

# 距離集合における点の配置問題とグラフ

愛知教育大学 野崎寛

Hiroshi Nozaki

Department of Mathematics,  
Aichi University of Education

鈴鹿工業高等専門学校 篠原雅史\*

Suzuka National College of Technology

## 1 はじめに

本稿では 2 つの観点から, distance set の研究とグラフとの関わりに焦点をあてる. 1 つは “空間における有限点集合の配置と正則性の高いグラフの関係” でありもう 1 つは “道具 (言葉) としてのグラフ” である.

講演では, 前者の動機付けとして正多面体グラフが距離正則グラフになることを確かめた. 距離正則グラフは  $P$ -多項式アソシエーションスキームともよばれ, アソシエーションスキームの研究における中心的なクラスである. 逆にクラス  $k$  のアソシエーションスキームから, 球面上の (高々)  $k$ -distance set が構成される ([1], pp284). 一般に, (様々な定義における) optimal な配置はよい対称性を持っているように, 多くのよい distance set がアソシエーションスキームから構成されていることが確認できる. distance set とアソシエーションスキームの関係性について考えていくことは, distance set の研究における一つの方向性であろう. このことについて, 第 4 節で議論する.

一方で,  $k$ -distance set の配置を自然に完全グラフの  $k$ -辺着色に対応させることができる. これは, 無限に考え得る配置を有限の世界に落とす有効な道具となる. より具体的に, diameter graph や orthogonal graph について, 第 3 節で議論する

## 2 distance set

- $\mathbb{R}^d$ :  $d$  次元ユークリッド空間
- $S^{d-1}$ :  $\mathbb{R}^d$  上の原点中心の単位球
- $X \subset S^{d-1}$  に対し,  $X = -X$  となるとき,  $X$  は antipodal であるという.

---

\*Research supported by JSPS KAKENHI Grant Number 24740076.

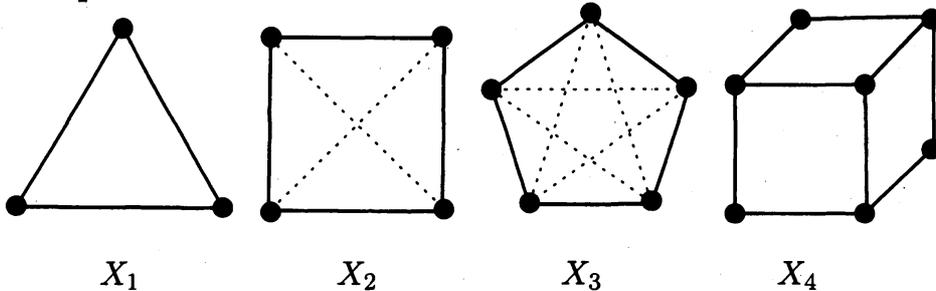
- For  $P = (p_1, p_2, \dots, p_d), Q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$PQ = \sqrt{\sum_{i=1}^d (p_i - q_i)^2}$$

**Definition 2.1.**

- For  $X \subset \mathbb{R}^d$  ( $|X| < \infty$ ),  $A(X) := \{PQ : P, Q \in X, P \neq Q\}$ ,  $a(X) = |A(X)|$ .
- $a(X) = k$  のとき,  $X$  を  $k$ -distance set という.
- 相似変換で写りあう二つの  $k$ -distance set を同型な  $k$ -distance set という (以後同型類について考える).

**Example 2.2.**



$$\begin{array}{cccc}
 X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\
 A(X_1) = \{1\} & A(X_2) = \{1, \sqrt{2}\} & A(X_3) = \{1, \tau\} & A(X_4) = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \\
 \text{1-distance set} & \text{2-distance set} & \text{2-distance set} & \text{3-distance set} \\
 & & (\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}) &
 \end{array}$$

その他, 正  $n$  角形の  $n$  点は  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -distance set, また正二十面体の 12 点, 正十二面体の 20 点はそれぞれ, 3-distance set, 5-distance set になっている.

一般に,  $k$ -distance set  $X \subset \mathbb{R}^d$  に対し, 次元  $d$  に比べて, 距離の種類  $a(X)$  が少ないとき「よい」distance set であるとみなせる.

**Definition 2.3.**

- $DS(d, k) := \max\{|X| : X \text{ is a } k\text{-distance set in } \mathbb{R}^d\}$ .
- $\mathbb{R}^d$  上の  $k$ -distance set  $X$  が  $|X| = DS(d, k)$  を満たすとき optimal という.

**Problem 2.4.** 与えられた  $k, d$  に対し,

- $DS(d, k)$  を決定せよ.
- $\mathbb{R}^d$  上の  $k$ -distance set で  $DS(d, k)$  点, またはそれに近い頂点数を持つものを分類せよ.

## 2.1 Tight two-distance sets

**Theorem 2.5.** 球面  $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  上の (*resp. antipodal*)  $k$ -distance set の頂点数は

$$\binom{d+k-1}{k} + \binom{d+k-2}{k-1} \quad \left( \text{resp. } 2 \binom{d+k-2}{k-1} \right)$$

以下である.

上界を実現するものを tight (antipodal)  $k$ -distance set という. tight  $k$ -distance set はアソシエーションスキームの構造を持つ.

**Problem 2.6.**  $d = 2, 6, 22$  の他に  $S^{d-1}$  上の tight 2-distance set が存在するか.

$d \geq 3$  なら  $d = (2n-1)^2 - 3$  ( $n$ :自然数) の形でなければならないことは分かっている. (Bannai-Damerell [2, ])

**Remark 2.7.** 特に, tight 2-distance set の分類問題は興味深い. それは tight な球デザインの分類問題と関連しても重要なのだが, tight 2-distance set の存在性と一次元上の空間での tight antipodal 3-distance set の存在性が一致していることが知られている. この代表的なペアが正 5 角形と正 20 面体で, tight 2-distance set の分類問題はこのペアの一般化を考えているともみれるだろう.

- $S^{d-1}$  上に tight 2-distance set が存在する  
 $\iff S^d$  上に tight antipodal 3-distance set が存在する
- $S^1$ : tight 2-distance set (正 5 角形)  
 $\iff S^2$ : tight antipodal 3-distance set (正 20 面体)

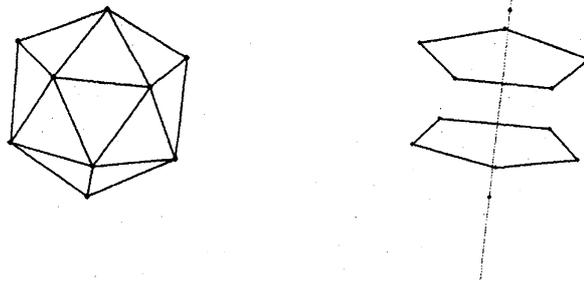


図 1

## 3 グラフと距離集合

### 3.1 直径グラフとその独立数

**Definition 3.1.**  $G = (V(G), E(G))$  を単純グラフとする.

- 頂点集合の部分集合  $Y \subset V(G)$  に対し,  
 $Y$  が  $G$  の独立集合  $\leftrightarrow v \sim w$  for  $\forall v, w \in Y$
- $\alpha(G) := \max\{|Y| : Y \text{ is an ind. set in } G\}$  :  $G$  の独立数

**Definition 3.2.** (Diameter graph の定義)

- $D(X) := \max A(X) : X \subset \mathbb{R}^d$  の diameter
- $G := DG(X) : X$  の diameter graph

$$\begin{cases} V(G) = X, \\ \text{For } P, Q \in X, \quad P \sim Q \text{ if } PQ = D(X). \end{cases}$$

**Example 3.3.**  $P_n$  を位数  $n$  のパス,  $C_n$  を位数  $n$  のサイクルとする. また  $R_n$  を正  $n$  角形の頂点全体の集合とする. このとき,

$$DG(R_{2m+1}) = C_{2m+1}, \quad DG(R_{2m}) = m \cdot P_2.$$

diameter graph の独立集合, 独立数は重要である.  $X$  を  $k$ -distance set とする. このとき,  $X$  は diameter graph  $G = DG(X)$  の頂点集合  $V(G)$  と対応付けられるが,  $G$  の独立集合  $H$  に対応する  $Y \subset X$  は,  $X$  の一つの距離  $D(X)$  を含んでいない. つまり, 高々  $(k-1)$ -distance set になる.

$$\begin{array}{ccc} X & \supset & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ V(DG(X)) & \supset & H : \text{an independent set} \end{array}$$

このとき  $Y$  は高々  $(k-1)$ -distance set.

**Lemma 3.4.**  $\{A, B, P, Q\} \in X \subset \mathbb{R}^2$  に対し,  $AB = PQ = D(X)$  とするとき, 2 線分  $AB, PQ$  は交わる.

平面上の diameter graph について次が成り立つ.

**Proposition 3.5.**  $X \subset \mathbb{R}^2$  に対し,  $G = DG(X)$  とする. そのとき

- (i)  $G$  は任意の偶サイクル  $C_{2m}$  ( $m \geq 2$ ) を含まない;
  - (ii) もし  $G$  が奇サイクル  $C_{2m+1}$  を含めば,  $V(G) \setminus V(C_{2m+1})$  の任意の二点は隣接しない.
- とくに,  $G$  は高々一つのサイクルを含む.

**Proposition 3.6.**  $X \subset \mathbb{R}^2$  ( $|X| = n$ ) に対し,  $G = DG(X)$  をその diameter graph とする. もし  $G \neq C_n$  なら,  $\alpha(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  となる.

**Example 3.7.**  $X$  を平面上の 9-point 4-distance set としその diameter graph を  $G = DG(X)$  とする. このとき,

- もし  $G = C_9$  なら  $X = R_9$  ( $\because X$  は 4-distance set)
- もし  $G \neq C_9$  なら  $\alpha(G) \geq \lceil \frac{9}{2} \rceil = 5$ . つまり,  $X$  は 5-point (at most) 3-distance set を含む.

## 3.2 4点 2-distance set の変形とグラフ

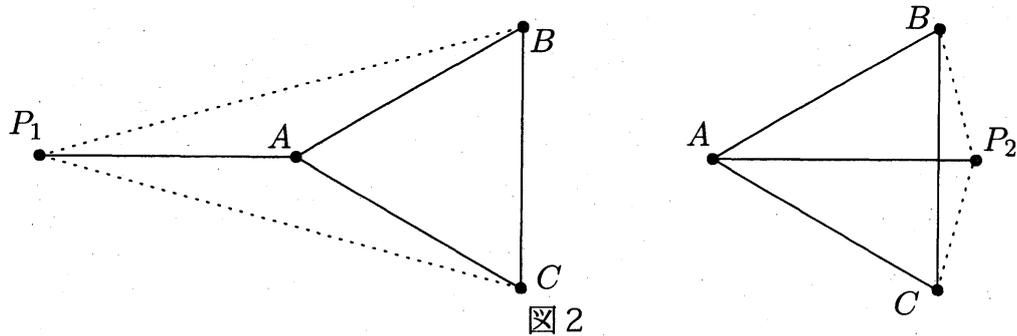


図 2

この2つの 2-distance set にはどのような関係があるだろうか？ $\mathbb{R}^2$  上で見ていると分かりにくいですが、 $\mathbb{R}^3$  上で見るとよく分かる。下図のように点  $P$  を 2-distance set であるように連続的に変形することができるが、その端点として  $P_1, P_2$  がある。この2つで次元が極小になっていることに注意されたい。

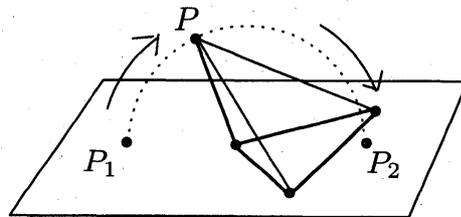
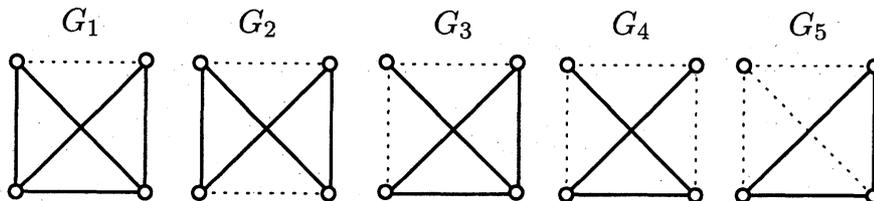


図 3

$K_4$  の 2 色辺着色で非同型なものは次の 5 通りある。



(印刷の関係で 2 つの色を実線と点線で区別した。)

- それぞれのパターンに対応する 2-distance set の配置が存在する。
- これらの 2 色辺着色は、単純グラフ  $G$  とその補グラフ  $\bar{G}$  を同一視したもの。
- 次節では、二点が  $X$  の短い距離に対応したグラフを考える。またこのとき、下表のパラメータの範囲における境界が重要になってくる。

講演において、すべての対応をお見せすることができなかった。他も見てみたいという有難い声を頂いたので、ここでは全てのタイプに対する座標を最後に付けておく。

### 3.3 グラフと直交性

**Definition 3.8.** 単純グラフ  $G$  が orthogonal graph であるとは、次の性質を満たす  $H \subset V(G)$  ( $2 \leq |H| \leq |V(G)| - 2$ ) を持つときをいう。

$$N(w_1) \setminus H = N(w_2) \setminus H \quad (\forall w_1, w_2 \in H)$$

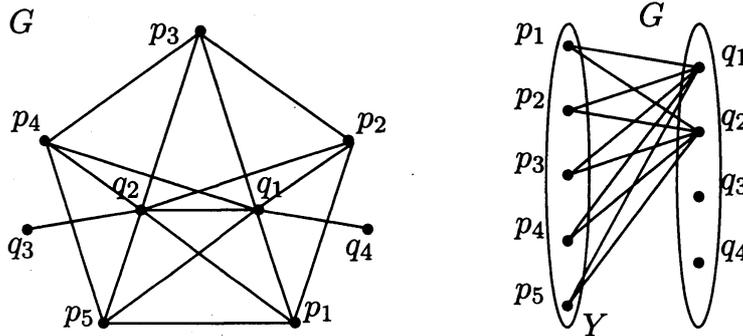
ここで  $N(w) = \{v \in V(G) | vw \in E(G)\}$ .

**Definition 3.9.**  $A(X) = \{a, b\} (a < b)$  となる 2-distance set  $X$  に対して、(単純無向) グラフ  $G$  を次のように定義する。

$$\begin{cases} V(G) = X, \\ (p, q) \in E \iff d(p, q) = a. \end{cases}$$

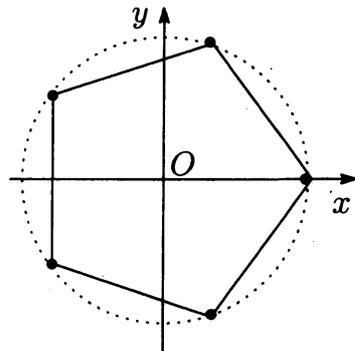
直交グラフに対応する 2-distance set は 2 つの直交する部分集合に分割できることが分かる。このことを用いて、グラフから 2-distance set の構造を簡単に確認することができることがある。

**Example 3.10.** 次のグラフ  $G$  は orthogonal graph である、右のように表すと分かりやすい。対応する 2-distance set  $X$  の構造をみてみよう。

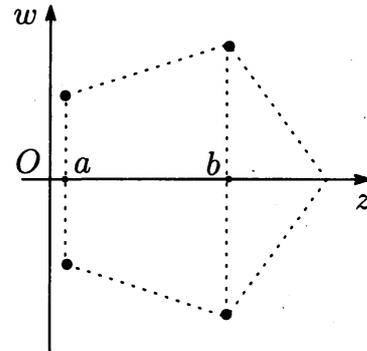


$$G \iff X \subset \mathbb{R}^4$$

- $Y$  は spherical になる。その中心を原点にとると  $Y \perp X \setminus Y$
- $\dim(Y) + \dim(X \setminus Y) = 4$  より、 $Y \subset \mathbb{R}^2, X \setminus Y \subset \mathbb{R}^2$
- $Y \subset \mathbb{R}^2$  は正五角形になる。
- $X \setminus Y$  は正五角形の 4 点部分集合になる。



xy-plane



zw-plane

ここで,  $a = \sqrt{\frac{7-4\tau}{20}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{11\tau+7}{20}}$  ( $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ).

## 4 2-distance set の極小埋め込み

### 4.1 グラフと 2-distance set

**Theorem 4.1** (Einhorn-Schoenberg [4]).  $n$  点単純グラフに対応する,  $n-1$  次元の 2-distance set は無限に存在する. また  $n-2$  次元以下に埋め込まれる配置がただ 1 つ存在する.

この 2-distance set を, 極小 2-distance set とよび  $M(G)$  で表す. また, その次元を  $d(G)$  で表す.

**Example 4.2.** 先ほどの 4 点の 2 色着色グラフに対して, 実線部分に対応するグラフを考えると, 点線部分はその補グラフになる. 変形の境界を考えることで, つぎの表が得られる. 次に極小次元の和について考えて行く.

$G$	$d(G)$	$d(\bar{G})$	$d(G) + d(\bar{G})$
$G_1$	2	2	4
$G_2$	1	2	3
$G_3$	2	2	4
$G_4$	2	2	4
$G_5$	2	1	3

### 4.2 Tight graph

**Theorem 4.3.**  $G$  を位数  $n$  の単純グラフとする. このとき次の不等式が成り立つ.

$$d(G) + d(\bar{G}) \geq n - 1.$$

**Definition 4.4.** 上の不等式で等号を満たすグラフを tight graph と呼ぶ.

**Problem 4.5.** Tight graph を特徴づけよ.

**Example 4.6.** 次のグラフは tight graph になる.

1. 強正則グラフ (注: 完全  $r$  部グラフ  $K_{i,i,\dots,i}$  も強正則グラフ).
2. 完全二部グラフ  $K_{i,j}$  ( $i = j$  のときは強正則グラフ).
3. ある位数 9 のグラフ  $G_1, G_2, G_3$ .  
( $d(G_i) = 4, G_1 = \bar{G}_1, G_2 = \bar{G}_3$ )
4. ある位数 45 のグラフ  $G$ . (Lisoněk [5])

**Remark 4.7.** 3 のグラフに対応する極小 2-distance set はすべて non-spherical である. non-spherical な 2-distance set については, 最後に触れる. また  $G_1$  は Example 3.10 で出てきたグラフである.

上の 1 に関連して, 完全多部グラフに対する極小 2-distance set は次のようになる.

**Example 4.8.**  $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$  ( $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ ) に対し,  $X = M(G)$  とする.

(i)  $n_1 = n_2 = \dots = n_t > n_{t+1}$  のとき,  $X$  は spherical で,

$$d(G) = n - t, \quad X \subset M(G').$$

ここで,  $G' = K_{n_1, n_1, \dots, n_1}$  (完全  $r$  部グラフ).

(ii)  $n_1 \neq n_2$  のとき,  $X$  は non-spherical で  $d(G) = n - 2$  となる.

### 4.3 Design and distance set

**Theorem 4.9** (Nozaki-S. [9]).  $d(G) + d(\overline{G}) = n - 1 \iff X = M(G)$  は constant weight の Euclidean 2-design かつ 2-distance set

$$\begin{array}{ccc}
 \text{strongly regular graph} & \implies & ??? \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \text{spherical 2-design} & \implies & \text{constant weight Euclidean 2-design} \\
 \text{and 2-distance set} & & \text{and 2-distance sets} \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 d(G) + d(\overline{G}) = n - 1 & & d(G) + d(\overline{G}) = n - 1 \\
 \text{and spherical} & & 
 \end{array}$$

**Conjecture 4.10.**  $\mathbb{R}^3$  上の 5-distance set で 20 点以上のものは, 正十二面体の頂点集合に限られる. 特に  $DS(3, 5) = 20$ .

この予想について, spherical design に関する強い条件の下で, 最大値は決定できる.

**Theorem 4.11** (Nozaki-Suda [10]).  $X$  が antipodal 5-distance set かつ maximum strength 5 (spherical 5-design であり, かつ 6-design でない) のとき,

$$|X| \leq 20.$$

### 4.4 球面, 非球面上の 2-distance set

最後に, 球面非球面に分けた 2-distance set の分類問題に関する結果を挙げる. Roy ([11]) はグラフを 5 つのクラスに類別し, 対応する 2-distance set の極小埋め込みの次元を求めた.

**Theorem 4.12.** グラフ  $G$  ( $|V(G)| = n$ ) の極小 2-distance set  $X = M(G)$ ,  $A(X) = \{c, 1\}$  ( $c < 1$ ) について次のいずれかが成り立つ.

1.  $c = (\tau_1 + 1)/\tau_1$  かつ  $d = n - m_1 - 1$ .

2.  $c = (\tau_1 + 1)/\tau_1$  かつ  $d = n - m_1$ .
3.  $c = (\tau_2 + 1)/\tau_2$  かつ  $d = n - m_2 - 2$ .
4.  $c = (\tau_2 + 1)/\tau_2$  かつ  $d = n - m_2 - 1$ .
5.  $c < (\tau_1 + 1)/\tau_1$ ,  $c \neq (\tau_2 + 1)/\tau_2$  かつ  $d = n - 2$ .

ここで,  $A(X) = \{c, 1\}$ ,  $\tau_i$  は  $G$  の隣接行列の  $i$  番目に小さい固有値,  $m_i$  はその重複度である.

我々は [9] において, 5 つのタイプのうち, Type 1,2,5 の極小 2-distance set のみが spherical であることを示した. つまり, Type 3 のグラフ  $G$  のみが non-spherical で  $d(G) < n - 2$  を満たす.

これまでは, Table A の形で最大値が知られていたが, この表から非球面版の最大値について  $d = 4, 5, 6$  以外はただちに決定される.

Maximum cardinalities of two-distance sets for  $d \leq 8$

$d$	1	2	3	4	5	6	7	8
spherical	2	5	6	10	16	27	28	36
general	3	5	6	10	16	27	29	45

Table A

Type 3 のグラフの極小次元を考えることで,  $d = 4, 5, 6$  について次の結果が得られた.

**Proposition 4.13.**

- $d = 4$ : 9 点の non-spherical 2-distance set は同型を除き丁度 3 個存在する.
- $d = 5$ : 10 点の non-spherical 2-distance set は同型を除き一意に定まる.
- $d = 6$ : 17 点の non-spherical 2-distance set は同型を除き一意に定まる.

この結果により, 次のように表が埋まる.

$d$	1	2	3	4	5	6	7	8
spherical	2	5	6	10	16	27	28	36
non-spherical	3	4	5	9	10	17	29	45

Table B

**Problem 4.14.** Type 3 のグラフはどの程度あるのだろうか.

## 5 Appendix

$G$	座標	範囲
$G_1$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right),$ $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)$	$0 \leq \theta \leq \pi$
$G_2$	$\left(\sin \theta, 0, \frac{1}{2} \cos \theta\right), \left(-\sin \theta, 0, \frac{1}{2} \cos \theta\right)$ $\left(0, \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta\right), \left(0, -\sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta\right)$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$G_3$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, 0\right),$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sin \theta\right)$	$0 \leq \theta \leq \pi$
$G_4$	$\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),$ $(x_0, y_0, z_0), (-x_0, y_0, -z_0)$	$a \leq t \leq b$
$G_5$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}, 0\right),$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), (0, 0, t)$	$0 \leq t \leq \infty$

ここで  $G_4$  について,  $x_0 = 2t - \frac{1}{2}, y_0 = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}, z_0 = \sqrt{-4t^2 + 3t - \frac{1}{4}}$   
 $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} (= \sin^2 \frac{\pi}{10}), b = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} (= \sin^2 \frac{3}{10} \pi)$  となっている.

## References

- [1] Ei. Bannai and Et. Bannai, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.
- [2] Ei. Bannai, R. M. Damerell, Tight spherical designs. II. *J. London Math. Soc.* (2) 21 (1980), no. 1, 13-30.
- [3] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geom. Dedicata* 6 (1977), no. 3, 363-388.
- [4] S.J. Einhorn and I.J. Schoenberg, On euclidean sets having only two distances between points. I. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 69=*Indag. Math.* 28 (1966), 479-488, 489-504.
- [5] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* 77 (1997), 318-338.

- [6] O.R. Musin, Spherical two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* 116 (2009), 988–995.
- [7] A. Neumaier, Distance matrices, dimension, and conference graphs, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 43 (1981), 385–391.
- [8] H. Nozaki and M. Shinohara, On a generalization of distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A* 117 (2010), 810–826.
- [9] H. Nozaki and M. Shinohara, A geometrical characterization of strongly regular graphs, *Linear Algebra and its Applications* 437 (2012) 2587–2600.
- [10] H. Nozaki and S. Suda, Bounds on s-distance sets with strength  $t$ . *SIAM J. Discrete Math.* 25 (2011), no. 4, 1699–1713.
- [11] A. Roy, Minimal Euclidean representation of graphs, *Discrete math.* 310 (2010), 727–733.