動的グラフ上のランダムウォークの到達時間と全訪問時間 (理論計算機科学の新展開)

木場, 孝輔; 山内, 由紀子; 来嶋, 秀治; 山下, 雅史

数理解析研究所講究録
第1849巻 2013年 100-104

動的グラフ上のランダムウォークの到達時間と全訪問時間
Hitting time and cover time on dynamic graphs

木場 孝輔 Kosuke Koba　山内 由紀子 Yukiko Yamauchi　来嶋 秀治 Shuji Kijima　山下 雅史 Masafumi Yamashita

九州大学
Kyushu University

1 はじめに

グラフ上のランダムウォークとは，トークンがグラフの頂点をランダムに遷移していく確率モデルである．グラフ上のランダムウォークは，インターネットクローラーやネットワークの探索などに応用されている．静的なネットワーク上でのランダムウォークに関しては，多くの従来研究が存在する．しかし，インターネットなどの現実のネットワークは時不変ではなく，故障やエラーなどによって時間と共に変化する動的なネットワークであることが多い．そこで，本発表ではこのような動的ネットワークを対象とする．

動的グラフ上でのランダムウォークについての先行研究としては，辺集合のみが変化するグラフ [1, 2, 3] や，頂点が追加されていくグラフを扱ったもの [2] がある．

本発表ではまず，辺集合が変化するグラフとして，各時刻においてグラフの各辺が独立に確率 q で消えるとしたモデルを考える．このモデルに対し，定常分布を任意に設定できるという特徴を持つメトロポリスウォーク [4] を元に，動的グラフ上でのランダムウォークの戦略を提案する．そして，その到達時間と全訪問時間，定常分布を解析する．さらに，ベルヌーイグラフ上で，定常分布を任意に設定できるランダムウォークの戦略を提案，解析する．

次に，より一般的なグラフモデルとして，グラフの各辺が Markov 連鎖として変化するモデルも扱う．そのグラフ上の単純ランダムウォークについて，グラフをパスに限定した場合の到達時間の上界を求める．

2 準備

2.1 ランダムウォーク

グラフ $G=(V,E)$ について，ある頂点 $u \in V$ に隣接する頂点の集合を $N(u)$ で表し，u の次数を $\deg(u)$ と書く．グラフ G 上のランダムウォークとは，グラフ上の頂点をトークンが遷移確率行列 $P=(P(u,v))(u,v \in V)$ に従って確率的に遷移していくモデルである．

すべての隣接頂点に対して等確率で遷移するランダムウォークを**単純ランダムウォーク**という．

任意の正のベクトル $\mu=(\mu_u)(u \in V, \mu_u>0)$ が与えられたとき，**メトロポリスウォーク**は以下の遷移確率行列 R_μ によって定義される．

$$R_\mu(u,v)=\begin{cases} \frac{1}{\deg(u)}\min\left\{1,\frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} & v \in N(u),\\ 1-\sum_{w\in N(u)} R_\mu(u,w) & v=u,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

2.2 定常分布

$\forall u \in V, \pi(u)=\sum_{v\in V}\pi(v)P(v,u)$ を満たす確率分布 $\pi=(\pi(u))(u \in V)$ を定常分布と呼ぶ．メトロ

ポリスウォークの定常分布は $\pi \propto \mu$ である [4].

2.3 到達時間と全訪問時間

グラフ $G=(V,E)$ 上の遷移確率行列 P に従うランダムウォークがあるとする．このとき頂点 $u \in V$ にあるトークンが，頂点 $v \in V$ に到達するまでの遷移数の期待値を，u から v への**到達時間 (Hitting time)** と定義し $H^P_{u,v}$ で記述する．その最大値を $H^P := \max_{u,v} H^P_{u,v}$ と定義する．

また，頂点 $u \in V$ にあるトークンが，グラフ上のすべての頂点を訪れるまでの遷移数の期待値を，u からの**全訪問時間 (Cover time)** と定義し C^P_u で記述する．その最大値を $C^P := \max_u C^P_u$ と定義する．

3 ベルヌーイグラフ上のランダムウォーク

3.1 ベルヌーイグラフ

辺集合が変化するグラフとして，以下のモデルを扱う．

モデル 3.1 与えられるグラフ $G=(V,E)$ は単純無向連結とする．時刻 $t \in \mathbb{N}$ におけるグラフ $G_t = (V_t, E_t)$ は，$V_t = V$，E_t は E の各辺を独立に確率 $1-q$ で選んでできる辺の集合とし，以下を満たす．

$$\forall t \in \mathbb{N}, e \in E \qquad \Pr(E_t \ni e) = 1-q.$$

このモデルは，各時刻において，元となるグラフ G の各辺が独立に確率 q で消え，確率 $1-q$ で残っているというものである．

以下で用いる記号を定義する．$n=|V|$，$m=|E|$ とする．元となるグラフ G における u の隣接頂点の集合を $N(u)$ で表し，u に接続する辺の数を $\deg(u)$ とする．時刻 t のグラフ G_t における u の隣接頂点の集合を $N_t(u)$ とし，u に接続する辺の数を $\deg_t(u)$ とする．明らかに，$N_t(u) \subseteq N(u)$ が成り立つ．グラフ G の最小次数を δ，最大次数を Δ とする．

3.2 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォーク

任意の正のベクトル $\mu = (\mu_u)(u \in V, \mu_u > 0)$ が与えられているとする．各時刻 t において，トークンが頂点 $u \in V$ にいるとき，以下のように動く．

1. もし，G_t 上で隣接頂点が 1 つも無いならば現在の頂点にとどまる．
2. そうでなければ，G_t での隣接頂点 $N_t(u)$ から，等確率に 1 つ選び v とする．
3. 確率 $\min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\}$ で v へ移動する．

命題 3.2 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの遷移確率行列 P_μ は，変化のないグラフ G 上で μ を与えたときのメトロポリスウォークの遷移確率行列 R_μ を用いて，以下のように表せる．

$$P_\mu(u,v) = \begin{cases} \left(1-q^{\deg(u)}\right) R_\mu(u,v) & v \in N(u), \\ q^{\deg(u)} + (1-q^{\deg(u)}) R_\mu(u,u) & u = v, \\ 0 & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

3.3 到達時間と全訪問時間の解析

本節では，ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間について，静的なグラフ上のランダムウォークの到達時間，全訪問時間との比較を行う．

定理 3.3 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間 $H^{P_\mu}_{u,v}$ と全訪問時間 $C^{P_\mu}_u$ は以下を満たす．

$$\frac{H^{R_\mu}_{u,v}}{1-q^\Delta} \le H^{P_\mu}_{u,v} \le \frac{H^{R_\mu}_{u,v}}{1-q^\delta}, \frac{C^{R_\mu}_u}{1-q^\Delta} \le C^{P_\mu}_u \le \frac{C^{R_\mu}_u}{1-q^\delta}.$$

ここで $H^{R_\mu}_{u,v}$ と $C^{R_\mu}_u$ は，変化のないグラフ G 上で μ を与えたときのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間である．

グラフ G の次数が大きくなるほど，ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間，全訪問時間は，変化のないグラフ G 上でのメトロポリスウォークの到達時間，全訪問時間に近づく．

補題 3.4 ある遷移確率行列 $P=(P(u,v))(u,v\in V)$ が与えられるとする．このとき，グラフ上の各頂点 u に対し，$0\le q_u<1$ である，任意の q_u が与えられ，遷移確率行列 P' が以下のように書けるとする．

$$P'(u,v)=\begin{cases}(1-q_u)P(u,v) & v\in N(u), u\neq v,\\ q_u+(1-q_u)P(u,u) & u=v,\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

このとき，到達時間と全訪問時間は

$$H^{P'}_{u,v} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{w\in W^{P}_{u,v},|w|=t+1}\left\{\left(\prod_{i=1}^{t}P(w_i,w_{i+1})\right)\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{1-q_{w_j}}\right\},$$

$$C^{P'}_{u} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{w\in W^{P}_{u},|w|=t+1}\left\{\left(\prod_{i=1}^{t}P(w_i,w_{i+1})\right)\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{1-q_{w_j}}\right\},$$

となる．ただし $W^P_{u,v}$ は，G 上で P に従うランダムウォークを行ったときにとりうる u から v への道全体の集合であり，W^P_u は，u から全訪問するのにとりうる道全体の集合である．

道 $w\in W^P_{u,v}$ に対し，$|w|$ で道の長さを表す．例えば w が，$u\to v_1\to v_2\to v_2\to v$ という道を表すとき，$w=(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)=(u,v_1,v_2,v_2,v)$ であり，$|w|=5$ である．同様に $w'\in W^P_u$ についても $|w'|$ は道の長さを表す．

証明 (定理 3.3) 補題 3.4 より，ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間は

$$H^{P_\mu}_{u,v} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{w\in W^{R_\mu}_{u,v},|w|=t+1}\left\{\left(\prod_{i=1}^{t}R_\mu(w_i,w_{i+1})\right)\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{1-q^{\deg(w_j)}}\right\},$$

$$C^{P_\mu}_{u} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{w\in W^{R_\mu}_{u},|w|=t+1}\left\{\left(\prod_{i=1}^{t}R_\mu(w_i,w_{i+1})\right)\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{1-q^{\deg(w_j)}}\right\}.$$

ここで，グラフ上の頂点の最小次数 δ，最大次数 Δ と，G 上のメトロポリスウォークの到達時間，全訪問時間を用いると，定理 3.3 が得られる． □

3.4 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの定常分布

2.2 節で述べたとおり，静的なグラフ上では，メトロポリスウォークにより所望の定常分布が実現できる．しかし動的なグラフ上では，定常分布が所望の分布に一致しないことを示す．

定理 3.5 ベルヌーイグラフ上のメトロポリスウォークの定常分布 $\pi_\mu=(\pi_\mu(u))\,(u\in V)$ は以下のようになる．

$$\pi_\mu(u)\propto\frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}.$$

証明 $\forall u\in V$, $\pi_\mu(u)=k\cdot\frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}$ とする．k は正規化定数であり，$k=1/\sum_{w\in V}\frac{\mu_w}{1-q^{\deg(w)}}$ である．任意の 2 頂点 $u,v\in V$ に対して，$\deg(u)\mu_v<\deg(v)\mu_u$ のとき，

$$\begin{aligned}&\pi_\mu(u)P_\mu(u,v)\\ &=k\cdot\frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}\cdot\frac{1-q^{\deg(u)}}{\deg(u)}\min\left\{1,\frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\}\\ &=k\cdot\frac{\mu_v}{\deg(v)}\\ &=k\cdot\frac{\mu_v}{1-q^{\deg(v)}}\cdot\frac{1-q^{\deg(v)}}{\deg(v)}\min\left\{1,\frac{\deg(v)\mu_u}{\deg(u)\mu_v}\right\}\\ &=\pi_\mu(v)P_\mu(v,u).\end{aligned}$$

$\deg(u)\mu_v \geq \deg(v)\mu_u$ のときも同様に，$\pi_\mu(u)P(u,v) = \pi_\mu(v)P(v,u)$ となる．よって任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，$\pi_\mu(u)P(u,v) = \pi_\mu(v)P(v,u)$ を満たす．したがって，$\pi_\mu = \left(k \cdot \frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}\right) (u \in V)$ は，ベルヌーイグラフ上でのメトロポリスウォークの定常分布である． □

定理 3.5 より，3.2 節のメトロポリスウォークでは，定常分布が与えた μ に比例しない．次の節では，μ に比例する定常分布を持つランダムウォークを示す．

3.5 ベルヌーイグラフ上で，所望の定常分布を持つメトロポリスウォーク

定理 3.5 より，3.2 節のメトロポリスウォークに $\mu' = \mu_u \left(1 - q^{\deg(u)}\right)$ を与えることで，μ に比例する定常分布を持つランダムウォークを得ることができる．このときの遷移確率行列 $P_{\mu'}$ は，命題 3.2 から得られる．また，このランダムウォークの到達時間 $H^{P_{\mu'}}$，全訪問時間 $C^{P_{\mu'}}$ は，定理 3.3 によって抑えられる．ここで，$H^{R_{\mu'}} = O(f' \cdot n^2)$，$C^{R_{\mu'}} = O(f' \cdot n^2 \log n)$，$f' = \frac{\max_{u \in V} \mu'_u}{\min_{u \in V} \mu'_u}$ である [4]．よって，以下のような上界が得られる．

$$H^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{f'}{1-q^\delta} \cdot n^2\right),$$

$$C^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{f'}{1-q^\delta} \cdot n^2 \log n\right).$$

さらに，μ が一様のときは，以下のようになる．

$$H^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{1-q^\Delta}{(1-q^\delta)^2} \cdot n^2\right),$$

$$C^{P_{\mu'}} = O\left(\frac{1-q^\Delta}{(1-q^\delta)^2} \cdot n^2 \log n\right).$$

4 Edge-Markovian グラフ上のランダムウォーク

4.1 Edge-Markovian グラフ

モデル 3.1 の拡張として，以下のモデルを扱う．

モデル 4.1 与えられるグラフ $G = (V, E)$ は単純無向連結とする．確率 $p, q (0 < p, q < 1)$ が与えられているとする．時刻 t におけるグラフを $G_t = (V_t, E_t)$, $V_t = V$ とする．各時刻 t において，各辺 $e \in E$ が，以下のような遷移確率に従って変化する．

	$e \in E_{t+1}$	$e \notin E_{t+1}$
$e \in E_t$	$1-p$	p
$e \notin E_t$	q	$1-q$

このモデルは $1-p = q$ のとき，モデル 3.1 と等しい．特に，G としてパスグラフが与えられたとき ($V = \{1, 2, \ldots, n\}, E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}\}$)，Markovian パスと呼ぶ．

4.2 Edge-Markovian グラフ上の単純ランダムウォーク

各時刻 t において，トークンが頂点 $u \in V$ にいるとき以下のように動く．

1. もし，G_t 上で隣接頂点が 1 つも無いならば現在の頂点にとどまる．
2. そうでなければ，G_t での隣接頂点 $N_t(u)$ から等確率に 1 つ選び，そこへ移動する．

4.3 Markovian パス上の単純ランダムウォークの到達時間

グラフを Markovian パスに限定したときの，単純ランダムウォークの到達時間の上界を示す．

定理 4.2 $1-p \geq q$ である *Markovian* パス上の，単純ランダムウォークの到達時間 H^P は，以下を満たす．$1-p \geq q$ である *Markovian* パス上の単純ラン

ダムウォークにおいて，端点からもう一方の端点までの到達時間 $H_{1,n}$ は以下を満たす.

$$H_{1,n}^{P} \leq \frac{b(n-1)}{p+q-1} + \frac{\left(a - \frac{b}{p+q-1}\right)\left(1 - \left(\frac{2-p-q}{p+q}\right)^{n-1}\right)}{1 - \left(\frac{2-p-q}{p+q}\right)},$$

$$a = 1 + \frac{\max\left\{1 - \mu_{\{1,2\}}, 1 - q\right\}}{q},$$

$$b = 1 + \frac{p(1-q)}{1-(1-q)^2}.$$

ここで $\mu_{\{1,2\}}$ は，初期グラフ G_1 において辺 $\{1,2\}$ が存在する確率である.

5 おわりに

グラフ G 上の各辺が各ステップ毎に独立に確率 p で消えるモデル上でのメトロポリスウォークについて，その到達時間と全訪問時間，定常分布を解析した．定常分布を任意に設定できるランダムウォークを提案し，その到達時間と全訪問時間の上界を求めた．さらに，グラフ G の各辺が Markov 連鎖として変化するモデル上の単純ランダムウォークについて，グラフをパスに限定した場合の到達時間の上界を求めた．しかし，その上界は頂点数について指数の上界であるため，頂点数の多項式で抑えられないか考える必要がある．また，パス以外のグラフについて解析することも，今後の課題である.

参考文献

[1] C. Avin, M. Koucky, Z. Lotker, How to explore a fast-changing world (Cover time of a simple random walk on evolving graphs), LNCS, 5125 (2008), 121–132.

[2] C. Cooper, Random walks, Interacting particles, dynamic networks: Randomness can be helpful, LNCS, 6796 (2011), 1–14.

[3] K. Koba, S. Kijima, M. Yamashita, Random walks on dynamic graphs, Proc. WAAC 2011, 28–35.

[4] Y. Nonaka, H. Ono, K. Sadakane, M. Yamshita, The hitting and cover times of Metropolis walks, Theoretical Computer Science Volume 411 Issue 16–18, 2010, 1889–1894