数理解析研究所講究録
第1841巻 2013年 135-141

標準DC計画問題と分数計画問題の凸計画問題への分解

島根大学大学院総合理工学研究科 藤原ゆかり (Yukari Fujiwara)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院総合理工学研究科 日高史和 (Miwa Hidaka)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院総合理工学研究科 黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

概要

標準DC計画問題と分数計画問題について考察する。標準DC計画問題と分数計画問題は非凸計画問題なので、Lagrange型双対定理を導くのは困難である。そこで、本論文では、標準DC計画問題と分数計画問題をそれぞれ凸計画問題に分解し、既存の凸計画問題の結果を用いることで得られたLagrange型双対定理を紹介する。

1 導入

次のような標準DC計画問題を考える。

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{最小化} & \langle a, x\rangle \\
 & \text{条件} & f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0
\end{array}
$$

ただし、$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。標準DC計画問題 (P) は次のような一般的なDC計画問題を同値変形したものである ([3])。

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x) - g_0(x) \\
\text{条件} & f_i(x) - g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

ただし、 任意の $i = 0, \ldots, m$ に対して $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数とする。

標準DC計画問題 (P) は一般的には凸計画問題ではない。しかし、(P) は次のような凸計画問題 $(P_y)(y \in \mathbb{R}^n)$ に分解し考察することが可能である。

$$
\begin{array}{lll}
(P_y) & \text{最小化} & \langle a, x\rangle \\
 & \text{条件} & f(x) \leq 0, \\
 & & \langle -y, x\rangle + g^*(y) \leq 0
\end{array}
$$

実際、(P) の最適値は (P_y) の最適値の $y \in \mathbb{R}^n$ での下限となる ([10])。本論文では、このような考え方で、標準 DC 計画問題と分数計画問題の双対理論について考察する。

2 準備

集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ +\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を A の標示関数という。$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ とする。f が凸関数であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$ に対して，

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

となるときをいう。次に f を凸関数とし，f の共役関数 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は以下のように定義される。

$$f^*(u) = \sup\{\langle u, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

なお $\langle u, x\rangle$ は二つのベクトル u と x の内積である。関数 f に対して実行定義域、エピグラフ、レベル集合は以下のように定義される。

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathrm{dom} f, f(x) \leq r\}$$

$$\{f \leq \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \lambda\} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、f の x における劣微分は

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x\rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n\}$$

で表される。

3 標準 DC 計画問題の双対定理

まず、導入で書いた標準 DC 計画問題 (P) を凸計画問題 $(P_y)(y \in \mathbb{R}^n)$ に分割して得られた結果を紹介する。$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数とし、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0\}$ は空集合でないとする。標準 DC 計画問題 (P) の最適値を

$$\alpha = \inf_{x \in S} \langle a, x\rangle$$

とおく。このとき、標準 DC 計画問題 (P) の双対問題を

$$\beta = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda,\mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x\rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x\rangle + g^*(y))\}$$

として定義すると、双対性について次が成立する。

命題 3.1. (弱双対性 [10]) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数とし、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0\}$ は空集合でないとする。このとき、$\alpha \geq \beta$ が成り立つ。

定理 3.1. (強双対性 1 [10]) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数とし、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0\}$ は空集合でないとする。任意の $z \in \mathrm{dom} g^*$ に対して、

$$\mathrm{cone\,co}(\mathrm{epi} f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty)) \tag{1}$$

が閉のとき、$\alpha = \beta$ が成り立つ。また、β の $\lambda, \mu \geq 0$ は任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して最大値をとる。

次に、標準 DC 計画問題 (P) と同値な次のような問題について考察する。

$$\begin{array}{lll} (P') & \text{最小化} & \langle a, x\rangle + \delta_{\{f \leq 0\}}(x) \\ & \text{条件} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

ただし、$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。明らかに、(P') の最適値と (P) の最適値は同じなので、(P') の最適値も

$$\alpha = \inf_{g(x) \geq 0} \{\langle a, x\rangle + \delta_{\{f \leq 0\}}(x)\}$$

となる。(P') の双対問題の最適値は Lemaire[2] の結果を用いると、次の定理のように β と一致する。

定理 3.2. (強双対性 2 [10]) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数とし、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0\}$ は空集合でないとする。

$$\mathrm{cone\,epi} f^* + \{0\} \times [0, +\infty) \tag{2}$$

が閉のとき、$\alpha = \beta$ が成り立つ。また、β の $\lambda, \mu \geq 0$ は任意の $y \in \mathbb{R}^n$ に対して最大値をとる。

ここで、定理 3.1 と定理 3.2 に関する例を紹介する。

例 3.1. 次の問題を考察する。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x \\ \text{条件} & f(x) = x^2 - 1 \leq 0,\ g(x) = |x + 2| - 2 \geq 0. \end{array}$$

f, g の共役関数を計算すると、

$$f^*(y) = \frac{y^2}{4} + 1\ ,\ g^*(y) = \begin{cases} -2y+2 & (y \in [-1,1]) \\ +\infty & (y \notin [-1,1]) \end{cases}$$

となる。ここで、任意の $z \in \mathrm{dom} g^*$ に対して、$\mathrm{cone\,co}\,(\mathrm{epi} f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty))$ は閉であり、また、$\mathrm{cone\,epi} f^* + \{0\} \times [0, +\infty)$ も閉であるので、定理 3.1 と定理 3.2 の仮定が成立する。実際、

$$\inf_{\substack{f(x) \le 0 \\ g(x) \ge 0}} \langle a, x \rangle = \inf_{x \in [0,1]} x = 0$$

$$\begin{aligned}
&\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda, \mu \ge 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle + g^*(y))\} \\
&\qquad = \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{\lambda, \mu \ge 0} \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x - \lambda(x^2 - 1) + \mu(-yx - 2y + 2)\} \\
&\qquad = \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{\lambda, \mu \ge 0} \left\{ -\frac{(1 - \mu y)^2}{4\lambda} - \lambda + \mu(-2y + 2) \right\} \\
&\qquad = \inf_{y \in \mathbb{R}} \begin{cases} +\infty & (y \le 0) \\ -2 + \frac{2}{y} & (y > 0) \end{cases} \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

となり、直接的にも $\alpha = \beta$ であることが確かめられる。

また、定理 3.1 の仮定 (1) と定理 3.2 の仮定 (2) に強弱関係はない。なぜなら「(1)$\Rightarrow$ (2)」「(1)$\Leftarrow$ (2)」いずれも反例がある ([10])。このことは、(1) と (2) を含む制約想定の存在を示唆しており、非常に興味深い。

4 分数計画問題の双対定理

以降では，次のような分数計画問題 (Q) を考える。

$$\begin{array}{lll} (Q) & 最小化 & \dfrac{f(x)}{g(x)} \\ & 条件 & x \in S \end{array}$$

ただし，f, g, h_1, $\ldots$, $h_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸関数、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \le 0\ (i = 1,\ \ldots,\ m)\}$ である。また、制約不等式 $\{h_i(x) \le 0\ (i = 1,\ \ldots,\ m) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ は Slater 制約想定を満たし、関数 f, g については次の条件を満たすものとする:

$$x \in S \Rightarrow f(x) \ge 0,\ g(x) > 0.$$

分数計画問題の研究では，Dinkelbach [1] が考案した手法がよく用いられている。それは、$\mu_0 = \inf_{x \in S} f(x)/g(x)$ とし、

$$\begin{array}{lll} (Q') & 最小化 & f(x) - \mu_0 g(x) \\ & 条件 & x \in S \end{array}$$

を解くことで最適解を求める方法である。

[11] では Dinkelbach とは異なる分数計画問題の解法として、分数計画問題 (Q) を凸計画問題に分解して (Q) の最適値を直接求める方法を考えた。Fang, Gao, Sheu, Xing [8] から動機を得て、任意の $t > 0$ に対して凸計画問題 (Q_t) を次のように定めた:

$$
\begin{array}{lll}
(Q_t) & \text{最小化} & \dfrac{f(x)}{t} \\
 & \text{条件} & x \in S_t
\end{array}
$$

ただし、$S_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid t - g(x) \leq 0,\ h_i(x) \leq 0\ (i = 1,\ \ldots,\ m)\}$ である。このとき、分数計画問題 (Q) と凸計画問題 (Q_t) の間には次の関係が成り立つ。

定理 4.1. ([11])

$$
\inf_{x \in S} \frac{f(x)}{g(x)} = \inf_{0 < t \leq t_0} \inf_{x \in S_t} \frac{f(x)}{t}
$$

ただし、$t_0 = \sup_{x \in S} g(x)$ である。

したがって, 分数計画問題 (Q) の最適値を求めるには、分解した凸計画問題 (Q_t) の最適値を求めればよいことが分かる。また、凸計画問題 (Q_t) の最適値のうち、最小値をとる $\hat{t} \in (0, t_0]$ が存在するとき、分数計画問題 (Q) と凸計画問題 $(Q_{\hat{t}})$ の最適解は一致する ([11])。

次に、分解した凸計画問題 (Q_t) について考察していく。ここでは制約不等式 $\{h_i(x) \leq 0\ (i = 1,\ \ldots,\ m) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ は Slater 制約想定を満たすと仮定しているため、任意の $t \in (0,\ t_0)$ に対して $\{t - g(x) \leq 0,\ h_i(x) \leq 0\,(i = 1,\ \ldots,\ m) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ は Slater 制約想定を満たす。したがって、$t \in (0,\ t_0)$ の凸計画問題 (Q_t) の最適値については次の等式が成り立つ:

$$
\inf_{x \in S_t} \frac{f(x)}{t} = \max_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \\ \mu \geq 0}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{f(x)}{t} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \mu(t - g(x)) \right\}.
$$

$\max_{x \in S} g(x)$ が存在しないとき、(Q_{t_0}) の最適値は $+\infty$ となる。そのため、先に述べたとおり解くのが簡単な $t \in (0,\ t_0)$ の凸計画問題 (Q_t) のみについて考えればよく、実際、(Q) の最適値は次の式で与えられる:

$$
\inf_{0 < t < t_0} \max_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0 \\ \mu \geq 0}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{f(x)}{t} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \mu(t - g(x)) \right\}.
$$

一方、$\max_{x \in S} g(x)$ が存在するときは凸計画問題 (Q_{t_0}) の最適値を求めなければならない。しかし、(Q_{t_0}) の制約不等式 $\{t_0 - g(x) \leq 0,\ h_i(x) \leq 0\,(i = 1,\ \ldots,\ m) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ が Slater 制約想定を満たすことはないので、(Q_{t_0}) については上記のような双対性は一般には成り立たない。この問題を解消するために、[11] では [9] のアイディアを使って次の定理を導いた。

定理 4.2. ([11]) $\{h_i(x) \leq 0\,(i = 1,\ \ldots,\ m) \mid x \in C\}$ が Slater 制約想定を満たすとき、次の等式が成り立つ:

$$\inf_{x \in S_{t_0}} \frac{f(x)}{t_0} = \max_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0} \max_{\nu \in \mathbb{R}_+^{(\mathrm{dom}\delta_C^*)}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{f(x)}{t_0} + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{v \in \mathrm{dom}\delta_C^*} \nu_v(\langle v, x\rangle - \delta_C^*(v)) \right\}$$

ただし、$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid t_0 - g(x) \leq 0\}$、$\mathbb{R}_+^{(\mathrm{dom}\delta_C^*)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{\mathrm{dom}\delta_C^*} \mid \lambda_v \geq 0\ (v \in \mathrm{dom}\delta_C^*),\ \{v \in \mathrm{dom}\delta_C^* \mid \lambda_v \neq 0\}$: 有限集合 $\}$ である。

したがって、定理 4.2 の仮定の下では、(Q) の最適値は次の式で与えられる:

$$\min \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle \inf_{0<t<t_0} \max_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0 \\ \mu \geq 0}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{f(x)}{t} + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \mu(t - g(x)) \right\}, \\ \displaystyle \max_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0} \max_{\nu \in \mathbb{R}_+^{(\mathrm{dom}\delta_C^*)}} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{f(x)}{t_0} + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{v \in \mathrm{dom}\delta_C^*} \nu_v(\langle v, x\rangle - \delta_C^*(v)) \right\} \end{array} \right\}.$$

いずれの場合にせよ、分数計画問題 (Q) は非凸計画問題であるものの、Slater 制約想定の下では (Q) の最適値は比較的容易に求められることが分かった。

参考文献

[1] W. Dinkelbach, On Nonlinear Fractional Programming, *Management Sci.*, **13** (1967), 492–498.

[2] B. Lemaire, Duality in reverse convex optimization, *SIAM J. Optim.*, **8** (1998), 1029–1037.

[3] R. Horst, N. V. Thoai, DC Programming : Overview, *J. Optim. Theory Appl.*, **103** (1999),1–43.

[4] J. -E. Martinez-Legaz, M. Volle, Duality in D.C.Programming: The Case of Several D.C.Consrtaints, *J. Math. Anal. Appl.*, **237** (1999), 657–671.

[5] V. Jeyakumar, Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-convex, *SIAM J. Optim.*, **13** (2003), 947–959.

[6] V. Jeyakumar, N. Dinh, G.M. Lee, A new closed cone constraint qualification for convex optimization, Applied Mathematical Report AMR 04/8, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2004.

[7] M. A. Goberna, V. Jeyakumar, M. A. Lopez, Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities, *Nonlinear Anal.*, **68** (2008), 1184–1194.

[8] S. -C. Fang, D. Y. Gao, R. -L. Sheu, W. Xing, Global optimization for a class of fractional programming problems, *J. Global Optim.*, **45** (2009), 337–353.

[9] S. Suzuki, D. Kuroiwa, Necessary and sufficient conditions for some constraint qualifications in quasiconvex programming, *Nonlinear Anal.*, **75** (2012), 2851–2858.

[10] Y. Fujiwara, D. Kuroiwa, Lagrange duality theorems in canonical DC programming, preprint.

[11] M. Hidaka, D. Kuroiwa, A direct calculation method of the optimal value of fractional programming, preprint.