数理解析研究所講究録
第 1841 巻 2013 年 77-85

ハイブリッド写像の不動点について
(On fixed points of hybrid mappings)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

ヒルベルト空間における λ-hybrid 写像に対する不動点定理と不動点への収束定理を紹介する. λ-hybrid 写像の概念は, nonexpansive 写像, nonspreading 写像, hybrid 写像を統一的に取り扱うために導入されたものである.

1 はじめに

本稿では, ヒルベルト空間における λ-hybrid 写像について, その基本的な性質を述べるとともに, 不動点の存在定理と不動点への平均収束定理を紹介する. 最後に, 不動点の存在性と写像の定義域の有界性の同値性に関して得られた結果を紹介する.

文献 [1] で導入された λ-hybrid 写像の概念は, 実数 λ に付随して定義されるものである (*cf.* 定義 2.1). 次の基本的な関係がある.

- 1-hybrid であることと nonexpansive であることは同値である.
- 0-hybrid であることと nonspreading [13] であることは同値である.
- 1/2-hybrid であることと hybrid [23] であることは同値である.
- Firmly nonexpansive 写像は, 任意の $\lambda \in [0,1]$ について, λ-hybrid である.

文献 [13] において導入された nonspreading 写像の概念は, バナッハ空間における単調作用素のリゾルベントが持つ性質を抽象化したものであった.

バナッハ空間における nonexpansive 写像と nonspreading 写像の関係はよく分かって

* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

いないが, ヒルベルト空間の場合は状況が異なる. 後者の場合, firmly nonexpansive 写像は nonexpansive かつ nonspreading となる.

文献 [10] では, ヒルベルト空間における nonspreading 写像が研究され, 文献 [23] では, ヒルベルト空間における hybrid 写像の概念が導入された. Hybrid 性は, ヒルベルト空間における nonexpansive かつ nonspreading な写像が持つ性質の一つである.

文献 [1] では, ヒルベルト空間における nonexpansive 写像, nonspreading 写像, hybrid 写像を統一的に取り扱うために, λ-hybrid 写像の概念が導入された. この写像を考えることにより, それまでは個別に議論されていた不動点の存在定理や不動点への収束定理を, 一つの枠組みの中でより統一的に議論できるようになった.

本稿の構成は以下の通りである. まず, §2 において, 本稿を通して必要となる概念や用語について説明する. 次に, §3 において, λ-hybrid 写像に関する基本的な性質を述べる. さらに, §4 において, 本稿の主結果である λ-hybrid 写像に対する不動点定理と不動点への平均収束定理の紹介が続き, §5 ではそれらの系を述べる. 最後に, §6 において, 不動点の存在性と定義域の有界性の同値性について得られた結果を紹介する.

2 準備

本稿で取り扱うヒルベルト空間は全て実ヒルベルト空間とする. 正の整数全体の集合と実数全体の集合を, それぞれ, $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ で表す. ヒルベルト空間 H の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し, それに付随して定まる H のノルムを $\|\cdot\|$ で表す. H の閉単位球を B_H で表し, 原点を中心とした半径 $\lambda > 0$ の閉球を λB_H で表す. H の点列 $\{x_n\}$ が $x \in H$ に強収束することと弱収束することを, それぞれ, $x_n \to x$ と $x_n \rightharpoonup x$ で表す.

本節を通して, H をヒルベルト空間とし, C を H の空でない部分集合とする. また, $T\colon C \to H$ とする.

C が閉凸集合であるとき, 各 $x \in H$ について

$$\|\hat{x} - x\| \leq \|y - x\| \quad (\forall y \in C) \tag{2.1}$$

を満たす $\hat{x} \in C$ が一意に定まる. $P_C(x) = \hat{x}$ $(\forall x \in H)$ により定まる写像 $P_C\colon H \to C$ を H から C の上への距離射影と言う. これは, H 上の firmly nonexpansive 写像の例である. 特に, C が H の閉部分空間であれば, P_C は H から C の上への直交射影と一致する.

写像 T の不動点全体の集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す. つまり, $\mathrm{F}(T) = \{u \in C : Tu = u\}$ である. また, $p \in C$ が T の漸近的不動点であるとは, C の点列 $\{z_n\}$ で $z_n \rightharpoonup p$ と $z_n - Tz_n \to 0$

を満たすものが存在することを言う. T の漸近的不動点全体の集合を $\widehat{\mathrm{F}}(T)$ で表す. 明らかに, $\mathrm{F}(T) \subset \widehat{\mathrm{F}}(T)$ が成り立つ. 不動点への収束定理を議論する際, その逆の包含関係 $\mathrm{F}(T) \supset \widehat{\mathrm{F}}(T)$ が成り立つかどうかが問題となる.

写像 T に関する幾つかの概念を復習する.

- T が quasi-nonexpansive であるとは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ と $\|u - Tx\| \leq \|u - x\|$ ($\forall u \in \mathrm{F}(T)$, $x \in C$) が成り立つことを言う.
- T が relatively nonexpansive [15, 16] であるとは, T が $\widehat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$ を満たす quasi-nonexpansive 写像であることを言う.
- T が firmly nonexpansive [5, 6] であるとは, $\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle Tx - Ty, x - y \rangle$ ($\forall x, y \in C$) が成り立つことを言う (*cf.* [7–9]).
- T が nonexpansive であるとは, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ ($\forall x, y \in C$) が成り立つことを言う.
- T が nonspreading [13] であるとは, $2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2$ ($\forall x, y \in C$) が成り立つことを言う.
- T が hybrid [23] であるとは, $3\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2$ ($\forall x, y \in C$) が成り立つことを言う.

これらの概念には, 次の関係がある.

- Firmly nonexpansive 写像は, nonexpansive かつ nonspreading かつ hybrid である.
- T が nonexpansive 又は nonspreading 又は hybrid であって, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ であるならば, T は relatively nonexpansive である.
- Relatively nonexpansive 写像は quasi-nonexpansive である.

また, T が quasi-nonexpansive 写像で C が閉凸集合であるとき, $\mathrm{F}(T)$ も閉凸集合となる (*cf.* [16]). したがって, この場合, H から $\mathrm{F}(T)$ の上への距離射影 $P_{\mathrm{F}(T)}$ が定まる.

文献 [1] では, nonexpansive 写像, nonspreading 写像, hybrid 写像を統一的に取り扱うことを目的として, λ-hybrid 写像の概念が導入された.

定義 2.1 ([1]). $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. T が λ-hybrid であるとは,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + 2(1 - \lambda)\langle x - Tx, y - Ty \rangle \quad (\forall x, y \in C) \tag{2.2}$$

が成り立つことを言う.

$\lambda \in \mathbb{R}$ とするとき, C から H への λ-hybrid 写像全体の集合と C から C への λ-hybrid 写像全体の集合を, それぞれ, $\mathcal{H}_\lambda(C,H)$ と $\mathcal{H}_\lambda(C)$ で表す. また, 集合 $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{H}_\lambda(C,H)$ と $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \mathcal{H}_\lambda(C)$ を, それぞれ, $\mathcal{H}(C,H)$ と $\mathcal{H}(C)$ で表す. 次が成り立つ.

- $\mathcal{H}_1(C,H)$ は C から H への nonexpansive 写像全体の集合と一致する.
- $\mathcal{H}_0(C,H)$ は C から H への nonspreading 写像全体の集合と一致する.
- $\mathcal{H}_{1/2}(C,H)$ は C から H への hybrid 写像全体の集合と一致する.
- $\lambda > 1$ のとき, $\mathcal{H}_\lambda(C,H)$ は C 上の恒等写像 I だけからなる.

3 補題と例

Firmly nonexpansive 写像は, λ-hybrid 写像 ($\lambda \in [0,1]$) の典型例である.

補題 3.1 ([1]). C をヒルベルト空間 H の空でない部分集合とする. このとき, $T\colon C \to H$ が firmly nonexpansive 写像であれば, 任意の $\lambda \in [0,1]$ について, $T \in \mathcal{H}_\lambda(C,H)$ となる.

不動点を持つ λ-hybrid 写像は relatively nonexpansive 写像である.

補題 3.2 ([1]). C をヒルベルト空間 H の空でない部分集合とし, $T \in \mathcal{H}(C,H)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ ならば, T は quasi-nonexpansive である.
(2) $\widehat{\mathrm{F}}(T) = \mathrm{F}(T)$.

特に, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ ならば, T は relatively nonexpansive である.

次の補題は, λ-hybrid 写像であることの同値条件を与える.

補題 3.3 ([1]). $\lambda \in \mathbb{R}$ とし, C をヒルベルト空間 H の空でない部分集合とする. このとき, $T\colon C \to H$ について, 次は同値である.

(1) $T \in \mathcal{H}_\lambda(C,H)$.
(2) 任意の $x, y \in C$ について,

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|Ty - x\|^2 - 2\lambda \langle x - Tx, y - Ty \rangle$$

が成り立つ.

(3) 任意の $x, y \in C$ について,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - Ty\|^2 + \|Ty - y\|^2 + 2\langle \lambda x + (1-\lambda)Tx - Ty, Ty - y\rangle$$

が成り立つ.

次の例により, $\lambda \in [0,1)$ の場合には, 不連続な λ-hybrid 写像が存在することが分かる.

例 3.4 ([1]). $\lambda \in [0,1)$ とし,

$$\alpha = \frac{\lambda(1-\lambda) + \sqrt{2(1-\lambda)}}{1-\lambda^2} \tag{3.1}$$

と置く. また, H をヒルベルト空間とする. このとき,

$$Tx = \begin{cases} 0 & (x \in \alpha B_H), \\ P_{B_H}(x) & (x \in H \setminus \alpha B_H) \end{cases}$$

により定まる写像 T は $\mathcal{H}_\lambda(H)$ に属する.

4 不動点の存在定理と不動点への平均収束定理

この節では, λ-hybrid 写像に対する不動点の存在定理と不動点への平均収束定理を紹介する.

文献 [12,13,20–22] における手法を用いることにより, 次の不動点定理が得られた.

定理 4.1 ([1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $T \in \mathcal{H}(C)$ とする. また, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を

$$z_n = \frac{x + Tx + \cdots + T^{n-1}x}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{4.1}$$

により定める. このとき, $\{T^n x\}$ が有界であれば, $\{z_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限は T の不動点である.

定理 4.1 の直接的な系として次が得られる.

系 4.2 ([1]). $\lambda \in \mathbb{R}$ とし, C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする. このとき, C が有界であれば, 任意の $T \in \mathcal{H}_\lambda(C)$ が不動点を持つ.

次は, quasi-nonexpansive 写像に関する補題である.

補題 4.3 ([1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $T: C \to C$ を quasi-nonexpansive 写像とする. また, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を (4.1) により定める. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\{P_{\mathrm{F}(T)}(T^n x)\}$ は強収束する.
(2) $\{z_n\}$ の任意の弱収束部分列の極限が $\mathrm{F}(T)$ の要素であれば, $\{z_n\}$ は $\{P_{\mathrm{F}(T)}(T^n x)\}$ の強極限に弱収束する.

定理 4.1 と補題 4.3 を用いることにより, 次の平均収束定理を得た.

定理 4.4 ([1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $T \in \mathcal{H}(C)$ を $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を満たす写像とする. また, $x \in C$ とし, 点列 $\{z_n\}$ を (4.1) により定める. このとき, $\{z_n\}$ は $\{P_{\mathrm{F}(T)}(T^n x)\}$ の強極限に弱収束する.

5 系

この節では, 前節で得られた定理 4.1 と定理 4.4 の幾つかの系を紹介する. この節を通して, 次を仮定する.

- C はヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合である.
- $T: C \to C$ である.
- $x \in C$ とし, $\{z_n\}$ を (4.1) により定める.

まず, nonexpansive 写像 (1-hybrid 写像) に対する不動点定理と不動点への平均収束定理を得る.

系 5.1 ([17]). T を nonexpansive 写像とする. このとき, T が不動点を持つことは, $\{T^n y\}$ が有界となるような $y \in C$ が存在することと同値である.

系 5.2 ([3]). T を nonexpansive 写像で $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき, $\{z_n\}$ は $\{P_{\mathrm{F}(T)}(T^n x)\}$ の強極限に弱収束する.

次に, nonspreading 写像 (0-hybrid 写像) に対する不動点定理と不動点への平均収束定理を得る.

系 5.3 ([13]). T を nonspreading 写像とする. このとき, T が不動点を持つことは, $\{T^n y\}$ が有界となるような $y \in C$ が存在することと同値である.

系 5.4 ([14]). T を nonspreading 写像で $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき, $\{z_n\}$ は $\left\{P_{\mathrm{F}(T)}(T^n x)\right\}$ の強極限に弱収束する.

最後に, hybrid 写像 (1/2-hybrid 写像) に対する不動点定理と不動点への平均収束定理を得る.

系 5.5 ([23]). T を hybrid 写像とする. このとき, T が不動点を持つことは, $\{T^n y\}$ が有界となるような $y \in C$ が存在することと同値である.

系 5.6 ([24]). T を hybrid 写像で $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき, $\{z_n\}$ は $\left\{P_{\mathrm{F}(T)}(T^n x)\right\}$ の強極限に弱収束する.

6 不動点の存在性と有界集合

最後の節では, 不動点の存在性と写像の定義域の有界性の関係について得られた結果を紹介する.

1965 年, Browder [4] は次の不動点定理を証明した.

定理 6.1 ([4]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする. このとき, C が有界であれば, 任意の nonexpansive 写像 $T\colon C \to C$ が不動点を持つ.

1980 年, Ray [18] は定理 6.1 の逆が成り立つことを証明した.

定理 6.2 ([18]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする. このとき, 任意の nonexpansive 写像 $T\colon C \to C$ が不動点を持つならば, C は有界である.

Ray [18] はヒルベルト空間の正規直交系に関する命題を示し, それを用いて定理 6.2 を証明した. その後, Sine [19] は一様有界性定理と距離射影列の平均を用いることにより, 定理 6.2 の簡潔な別証明を与えた.

ここで, Ray の定理に関連する次の問題を考える.

問題 6.3. 定理 6.2 と同様の命題が λ-hybrid 写像についても成り立つか. つまり, 系 4.2 の逆が成り立つか.

ただし, $\lambda > 1$ のときには, $\mathcal{H}_\lambda(C)$ は C 上の恒等写像のみからなるので, 系 4.2 の逆は成り立たない. したがって, $\lambda \leq 1$ の場合を考えれば良い.

この問題を解くために, 定理 6.2 を用いて次を示した.

定理 6.4 ([1]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする．このとき，任意の firmly nonexpansive 写像 $T\colon C \to C$ が不動点を持つならば，C は有界である．

補題 3.1 と定理 6.4 を用いると，$\lambda \in [0,1]$ の場合について，問題 6.3 に対する肯定的な解答が得られる．

定理 6.5 ([1]). $\lambda \in [0,1]$ とし，C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $T \in \mathcal{H}_\lambda(C)$ が不動点を持つならば，C は有界である．

あとがき

文献 [11] において，(α,β)-generalized hybrid 写像という写像概念が導入され，不動点定理や不動点への収束定理が得られた．この写像のクラスは，λ-hybrid 写像のクラスを含むものである．

また，文献 [2] においては，λ-hybrid 写像と nonspreading 写像の関係が議論されるとともに，本稿で紹介できなかった各点収束写像列に対する平均収束定理が得られた．

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[2] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Fixed point and mean convergence theorems for a family of λ-hybrid mappings*, J. Nonlinear Anal. Optim. **2** (2011), 85–92.

[3] J.-B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), Aii, A1511–A1514.

[4] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1272–1276.

[5] ———, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.

[6] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[7] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[8] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[9] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[10] S. Iemoto and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e2082–e2089.

[11] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008).

[13] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[14] Y. Kurokawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonspreading mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 1562–1568.

[15] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[16] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[17] A. Pazy, *Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space*, Israel J. Math. **9** (1971), 235–240.

[18] W. O. Ray, *The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 531–537.

[19] R. Sine, *On the converse of the nonexpansive map fixed point theorem for Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 489–490.

[20] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[21] ———, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[22] ———, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[23] ———, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.

[24] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 457–472.