数理解析研究所講究録
第 1840 巻 2013 年 13-23

Fusion products for the symplectic fermionic vertex operator superalgebras

有家雄介

筑波大学数理物質系数学域

1 はじめに

本稿では, 頂点作用素超代数の加群のテンソル積であるフュージョン積とよばれるものを, シンプレクティックフェルミオンから定まる頂点作用素超代数の直既約射影加群に対して決定します. 本稿では, もっとも簡単な 2 次元のシンプレクティックベクトル空間に付随する場合を扱います. $d>1$ の場合にも同様に計算ができます.

講演では実際にフュージョン積を計算するために対数的交絡作用素の空間を決定し, それに基づいた計算を紹介しましたが, その後の研究 ([2, 3]) でもう少し簡単な semi-intertwining operator を経由するほうがよいことがわかったので, 本稿ではそちらを採用します.

フュージョン積の一般論は Wood-Tsuchiya, Miyamoto, Huang-Lepowsky-Zhang らにより考察されていますが, 今現在加群の圏がモノイダルになるかどうかなどの基本的な問題が残されています. 一方シンプレクティックフェルミオンに関連するの表現の圏のテンソル積の構造は, [12] によって頂点作用素代数を用いることなく調べられています. そこでは, 表現の圏が braided monoidal になることが示されています. Runkel の結果を頂点作用素代数の言葉で理解することは今後の課題です.

2 頂点作用素超代数

まずは頂点作用素超代数とその加群について述べます. 頂点作用素 (超) 代数の詳しい性質に関しては, [7, 8, 13] を参照してください. 以下ではベクトル空間およびテンソル積 $\otimes$ はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えます. また, スーパーベクトル空間 $V=V^0\oplus V^1, W=W^0\oplus W^1$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{i}(V,W)=\{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\,|\,f(V^j)\subset W^{i+j}\,(i=0,1)\}\,(i=0,1)$ とします. このとき, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{0}(V,W)\oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}^{1}(V,W)$ です.

頂点作用素超代数とは $\mathbb{Z}_2$-graded なベクトル空間 $V=V^0\oplus V^1$ と線形写像

$$Y: V\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)[[z,z^{-1}]],\qquad a\mapsto Y(a,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \tag{2.1}$$

および, それぞれ真空ベクトル, Virasoro 元とよばれるベクトル $\mathbf{1},\omega\in V^0$ の組で以下の条件をみたすものである:

(1) 任意の $a\in V^k, b\in V^\ell$ に対して $a_nb\in V^{k+\ell}$ であり, 十分大きな n に対して $a_nb=0$.

(2) 任意の $a \in V^k$, $b \in V^\ell$ および整数 p, q, r に対して

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{q}{i} (a_{p+i}b)_{q+r-i} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{p}{i} (a_{p+q-i}b_{r+i} - (-1)^{p+k\ell} b_{p+r-i}a_{q+i}) \tag{2.2}$$

が $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ で成り立つ.

(3)

$$\mathbf{1}_m a = \delta_{m,-1} a, \quad a_m \mathbf{1} = \begin{cases} a, & m = -1, \\ 0, & m \geq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

(4) $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とすると, $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c$ が成り立つ. ここで c は複素数で, 中心電荷と呼ばれます.

(5) 任意の $a \in V$ と整数 n に対して, $(L_{-1}a)_n = -na_{n-1}$.

(6) $V = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n$. ここで V_n は L_0 の固有値 n の有限次元の固有空間.

$a \in V_n$ のとき, $|a| = n$ とします. また, $a \in V^i$ のとき, $p(a) = i$ とします. このとき, $\mathbf{1} \in V_0$, $\omega \in V_2$ で, $a_n b \in V_{|a|+|b|-1-n}$ となっていて

$$V^i = \bigoplus_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n \cap V^i \tag{2.4}$$

が成り立ちます.

頂点作用素超代数 V 上で $\theta_V(a^0 + a^1) = a - a^1$ $(a^i \in V^i)$ で定義される写像は自己同型, つまり $\theta_V(a_n b) = \theta_V(a)_n \theta_V(b)$, $\theta_V(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $\theta_V(\omega) = \omega$ をみたします. 一般に頂点作用素超代数 V の自己同型 g とは上の条件に加えて, $[g, \theta_V] = 0$ をみたすもののことを言います.

次に, [5] によって導入された捩じれ加群について説明します. 頂点作用素超代数 V の位数 T の自己同型を g とします. このとき, V は g の固有値 $e^{-2\pi\sqrt{-1}r/T}$ の固有空間 $V^{(r;g)}$ の直和に分解します. $[g, \theta_V] = 0$ から, $V^{(r;g)}$ は V の graded な部分空間です. このとき, g-捩じれ V-弱加群 M とは, $\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $M = M^0 \oplus M^1$ と線形写像

$$Y : V \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)[[z^{1/T}, z^{-1/T}]], \qquad a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \tag{2.5}$$

であって以下の条件をみたすものです.

(1) 任意の $a \in V$ と $u \in M$ に対して, n が十分大きいとき $a_n u = 0$.

(2) $a \in V^{(r;g)}$ $(0 \leq r \leq T-1)$ かつ $n \notin \frac{r}{T} + \mathbb{Z}$ ならば $a_n = 0$.

(3) $a \in V^k, u \in V^\ell$ に対して, $a_n u \in M^{k+\ell}$.

(4) 任意の $a \in V^{(s;g)} \cap V^k$, $b \in V^{(t;g)} \cap V^\ell$ と整数 p および $q \in \frac{s}{T} + \mathbb{Z}$, $r \in \frac{t}{T} + \mathbb{Z}$ に対して (2.2) が成り立つ.

(5) 任意の $n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$ に対して $\mathbf{1}_n = \delta_{n,-1}\mathrm{id}_M$ が成り立つ.

$\omega \in V^{(0;g)} \cap V^0$ より, $Y(\omega, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ とでき, これが M 上の中心電荷 c (V と同じ) の Virasoro 代数の表現を与えること, および $Y(L_{-1}a, z) = \frac{d}{dz}Y(a, z)$ が成り立つことが知られています ([5]).

弱加群においては, 頂点作用素超代数のように, V の L_0 による固有空間分解を仮定しませんが, V が C_2 有限性と呼ばれる性質を持つ場合には, 任意の有限生成弱加群は L_0 の広義固有空間に分解されることが知られています ([10]). このような加群を対数的加群とよびます. $\mathcal{LM}_g(V)$ で g に付随する対数的捩じれ V-加群の圏で, 射は $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ準同型 $\mathrm{Hom}\,^0_V(M, N)$ であるものとします.

3 交絡作用素

この節では頂点作用素超代数の捩じれ加群の間の交絡作用素 (intertwining operator) とフュージョン積と呼ばれる加群の間のテンソル積について述べます. 交絡作用素は加群の間の頂点作用素のようなもので, z に関するべき級数として表示されます. 交絡作用素に関する詳しい解説は, [6] および [13] を参照してください.

このような作用素の空間は, $\mathbb{P}^1$ 上の三点共形ブロックの空間と呼ばれる共形場理論に現れる重要な空間と同型となることが知られています ([4, 14]). 対数的加群も含めたフュージョン積の理論では, これに対数項を追加した対数的交絡作用素というものを基礎にして考える ([9, 11]) ことが多いのですが, ここでは, [2, 3] において導入した, semi-intertwining operator とよばれる作用素と微分に関するべき零性を用いて定式化します.

V を頂点作用素超代数, g_1, g_2, g_3 を互いに可換な V の自己同型で, $g_i^T = 1$ をみたすものとします. このとき, V の g_1, g_2, g_3 に関する同時固有空間分解を

$$V = \bigoplus_{0\le i_1, i_2, i_3 \le T-1} V_{(i_1,i_2,i_3)} = \bigoplus_{0\le i_1, i_2, i_3 \le T-1} V_{(i_1,i_2)} \tag{3.1}$$

ここで, $V_{(i_1,i_2,i_3)} = V^{(i_1;g_1)} \cap V^{(i_2;g_2)} \cap V^{(i_3;g_3)}$, $V_{(i_1,i_2)} = V^{(i_1;g_1)} \cap V^{(i_2;g_2)}$ です.

これらの自己同型に関する捩じれ加群を (M^i, Y^{g_i}) とし, $a \in V_{i_1,i_2,i_3)}$ について

$$Y^{g_k}(a, z) = \sum_{p\in \frac{i_k}{T}+\mathbb{Z}} a_p^{g_k} z^{-p-1} \tag{3.2}$$

としておきます. このとき, $\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ 型の semi-intertwining operator とは,

$$\mathcal{Y} : M^1 \to \mathrm{Hom}\,_{\mathbb{C}}(M^2, M^3)\{z\}, \qquad u^1 \mapsto \mathcal{Y}(u^1, z) = \sum_{r\in\mathbb{C}} u^1_r z^{-r-1} \tag{3.3}$$

であって, 以下の条件をみたすものです.

(1) 任意の $u \in M^1$ と $v \in M^2$ に対して, r の実数部分が十分大きいとき, $u_r v = 0$.

(2) $u \in (M^1)^i, v \in (M^2)^j$ のとき, $u_r v \in (M^3)^{i+j}$.

(3) $a \in V^i$, $u \in (M^1)^j$, $p, q \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{q}{k} (a^{g_1}_{p+k} u)_{r+q-k} v$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} (-1)^k (a^{g_3}_{p+q-k} u_{r+k} - (-1)^{ij} e^{p\pi\sqrt{-1}} u_{p+r-k} a^{g_2}_{q+k} v) \quad (3.4)$$

このような作用素の集合はベクトル空間となっていて, これを $I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ と書きます.

ベクトル空間 $I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ には, $A_i = \mathrm{End}^0_V(M^i)$, つまり, 次数を保つ V 準同型の環が作用します. 実際, $\mathcal{Y} \in I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ とすると,

$$\mathcal{Y}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}(u,z)v = \alpha_3(\mathcal{Y}(\alpha_1(u),z)\alpha_2(v)) \quad (3.5)$$

により, $I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ は $A_1^{op} \otimes A_2^{op} \otimes A_3$-加群となります. ここで A^{op} は A の反転環です.

$\mathcal{Y} \in I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ に対して,

$$(t\mathcal{Y})(u,z) = z\mathcal{Y}(u,z), \qquad (D\mathcal{Y})(u,z) = \frac{d}{dz}\mathcal{Y}(u,z) - \mathcal{Y}(L_{-1}u,z) \quad (3.6)$$

と定めると, $t\mathcal{Y}$ および $D\mathcal{Y}$ はともに $\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ 型の semi-intertwining operator となります.

Definition 3.1. $\mathcal{Y} \in I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ が tD-べき零であるとは, ある自然数 K が存在して, $((tD)^k\mathcal{Y}) = 0$ となることをいう.

$I_V\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ の tD-べき零 semi-intertwining operator 全体の部分空間を $I_V^{nil}\binom{M^3}{M^1\ M^2}$ と書きます.

V^1, V^2 を頂点作用素超代数とします. このとき, $V^1 \otimes V^2$ は自然に頂点作用素超代数の構造を持ちます. $g_i\,(i = 1,2,3)$ を V^1 の自己同型, $h_i\,(i = 1,2,3)$ を V^2 の自己同型し, $M^i\,(i = 1,2,3)$ を g_i-twisted 対数的 V^1-加群, $N^i\,(i = 1,2,3)$ を h_i-twisted 対数的 V^2-加群とすると, 線形写像

$$\mathfrak{I} : I_V^{nil}\begin{pmatrix} M^3 \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix} \otimes I_V^{nil}\begin{pmatrix} N^3 \\ N^1\ N^2 \end{pmatrix} \to I_{V^1\otimes V^2}^{nil}\begin{pmatrix} M^3 \otimes N^3 \\ M^1 \otimes N^1\ M^2 \otimes N^2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

が

$$\mathfrak{I}(\mathcal{Y}^1 \otimes \mathcal{Y}^2)(u^1 \otimes u^2, z)(v^1 \otimes v^2) = (-1)^{p(v^1)p(v^2)} \mathcal{Y}^1(u^1,z)v^1 \otimes \mathcal{Y}^1(u^2,z)v^2 \quad (3.8)$$

により定まります. このとき次が成り立ちます.

Lemma 3.2. $I_V^{nil}\binom{M^3}{M^1\,M^2}$ または $I_V^{nil}\binom{N^3}{N^1\,N^2}$ が有限次元であれば, $\mathfrak{J}$ は同型.

これらの tD-べき零な semi-intertwining operator を用いて, 加群の間のフュージョン積を定義します.

Definition 3.3. V を頂点作用素超代数, g_1, g_2, g_3 を互いに可換な V の自己同型とし, $M^i \in \mathcal{LM}_{g_i}(V)$, $(i=1,2)$ とする. このとき, M^1 と M^2 のフュージョン積 ($M^1 \boxtimes M^2$ であらわす) とは $X \in \mathcal{LM}_{g_3}(V)$ および, $\binom{X}{M^1\,M^2}$ 型の tD-べき零な semi-intertwining operator の組 $(X, \mathcal{Y}_X)$ であって, 次の条件をみたすものである. $W \in \mathcal{LM}_{g_3}$ および, $\binom{W}{M^1\,M^2}$ 型の tD-べき零な semi-intertwining operator $\mathcal{Y}_W$ に対して, $\phi \in \mathrm{Hom}_V^0(X, W)$ で $\mathcal{Y}_W = \phi \circ \mathcal{Y}_X$ をみたすものがただ一つ存在する.

フュージョン積は加群のテンソル積がみたすべき条件を満足していると予想されますが, 証明はまだ得られていません.

フュージョン積に関しては, 以下の性質が重要です.

Proposition 3.4. 記号は上の *Definition* と同様とする. このとき, $M^1 \boxtimes M^2$ が存在すれば,

$$\mathrm{Hom}_V^0(M^1 \boxtimes M^2, W) \cong I_V^{nil}\begin{pmatrix} W \\ M^1\ M^2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

が成り立つ.

また, 次が成り立ちます.

Theorem 3.5. V^1, V^2 を頂点作用素超代数, g_1, g_2, g_3 を V^1 の互いに可換な位数有限の自己同型, h_1, h_2, h_3 を V^2 の互いに可換な位数有限な自己同型とする. また, $M^i \in \mathcal{LM}_{g_i}(V^1)\,(i=1,2)$, $N^i \in \mathcal{LM}_{h_i}(V^2)\,(i=1,2)$ とし, $M^1 \boxtimes M^2$ および $N^1 \boxtimes N^2$ が存在すると仮定する. このとき,

$$(M^1 \otimes N^1) \boxtimes (M^2 \otimes N^2) \cong (M^1 \boxtimes N^1) \otimes (M^2 \boxtimes N^2) \tag{3.10}$$

である.

4 シンプレクティックフェルミオン

この節では [1] において構成されたシンプレクティックフェルミオン頂点作用素超代数と, その加群および捩じれ加群について述べます.

$\mathfrak{h}$ を $2d$ 次元のベクトル空間とし, $\langle , \rangle$ を $\mathfrak{h}$ 上の非退化な歪対称双線形形式とします. このとき, $\mathfrak{h}$ の基底 $\{e^i, f^i \mid 1 \le i \le d\}$ であって,

$$\langle e^i, e^j \rangle = \langle f^i, f^j \rangle = 0, \quad \langle f^i, e^j \rangle = \delta_{i,j} \tag{4.1}$$

をみたすものがとれます. この $\mathfrak{h}$ を奇部分とするスーパー可換リー超代数のアフィン化を $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ とします. ここで, $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ は奇部分, $\mathbb{C}K$ は中心で偶部分です. スーパー交換関係を書き下しておくと,

$$[h^1 \otimes t^m, h^2 \otimes t^n] = m\langle h^1, h^2 \rangle \delta_{m+n,0} K, \qquad [K, \hat{\mathfrak{h}}] = 0 \tag{4.2}$$

となります.

$\mathbb{C}_+$ を部分代数 $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}K$ の 1 次元表現で, K が 1 で作用するものとします. また, $\mathbb{C}_+$ は偶部分のみであるとしておきます. $\mathbb{C}_+$ の $\hat{\mathfrak{h}}$ への誘導加群を $\mathcal{F}$ とすれば $\mathcal{F}$ はベクトル空間として, $\bigwedge(\mathfrak{h}\otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}])$ と同型であって, 自然に $\mathbb{Z}_2$-grading をもちます. いま, $h\otimes t^n$ の作用を h_n, $\mathbf{1}=1\otimes 1$ とかき, $h(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_nz^{-n-1}$ とします. このとき, $\mathcal{F}$ は真空ベクトルを $\mathbf{1}$, Virasoro 元を $\omega=\sum_{i=1}^d e^i_{-1}f^i_{-1}\mathbf{1}$ により C_2 有限な頂点作用素超代数となることが知られています ([1]).

次に, $\mathcal{F}$ の対数的加群について解説します. M を $\bigwedge(\mathfrak{h})$ の $\mathbb{Z}_2$-graded な加群とすると,

$$h_nu=\delta_{n,0}hu, \quad Ku=u \tag{4.3}$$

とすると, M は $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[t]\oplus\mathbb{C}K$ 加群となり, $\mathcal{V}(M)$ を $\hat{\mathfrak{h}}$ への誘導加群とします. このとき, $\mathcal{V}(M)$ は $\mathbb{Z}_2$-graded なベクトル空間で, $\mathcal{F}$-加群となります. さらに, $\mathcal{V}(M)$ はベクトル空間として, $\mathcal{F}\otimes M$ と同型です. $M=\bigwedge(\mathfrak{h})$ のとき, $\widehat{\mathcal{F}}=\mathcal{V}(M)$ とします. このとき, $L_0 1\mathbin{\hat{\otimes}}1=\sum_{i=1}^d 1\otimes e^i\wedge f^i$ となるので, $L_0^{d+1}(1\otimes 1)=0$ となり, $\widehat{\mathcal{F}}$ は対数的加群であることがわかります.

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{Z}_2$-graded な $\bigwedge(\mathfrak{h})$-加群の圏とすると, 次が成り立ちます.

Theorem 4.1. $\mathcal{V}:\mathcal{A}\to\mathcal{LM}_1(\mathcal{F})$ は圏同値を与える.

これより $\mathcal{F}$ の既約加群は $\mathcal{F}$ と, $\mathcal{F}$ の grading を入れ替えた $\mathcal{F}^\vee$ であり, それぞれの射影被覆は $\widehat{\mathcal{F}}$ および $\widehat{\mathcal{F}}^\vee$ となります.

次に, $\theta:=\theta_{\mathcal{F}}$ に付随する捩じれ加群について解説します. $\hat{\mathfrak{h}}_\theta=\mathfrak{h}\otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K$ とすれば, $\hat{\mathfrak{h}}$ と同様に, $\hat{\mathfrak{h}}_\theta$ はスーパーリー代数となります. このとき, $\mathbb{C}\mathbf{1}_t$ を $\mathfrak{h}_\theta\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K$ の even な 1 次元表現で, $K\mathbf{1}_t=1$ なるものとすると, $\mathcal{F}$ の場合と同様に, 誘導表現 $\mathcal{F}_t$ が定義されます. このベクトル空間には, θ に付随する捩じれ加群の構造が入り, L_0 による固有空間分解は

$$\mathcal{F}_t=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\mathcal{F}_t)_{-\frac{d}{8}+\frac{n}{2}} \tag{4.4}$$

で与えられます. また, 以下の圏同値が成り立ちます.

Theorem 4.2. $\mathcal{LM}_\theta(\mathcal{F})$ は有限次元スーパーベクトル空間の圏と同値である.

したがって, $\mathcal{F}_t$ および $\mathcal{F}_t^\vee$ が既約捩じれ加群の完全代表系となります.

5 交絡作用素の構成

この節では (捩じれ) 射影加群の間の semi-intertwining operator の空間を決定し, フュージョン積の計算を行います. とくに $d=1$ の場合に次元の決定を行います. ここでは $d=1$ の場合には, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{T}$ と書くことにより区別します. $d>1$ の場合は, $\mathcal{F}=\mathcal{T}^{\otimes d}$ (対数的加群 $\widehat{\mathcal{F}}$ や捩じれ加群 $\mathcal{F}_t$ についても同様) となっていることから, Lemma 3.2 を用いることで交絡作用素の空間の次元が決定されます.

5.1 $\binom{\mathcal{F}_t}{\widehat{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}_t}$ 型の semi-intertwining operators

まず, 次で定義される作用素のベクトル空間 $\mathcal{L}_t$ を考えます.

$$\phi : \bigwedge(\mathfrak{h}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{T}_t)\{z\}, \qquad u \mapsto \phi(u,z) = \sum_{r\in\mathbb{C}} u_r z^{-r-1}, \tag{5.1}$$

であって, r の実部が十分大きいとき, $u_r v = 0$ かつ

$$h_q \phi(u,z) = (-1)^j \phi(u,z) h_q = z^q \phi(h \wedge u, z) \tag{5.2}$$

が任意の $u \in \bigwedge(\mathfrak{h})^j$ および $h \in \mathfrak{h}$ に対して成り立つ.

$\mathcal{L}_t$ の even (odd) な作用素の作る部分空間を $\mathcal{L}_t^0$ ($\mathcal{L}_t^1$) とします.

$\mathcal{Y}$ を $\binom{\mathfrak{T}_t \oplus \mathfrak{T}_t^\vee}{\widehat{\mathfrak{T}}\ \mathfrak{T}_t}$ とすると, $\Phi(\mathcal{Y})$ を $\widehat{\mathfrak{T}}$ の $\bigwedge(\mathfrak{h})$ と同型な部分空間への制限とします. このとき, 次が成り立ちます.

Theorem 5.1. Φ は同型 $I_{\mathfrak{T}}\binom{\mathfrak{T}_t \oplus \mathfrak{T}_t^\vee}{\widehat{\mathfrak{T}}\ \mathfrak{T}_t} \to \mathcal{L}_t^0 \oplus \mathcal{L}_t^1$ を与える. 特に, $I_{\mathfrak{T}}\binom{\mathfrak{T}_t}{\widehat{\mathfrak{T}}\ \mathfrak{T}_t} \cong \mathcal{L}_t^0$ および $I_{\mathfrak{T}}\binom{\mathfrak{T}_t^\vee}{\widehat{\mathfrak{T}}\ \mathfrak{T}_t} \cong \mathcal{L}_t^1$.

この同型写像の逆写像 Ψ は明示的に書くことができます ([3]). そこで, まず $\mathcal{L}_t$ の元であって, この逆写像で送ると tD-べき零性をもつ semi-intertwining operator になるようなものを構成します.

まず, $h(z) = \sum_{p\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} h_p z^{-p-1}$ の積分を,

$$\int h(z)\,dz = \sum_{p\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \frac{1}{-p} h_p z^{-p} \tag{5.3}$$

とし, $\Theta(z) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{T}_t)\{z\}$ を

$$\Theta(z) = -\,{\circ\atop\circ} \int e(z)\,dz \circ f(z) {\circ\atop\circ} + {\circ\atop\circ} \int f(z)\,dz \circ e(z) {\circ\atop\circ} \tag{5.4}$$

と定めます. ここで, 記号 ${\circ\atop\circ}\ {\circ\atop\circ}$ は

$$h^1_{n_1} h^2_{n_2} {\circ\atop\circ} = \begin{cases} h_{n_1} h^2_{n_2}, & n_1 < 0, \\ -h_{n_2} h^2_{n_1}, & n_1 \geq 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

により定めます. $\Theta(z)$ は整数べきの級数になるので, $\Theta(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Theta(k) z^{-k-1}$ とすればその積分は,

$$\int \Theta(z)\,dz = \Theta(0)\log z + \sum_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{-k}\Theta(k) z^{-k} \tag{5.6}$$

となります. このとき, $\Theta(k) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_t)$ は

$$[h_q, \Theta(k)] = \frac{-k}{k+q} h_{k+q} \tag{5.7}$$

をみたします. (5.6) には $\log z$ の項があるように見えるのですが, $\Theta(0)$ は $\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}_t)$ の元でかつ, $\Theta(0)\mathbf{1}_t = 0$ となるので, 実際には $\log z$ の項はありません.

次に, $\Gamma \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_t)$ を $v = h^1_{-n_1} \cdots h^s_{-n_s}\mathbf{1}_t$ に対して,

$$\Gamma(v) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{n_i} v \tag{5.8}$$

として定めます. これら (5.3), (5.4), (5.8) を用いて, $\phi^t_1 : \bigwedge(\mathfrak{h}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_t)\{z\}$ を

$$\phi^t_1(1, z) = \Gamma + \int \Theta(z)\, dz, \tag{5.9}$$

$$\phi^t_1(h, z) = -\int h(z)\, dz, \tag{5.10}$$

$$\phi^t_1(e \wedge f, z) = \mathrm{id}_{\mathcal{T}_t} \tag{5.11}$$

により定めます.

Theorem 5.2. $\phi^t_1 \in \mathcal{L}^0_t$ であり, $\Psi(\phi^t_1) \in I_{\mathcal{T}}\binom{\mathcal{T}_t}{\widehat{\mathcal{T}}\ \mathcal{T}_t}$ は tD-べき零である.

(3.5) に対応するような, $\mathcal{L}_t$ への $\bigwedge(\mathfrak{h})$ の作用を以下で定義します.

$$(u \cdot \phi)(v, z) = \theta^i \phi(v \wedge u, z), \quad u \in \bigwedge(\mathfrak{h})^i,\ v \in \bigwedge(\mathfrak{h}),\ \phi \in \mathcal{L}_t. \tag{5.12}$$

さらに, $\mathcal{N}_t = \{\phi \in \mathcal{L}_t \mid \Psi(\phi)$ は tD-べき零$\}$ とすれば, $\mathcal{N}_t$ は $\mathcal{L}_t$ の $\bigwedge(\mathfrak{h})$-部分加群となります.

Theorem 5.3. $\bigwedge(\mathfrak{h})$-加群 $\mathcal{N}_t$ は ϕ^t_1 で生成される. 特に, $u \cdot \phi^1_t = \phi^t_u$ と書くことにすると, $I^{nil}_{\mathcal{T}}\binom{\mathcal{T}_t}{\widehat{\mathcal{T}}\ \mathcal{T}_t}$ の基底は $\{\Psi(\phi^t_1), \Psi(\phi^t_{e\wedge f})\}$ であり, $I^{nil}_{\mathcal{T}}\binom{\mathcal{T}^\vee_t}{\widehat{\mathcal{T}}\ \mathcal{T}_t}$ の基底は $\{\Psi(\phi^t_e), \Psi(\phi^t_f)\}$ となる.

5.2 $\binom{\widehat{\mathcal{T}}}{\widehat{\mathcal{T}}\ \widehat{\mathcal{T}}}$ 型の semi-intertwining operators

$\mathcal{L}$ を作用素 $\phi : \bigwedge(\mathfrak{h}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widehat{\mathcal{T}})\{z\}$ で, $\mathcal{L}_t$ と同様の条件をみたすものの空間とします. また, 部分空間 $\mathcal{L}^0$ および $\mathcal{L}^1$ も同様に定義します. このとき, Theorem 5.1 と同様の結果が成り立ちます. そこで, この場合も, $\mathcal{L}$ の元を構成することが第一の目標となります.

$\phi_1 : \bigwedge(\mathfrak{h}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widehat{\mathcal{T}})\{z\}$ を,

$$\phi_1(e \wedge f, z) = \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{T}}}, \tag{5.13}$$

$$\phi_1(h, z) = \hat{c}(h) - \int' h(z)\, dz \tag{5.14}$$

$$\phi_1(1, z) = \hat{\tau} + \int' e(z)\, dz \circ \hat{c}(v) - \int' f(z)\, dz \circ \hat{c}(e) - :\int' e(z)\, dz \circ \int' f(z)\, dz: \tag{5.15}$$

で定めます. ここで, $h(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} h_q z^{-q-1}$, $\int' h(z)\, dz = \sum_{q\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{-q} h_q z^{-q}$ で, $c(h)$ および τ は $\bigwedge(\mathfrak{h})$ 上の線形変換で, それぞれ $c(h)(1) = 0$, $c(h)(h') = \langle h, h'\rangle 1$, $c(h)(e \wedge f) = h$ と, $\tau(1) = 1$, $\tau(h) = h$ および $\tau(e \wedge f) = e \wedge f + 1$ で定義されるものです. さらに, $\hat{c}(h) = \theta \otimes c(h) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widehat{\mathcal{T}})$ かつ, $\hat{\tau} = \mathrm{id}_{\mathcal{T}} \otimes \tau$ です.

このとき, ϕ_1 の $I_{\mathcal{T}}\binom{\widehat{\mathcal{T}}\oplus\widehat{\mathcal{T}}^\vee}{\widehat{\mathcal{T}}\,\widehat{\mathcal{T}}}$ での像は tD-べき零性をもちます.

ここで, $R = \bigwedge(\mathfrak{h})^\circ \otimes \bigwedge(\mathfrak{h})^\circ \otimes \bigwedge(\mathfrak{h})$ とすると, $\mathcal{L}$ は以下の作用により, R-加群となります.

$$(a \otimes b \otimes c)\phi)(u, z) = (\mathrm{id} \otimes c^R) \circ \theta^i \circ \phi(u \wedge a, z) \circ (\mathrm{id} \otimes b^R). \tag{5.16}$$

ここで, a^R は右から a をかける作用です.

このとき, $\mathcal{N}$ を tD-べき零な semi-intertwining operator に対応する $\mathcal{L}$ の元の空間とすると以下が成り立ちます.

Theorem 5.4. *$\mathcal{N}$ は R-加群として ϕ_1 で生成される. また,*

$$\overline{I}_{\mathcal{T}}^{(nil)}\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{T}}\\ \widehat{\mathcal{T}}\ \widehat{\mathcal{T}}\end{pmatrix} \cong \bigwedge(\mathfrak{h})^0 \otimes \bigwedge(\mathfrak{h})^0 \oplus \bigwedge(\mathfrak{h})^1 \otimes \bigwedge(\mathfrak{h})^1, \tag{5.17}$$

$$\overline{I}_{\mathcal{T}}^{(nil)}\begin{pmatrix}\widehat{\mathcal{T}}^\vee\\ \widehat{\mathcal{T}}\ \widehat{\mathcal{T}}\end{pmatrix} \cong \bigwedge(\mathfrak{h})^0 \otimes \bigwedge(\mathfrak{h})^1 \oplus \bigwedge(\mathfrak{h})^1 \otimes \bigwedge(\mathfrak{h})^0. \tag{5.18}$$

6 射影加群のフュージョン積

前節の結果を用いて直既約射影加群の間のフュージョン積を計算します. 対数的 $\mathcal{T}$-加群の圏は $\bigwedge(\mathfrak{h})$ の Z_2-graded な加群の圏と同値だったので, 次のことが成り立ちます.

Lemma 6.1. *$M \in \mathcal{LM}_1(\mathcal{T})$ が射影的であることの必要十分条件は $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, \widehat{\mathcal{T}}) = 4 \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(M, \mathcal{T})$ である.*

$\widehat{\mathcal{T}}$ の構造から, $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{T}) = 1$ と $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{T}^\vee) = 0$ が成り立ちます. したがって, 次のことも成り立ちます.

Proposition 6.2. *$M \in \mathcal{LM}_1(\mathcal{T})$ が射影的であるとき, $m = \dim \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{T}}(M, \mathcal{T})$, $n = \dim \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{T}}(M, \mathcal{T}^\vee)$ とおくと, $M \cong \widehat{\mathcal{T}}^{\oplus m} \oplus (\widehat{\mathcal{T}}^\vee)^{\oplus n}$ である.*

これらと, Proposition 3.4, Theorem 5.3 および Theorem 5.4 を用いることで, 以下の結果を得ます.

Theorem 6.3. *(1)* $\mathcal{T}_t \boxtimes \mathcal{T}_t \cong \widehat{\mathcal{T}}$.

(2) $\widehat{\mathcal{T}} \boxtimes \widehat{\mathcal{T}} \cong \widehat{\mathcal{T}}^{\oplus 2} \oplus (\widehat{\mathcal{T}}^{\vee})^{\oplus 2}$.

(3) $\widehat{\mathcal{T}} \boxtimes \mathcal{T}_t \cong \mathcal{T}_t^{\oplus 2} \oplus (\mathcal{T}_t^{\vee})^{\oplus 2}$.

このとき, $\mathcal{LM}_1(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{LM}_\theta(\mathcal{T})$ は制限型の量子群 $\overline{U}_q(sl_2)$ の $q = e^{\pi\sqrt{-1}/2}$ の有限次元表現の圏とモノイダル圏として同値になっていることが予想されます. $d > 1$ の場合にどのような Hopf 代数が現れるかは興味深い問題だと思われます.

References

[1] T. Abe, A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the symplectic fermionic vertex operator superalgebra. Math. Z. 255 , no. 4, 755–792, (2007).

[2] T. Abe and Y. Arike, Fusion products of twisted supermodules for vertex operator superalgebras, In preparation.

[3] T. Abe and Y. Arike, Fusion products for the symplectic fermionic vertex operator superalgebra, In preparation.

[4] Y. Arike, Logarithmic intertwining operators and the space of conformal blocks over the projective line, *Lett. Math. Phys.* **101**, no. 1, 13–26, (2012).

[5] C. Dong, H.-S. Li and G. Mason, Twisted representations of vertex operator algebras, *Math. Ann.* **310**, 571–600, (1998).

[6] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, *Mem. Amer. Math. Soc.* **104**, (1993).

[7] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., Vol.**134**, Academic Press, Boston, 1988.

[8] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields, *MSJ Memoirs* **4**, Mathematical Society of Japan, (1999).

[9] A. Milas, Weak modules and logarithmic intertwining operators for vertex operator algebras in Recent developments in infinite-dimensional Lie algebras and conformal field theory (Charlottesville, VA, 2000), 201–225, *Contemp. Math.*, **297**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[10] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness, *Duke Math. J.* **122**, no. 1, 51–91, (2004).

[11] M. Miyamoto, Flatness and semi-rigidity of vertex operator algebras, arXiv:1104.4675.

[12] I. Runkel, A braided monoidal category for free super-bosons, arXiv:1209.5554v1.

[13] X. Xu, *Introduction to vertex operator superalgebras and their modules*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[14] Y.-C. Zhu, Global vertex operators on Riemann surfaces, *Commun. Math. Phys.* **165**, 485–531, (1994).

[15] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9**, 237–302, (1996).