸に対する折り返しを行い) 半直線同士を交わらないように繋ぐ.

以上の操作で得られる Planar Brauer 図形に於いて、上の頂点と下の頂点を結ぶ線の数に等しいことがすぐに確認できる。図 6 中の破線を盤  $P$ 、太線を盤  $Q$  とすると、 $(P, Q)$  に対応する Planar Brauer 図形は以下のようなになる。



\*-involution を Planar Brauer 図形の上下反転と定義すると  $(P, Q)$  から得られた図式と  $(Q, P)$  から得られた図式は、まさに上下反転の関係にあるので、 $(C_{P,Q})^* = C_{Q,P}$  となり、この対応が (C2) を満たすことがわかる。

(C3) については  $R[\mathfrak{S}_n]$  よりも易しい。左から  $TL(\delta)$  の元を掛けることは、上側に Planar Brauer 図形を繋ぐことに対応しているが、このようにして得られる図形は、もとの図形の propagating 数を減らすことはあるが、増やすことはないことが分かる。すなわち (C3) が満たされていることが分かる。

### 3.3 $P_{n,r}(Q)$ の cell 基底

$P_{n,r}(Q)$  のセル  $\Lambda = \Lambda_n$  は、次のように  $\Lambda_0$  から帰納的に定義する。

まず  $\Lambda_0$  を 1 行  $Q$  列 ( $Q \geq r$ ) の横一列の Young 図形を第 1 成分に持ち、第 2 成分から第  $r$  成分までは 0 の分割  $\emptyset$  を並べたものただ 1 つの元からなる集合とする。すなわち

$$\{(\square \square \dots \square, \emptyset, \dots, \emptyset)\}.$$

$\Lambda_{i+1}(i = 0, 1, \dots, n-1)$  は  $\Lambda_i$  から次のようにして得られる元の集合である：

- (1)  $\Lambda_i$  の元を 1 つ選び、その  $\emptyset$  でない成分 ( $j$  とする) を 1 つ選ぶ。
- (2) (1) で選んだ成分の Young 図形から箱を 1 つ取り除き、 $j+1$  成分 (但し  $j=r$  のときは第 1 成分) の Young 図形に箱を 1 つ加える。

下の図は  $Q = 5, r = 2$  のときの  $\Lambda_0$  から  $\Lambda_3$  までの元の Hasse 図形である。網掛けの部分の第 2 成分に対称群の場合と同じものが出てきていることに注意されたい。  $R[\mathfrak{S}_n]$  や  $TL(\delta)$  のときと同様、 $\Lambda_0$  の唯一の元から  $\Lambda_n$  の元への path が  $P_{n,r}(Q)$  の盤であり、この代数が半単純な場合の Bratteli 図形になっている (図 7)。

図 7 では、始めに用意する箱の数  $Q$  を 5 としたが、 $Q$  が十分に大きい場合 ( $Q \geq n$  のとき)、上記の手順で得られる盤は  $Q$  には依存しなくなることが分かる。そこで、とりあえず十分大きな整数  $Q$  個の箱から上記のアルゴリズムで、Hasse 図を描き、その後、第 1 成分の Young 図形から 1 行目を取り去ることに

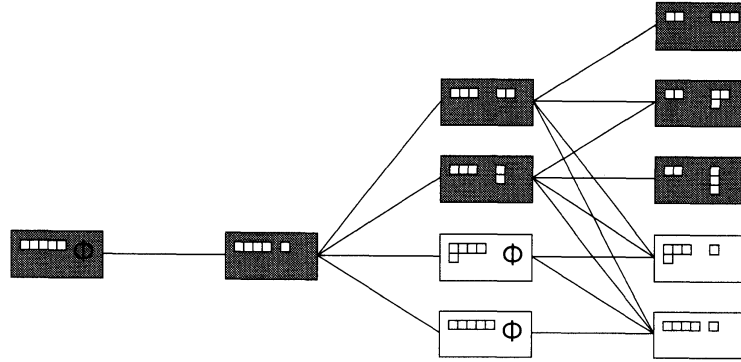


図 7:  $P_{5,2}$  の盤 ( $Q = 5$ )

する. さらに, この 1 行目を取り去った Young 図形を第  $r$  成分に移動し, 第  $j$  成分の Young 図形は第  $j - 1$  成分に移動することにする ( $j = r, r - 1, \dots, 2$ ). すなわち,

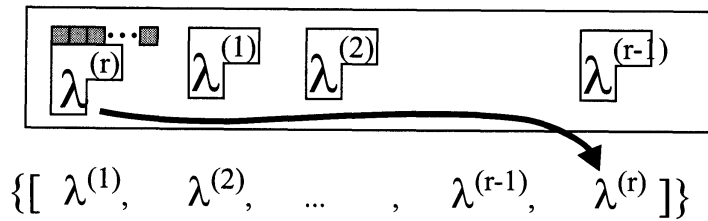


図 8:  $Q$  に依らない cell の表示

$$\Lambda = \cup_{i=1}^n \Lambda_i \ni [\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r-2)}, \lambda^{(r-1)}]$$

に対し,

$$[\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r-1)}, \lambda^{(r)}]$$

とする. ここで  $\lambda^{(r)}$  は  $\lambda^{(0)}$  の 1 行目を取り除いて得られる Young 図形である (図 8).

このようにすることで, 次のように  $Q$  に依らない cell の記述が得られる:

$$\Lambda_i = \{ [\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r-1)}, \lambda^{(r)}] ; \sum_{j=1}^r j|\lambda^{(j)}| = i, i - r, i - 2r, \dots \}$$

図 9 は図 7 を上記の操作で  $Q$  に依らない表示に変えたものである.  $P_{n,r}(Q)$  は  $Q \geq n$  となる整数だけでなく,  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  以外のあらゆる値で同じ Bratteli 図形を持つ半単純代数になることが分かっている<sup>4</sup>.

Party 代数  $P_{n,r}(Q)$  の図式を cell で分類するには次のようにすればよい. まず, propagator を太さで分類する.  $\sum_n \in w \in T$  を propagator とする. 定義

<sup>4</sup>十分条件である. 必要性については, まだ証明を得られていない.

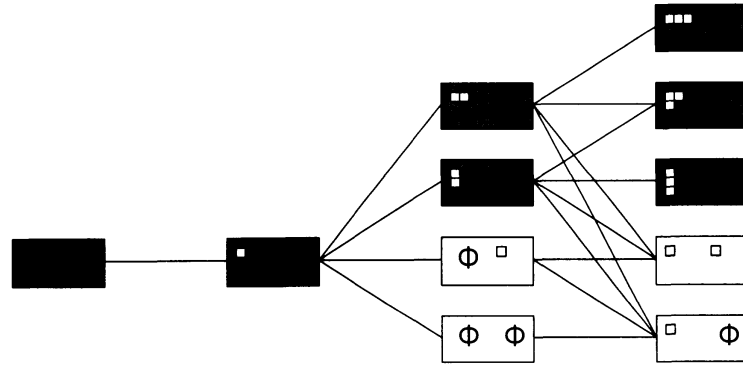


図 9:  $P_{5,2}$  の盤 ( $Q$  一般)

により,  $|T \cap F| \equiv |T \cap M| \equiv t$  となる  $t$  が,  $\{1, 2, \dots, r\}$  の範囲でただ一つ決まるので, その  $t = t(T)$  を  $T$  の太さと決める. 集合分割  $w$  の propagator 達を太さで分類し, 太さ  $j$  の propagator の個数を  $l_j = l_j(w)$  とすると,  $w$  に対し整数の並び  $(l_1, l_2, \dots, l_r)$  が定まる. 次に  $w$  の propagator の中で太さ  $j$  の成分同士に注目すると, その交差を表す置換  $\sigma_j \in \mathfrak{S}_{l_j}$  が決まる.  $\sigma_j$  に対して Robinson-Schensted 対応を適用すると,  $r$  個の Young 図形の並び  $[\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(r)}]$  が得られる.

以上が  $\Sigma_n^r$  の元の cell 分解である. Bratteli 図形の盤に対応する図式については Mathas[19] の方法で得られることは理論的には分っているが, 具体的な記述についてはまだ得られていない.

その他  $*$ -involution を図式の上下反転と定義すると (C2) が成り立つこと, propagating 数に注目することで (C3) が成り立つことなどは, Temperley-Lieb 代数と同じである.

### 3.4 $M_n(x)$ の cell 基底

$M_n(x)$  のセルは  $\Lambda = \Lambda_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  である.  $\Lambda_i$  の元に  $1, 0, -1$  のいずれかを加えて  $\Lambda_{i+1}$  の元が得られるとき, それらを辺で結ぶ. この様子を Hasse 図形に表すと図 10 のようになる.  $\Lambda_0$  の元  $0$  から  $\Lambda_n$  の元までの path が  $M_n(x)$  の盤であり, 半単純な場合の Bratteli 図形である.  $\Lambda_n$  の元の値を propagating 数と呼ぶことにする.  $TL(\delta)$  のときと同様に Bratteli 図形の path の組  $(P, Q)$  から,  $C_{P, Q}$  に対応する Motzkin 図を構成してみる:

1. まず propagating 数  $t$  の頂点とその頂点へん path の組  $(P, Q)$  を選ぶ.
2. path  $P, Q$  それぞれを  $+, 0, -$  の符号で表す. 始点から始めて右上へ向かうときは  $+$ , そのまま横に向かうときは  $0$ , 右下へ向かうときは  $-$  符号を対応させる.

3. 1. で得られた  $+, 0, -$  の 3 つの符号列に対し, 符号を左から見て行き, 初めて  $-$  符号が現れたとき直前の  $+$  符号と  $U$  字で結ぶ. さらに右に進み同じことを繰り返す. 既に  $+$  符号が他の  $-$  符号と結ばれているときは, それより左にある ( $-$  符号と結ばれていない)  $+$  符号の中で最も右にあるものと結ぶ. 最後に残った  $+$  符号を始点とする半直線を下方に描く. これにより Motzkin 図形の「上半分」の組が得られる.
4. 3. で得られた  $P, Q$  に対応する 2 つの Motzkin 図形の「上半分」のうち,  $Q$  に対応する方を上下反転し (水平軸に対する折り返しを行い) 半直線同士を交わらないように繋ぐ.

以上の操作で得られる Motzkin 図形に於いて, 上の頂点と下の頂点を結ぶ線の数は propagating 数に等しいことは明らかであろう.

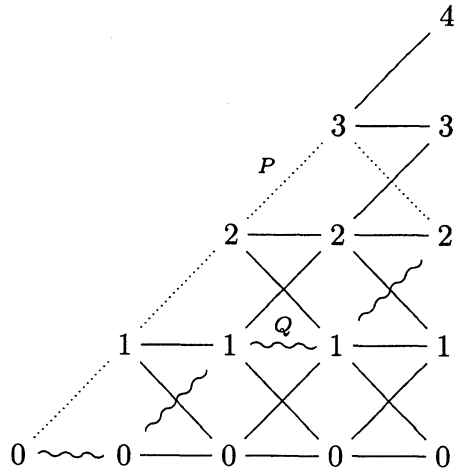
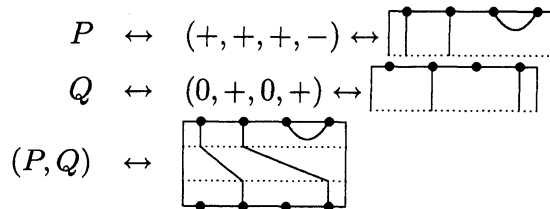


図 10:  $M_4(x)$  の盤

上の図の中の点線を盤  $P$ , 波線を  $Q$  とすると,  $(P, Q)$  に対応する Motzkin 図形は以下ようになる.



\*-involution を図形の上下反転と定義することで, (C2) が満たされること, propagating 数を考えることで (C3) が満たされていることが確認できるのは  $TL(\delta), P_{n,r}(Q)$  の場合と同様である.



## 4 Cellular であることのご利益

おしまいに結合代数が cellular であることのご利益をいくつか羅列しておく。

### (1) 既約・直既約であることの判定条件が得られる

cellular であること条件

$$(C3) \quad aC_{S,T}^\lambda \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C_{S',T}^\lambda \pmod{A(< \lambda)}.$$

において右辺の  $C_{S',T}$  の係数  $r_a(S', S)$  が  $T$  に依らないことに注意すると,

$$\begin{aligned} W(\lambda) &:= \{C_S \mid S \in M(\lambda)\} \\ aC_S &:= \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S', S) C_{S'}^\lambda \end{aligned}$$

と定めることにより,  $W(\lambda)$  は考えている cellular 代数の表現となる<sup>5</sup>. さらに (C3') の条件を組み合わせると,

$$C_{S_1, T_1}^\lambda C_{S_2, T_2}^\lambda \equiv \phi_\lambda(C_{T_1}, C_{S_2}) C_{S_1, T_2}$$

となることがわかり, 行列  $(\phi_\lambda(C_{T_1, T_2})_{T_1, T_2})$  を計算することで, 既約 (irreducible), 直既約 (indecomposable) の判定条件が得られる<sup>6</sup>.

### (2) 半正規形式の表現の構成が出来る

Mathas の論文 [19] には cell 表現から Jucys-Murphy 元の族を用いて, 半正規形式 (seminormal form) による表現の構成方法が記述されている<sup>7</sup>. 従って結合代数が cellular であることが示せれば, 半正規形式による表現を得るためには Jucys-Murphy 元の族を見つければ良いことになり, 脚注より, 分裂半単純代数であることも判明する.

### (3) 分解係数の決定が出来る

(1) の行列  $(\phi_\lambda(C_{T_1, T_2})_{T_1, T_2})$  から分解係数 (decomposition number) が計算できる. これにより, 半単純でない場合の代数の構造についての情報 (各直既約表現に絶対既約表現がどれくら含まれているか) を知ることが出来る.

<sup>5</sup>つまり正則表現を適当に modulo することで表現が構成出来るための条件を定めている

<sup>6</sup>実際にはこの行列式 (Gram 行列式) が 0 であるかどうかを計算する.

<sup>7</sup>Wedderburn の定理により, Jucys-Murphy 元の族が存在すること, 結合代数が分裂半単純であることは同値であることがわかっている.

## 5 謝辞

講究録の原稿執筆を機会を得たお陰で diagram 代数と cell 代数の紹介をまとめることが出来ました. このような研究集会を企画し, また私をお誘いいただいた, 増岡彰氏, 成瀬弘氏, 和久井道久氏に深くお礼を申し上げます. 成瀬氏には, 提出前の原稿に目を通していただき, 有用なコメントを頂きました. この拙稿をお読みいただいた方からのコメントをお待ちしております.

## 参考文献

- [1] G. Benkart and T. Halverson, Motzkin algebras, Preprint arXiv:1106.5277.
- [2] R. Brauer, On algebras which are connected with the semisimple continuous groups, *Ann. of Math.* **38**, (1937), 854–872.
- [3] F. M. Goodman and H. Wenzl, Temperley-Lieb algebra at roots of unity. *Pacific J. Math.* **161**, (1993), 307–334.
- [4] J. J. Graham and G. I. Lehrer, Cellular algebras, *Invent. Math.* **123**, (1996), 1–34.
- [5] T. Halverson and A. Ram, Partition algebras, *European J. Combin.* **26** (2005), 869–921.
- [6] N. Iwahori and H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups. *Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math.* **25** (1965), 5–48.
- [7] V. F. R. Jones, The potts model and the symmetric group, *Subfactors (Kyuzeso, 1993)* 259–267, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.
- [8] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.* **53** (1979), 165–184.
- [9] M. Kosuda, Representation of q-analogue of rational Brauer algebras. *Tsukuba J. Math.* **21** (1997), 707–728.
- [10] M. Kosuda, Characterization for the party algebras, *Ryukyu Math. J.* **13** (2000), 7–22.
- [11] M. Kosuda, Irreducible representations of the party algebra. *Osaka J. Math.* **43** (2006), 431–474.

- [12] M. Kosuda, The standard expression for the party algebra, *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 1497* (2006), 52–69.
- [13] M. Kosuda, Characterization for the modular party algebra, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), 939–960.
- [14] M. Kosuda, Partition algebra its characterization and representations *J. Ryukyu Math. J.* **22** (2009), 1–29.
- [15] M. Kosuda and J. Murakami, Centralizer algebras of the mixed tensor representations of quantum group  $U_q(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ , *Osaka J. Math.* **30** (1993), 475–507.
- [16] P. Martin, Representations of graph Temperley-Lieb algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), 485–503.
- [17] P. Martin, Temperley-Lieb algebras for non-planar statistical mechanics – The partition algebra construction, *J. Knot Theory Ramifications* **3** (1994), 51–82.
- [18] P. Martin, The structure of the partition algebras, *J. Algebra* **183** (1996), 319–358.
- [19] A. Mathas, Seminormal forms and Gram determinants for cellular algebras. With an appendix by Marcos Soriano, *J. Reine Angew. Math.* **619** (2008), 141–173.
- [20] J. Murakami, The representations of the  $q$ -analogue of Brauer’s centralizer algebras and the Kauffman polynomial of links, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), 935–945.
- [21] E. Posner, K. Hatch and M. Ly, Presentation of the Motzkin monoid, Preprint arXiv:1301.4518.
- [22] K. Tanabe, On the centralizer algebra of the unitary reflection group  $G(m, p, n)$ , *Nagoya. Math. J.* **148** (1997), 113–126.
- [23] H. Wenzl, On the structure of Brauer’s centralizer algebras, *Ann. of Math.* **128** (1988), 173–193.
- [24] H. Wenzl, Hecke algebras of type  $A_n$  and subfactors, *Invent. Math.* **92** (1988), 349–383.
- [25] C. C. Xi, Partition algebras are cellular, *Compositio. Math.* **119** (1999), 99–109.