数理解析研究所講究録
第1849巻 2013年 45-49

逆遷移関係が不連続な2近傍CAについて

2-Neighborhood Cellular Automata with Discontinuous Inverse Transition Relation

井口修一* 石田俊一† 河原康雄
* 九州大学大学院数理学研究院 † 九州産業大学基礎教育センター
Shuichi Inokuchi* Toshikazu Ishida† Yasuo Kawahara
*Faculty of Mathematics, Kyushu University
†Center for Fundamental Education, Kyushu Sangyo University

1 はじめに

セルオートマトン(CA)とは、群上に配置されたセル内の状態が、単位時間ごとに、セル間の相互作用によって、変化する様な遷移系である。CAの特徴に、局所性と一様性が挙げられる。局所性とは、各セルに対して、セルの次の状態を決定する局所構造、つまり、セル間の相互作用の適用範囲を示す有限グラフとセルの次の状態を決める局所遷移規則の組が存在することであり、一様性とは、各セルに対する局所構造が同型であることである。

CAの逆遷移で定義される遷移系が再びCAになるのか? という問いについての研究がいくつか報告されている。Richardson[6]は、遷移関係が与えられたときに、その関係が局所的な関係から構成されているための条件(定理2)を示している。1近傍CAの逆遷移で定義される遷移系は明らかにCAとなるが、一般の決定性CAの場合、可逆性とその逆遷移が局所的な関係で構成されていることが同値であることが示されおり[6]、可逆なCAの逆CAの近傍サイズに関する研究[2, 5]も報告されている。

CAが与えられたとき、一般にその逆遷移は関係であり関数とはならない。Richardsonの定理は非決定性CAに対してのものであるが、関係理論の言葉を用いて、Richardsonの定理について述べているのがFurusawaら[3]である。Richardsonの定理の条件の1つである関係の連続性に焦点を当て、CAの逆遷移関係の連続性について考察する。局所遷移規則が関数である2近傍CAについては、その逆遷移関係が連続となるとこは示されている[4]。本論文では、局所遷移規則が関数とはならない2近傍CAについて、その逆遷移関係の連続性について考察する。

2 準備

決定性CAの遷移は関数で定義されるが、一般に、その逆の遷移は、関数とはならない。この章では、関数を拡張した関係と、関係を利用して非決定性CAについて定義し、Richardsonの定理について紹介する。

2.1 関係

ここでは、この論文内で使用する関係の用語の定義のみ述べる。関係の性質等については、[3] を参照してほしい。集合 X から集合 Y への関係 α とは、直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $\alpha \subset X \times Y$ であり、$\alpha : X \rightharpoonup Y$ と表す。X から Y への関係の全体集合を $Rel(X,Y)$ で表す。$Rel(X,Y)$ は $X \times Y$ の部分集合族の全体集合 $\mathscr{P}(X \times Y)$ であるので、$Rel(X,Y)$ はブール代数をなす。$Rel(X,Y)$ のブール演算子を $\sqsubseteq$(包含関係)、$\sqcup$(和関係)、$\sqcap$(交関係)、$^-$(補関係) で表す。$0_{XY} : X \rightharpoonup Y$、$\nabla_{XY} : X \rightharpoonup Y$ で、それぞれ零関係 $\emptyset$、全関係 $X \times Y$ を表す。恒等関係 $id_X : X \rightharpoonup X$ を $(x,x') \in id_X \leftrightarrow x = x'$ で、関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$、$\beta : Y \rightharpoonup Z$ の合成関係 $\alpha\beta : X \rightharpoonup Z$ を $(x,z) \in \alpha\beta \leftrightarrow \exists y \in Y[(x,y) \in \alpha \wedge (y,z) \in \beta]$ で定義する。関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ の逆関係 $\alpha^\sharp : Y \rightharpoonup X$ を $(y,x) \in \alpha^\sharp \leftrightarrow (x,y) \in \alpha$ で定義する。関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ が、$\alpha^\sharp\alpha \sqsubseteq id_Y$ を満たすとき 1 価であるといい、$id_X \sqsubseteq \alpha\alpha^\sharp$ を満たすとき全域であるという。1 価全域な関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ を関数といい、$\alpha : X \to Y$ で表す。関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ のドメイン関係 $\lfloor\alpha\rfloor : X \rightharpoonup X$ を $\lfloor\alpha\rfloor = \alpha\alpha^\sharp \sqcap id_X$ で定義する。I は 1 点からなる集合 $I = \{*\}$ とするとき、集合 X の点 x に対して、関係 $\hat{x} : I \rightharpoonup X$ を $\hat{x} = \{(*,x)\} \subseteq I \times X$ と定義する。点 x と関数 $\hat{x} : I \rightharpoonup X$ を同一視し、$\hat{x}$ を x と表記する。

$< X, \mathcal{O}(X) >$、$< Y, \mathcal{O}(Y) >$ を位相空間とする。直積空間 $X \times Y$ の直積位相を、射影関数 $p : X \times Y \to X$、$q : X \times Y \to Y$ が連続となる最弱位相とし、X から Y への開関係の全体集合として $\mathcal{O}(X,Y)$ で表す。$\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(I,X)$ である。

定義 1 関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ が連続であるとは、

$$\forall \rho \in \mathcal{O}(Y) \exists \mu \in \mathcal{O}(X).\ \rho\alpha^\sharp = \mu\lfloor\alpha\rfloor$$

であるときをいう。

関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ が連続であることと同値な条件として、以下が挙げられる。

- $\forall (a,b) \in \alpha \quad \forall V \in \mathcal{O}_b(Y) \quad \exists U \in \mathcal{O}_a(X) \quad \forall x \in X \quad [\exists y' \in Y.\ (x,y') \in \alpha \wedge x \in U] \to [\exists y \in Y.\ (x,y) \in \alpha \wedge y \in V]$

非空集合 Q、X に対して、X から Q への関数 $c : X \to Q$ の全体集合を Q^X で表す。また、X の部分集合 $U \subset X$ に対して、Q^X から Q^U への射影 (制限) を $p_U : Q^X \to Q^U$ で表す。U が 1 点集合 $\{x\}$ の時は、特に、$p_x : Q^X \to Q$ と書く。$a \in Q^X$ に対して、$a|_U$ で $p_U(a)$ を、$a|_x$ で $p_x(a)$ を表すことにする。

G を群とし単位元を e、$x \in G$ の逆元を x^{-1} で表す。任意の元 $x \in G$ に対して、シフト関数 $t_x : Q^G \to Q^G$ を $\forall a \in G.\ t_x p_a = p_{x^{-1}a}$ で定義する。すべてのシフト関数は連続である。

2.2 群上のセルオートマトン

Q をセル状態の有限集合、G を群とし単位元を e とする。有限部分集合 $N \subset G$ を近傍といい、関係 $\lambda : Q^N \rightharpoonup Q$ を局所関係 (局所規則) という。局所関係 λ に対して、遷移関係 $\tau_\lambda : Q^G \rightharpoonup Q^G$ を

$$\tau_\lambda = \sqcap_{x \in G} t_{x^{-1}} p_N \lambda p_x^\sharp \qquad ((c,c') \in \tau_\lambda \leftrightarrow \forall x \in G.\ (c|_{xN}, c'|_x) \in \lambda)$$

で定義する。非決定 CA は、遷移系 (Q^G, τ_λ) である。λ が関数であるとき、τ_λ も関数となる、つまり、CA は決定性となる。この非決定性 CA に関して、CA の必須の性質である局所性、一様性に関する定理が次の定理である。

定理 2 (Richardson(1972), Furusawa et. al.(2012)) 関係 $\delta : Q^G \rightharpoondown Q^G$ が局所関係 $\lambda : Q^N \rightharpoondown Q$ から定義されたものである、つまり、$\delta = \tau_\lambda$ であるとき、δ は以下の条件 *1*〜*4* を満たす。また、関係 $\delta : Q^G \rightharpoondown Q^G$ が条件 *1*〜*4* を満たすならば、$\delta = \lfloor \delta \rfloor \tau_\lambda$ を満たす局所関係 $\lambda : Q^N \rightharpoondown Q$ が存在する。

1. $\forall x \in G. t_x \delta = \delta t_x$

2. $\sqcap_{x \in G} \delta p_x p_x^\sharp = \delta$

3. δ は連続

4. δ は閉関係

3 逆遷移関係が不連続な 2 近傍 CA

1 近傍 CA の逆遷移関係で定義される遷移系は明らかに CA である。以後、2 近傍 CA を対象にする。つまり、状態集合を $Q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(=\{0,1\})$、$G = \mathbb{Z}$、$N = \{0,1\}$ とする。この章では、2 近傍局所関係のうち 1 価性を満たすものについて、その逆遷移関係 $\tau_\lambda^\sharp$ の連続性について議論する。関係の連続性の定義より、$\tau_\lambda^\sharp$ が連続であるための必要十分条件は、

$$\forall (a\tau_\lambda, a) \in \tau_\lambda^\sharp \ \forall V = \{-n, -n+1, \cdots, n\} \ \exists U \subseteq G.\ (b\tau_\lambda|_U = a\tau_\lambda|_U) \to \exists c.(c|_V = a|_V) \wedge (c\tau_\lambda = b\tau_\lambda)$$

である。この連続性に関して、以下の補題を示すことが出来る。

補題 3 *1* 価な局所関数 $\lambda : Q^N \rightharpoondown Q$ に対して $\lambda' : Q^N \rightharpoondown Q$ を $\lambda' = \lfloor \lambda \rfloor \lambda^-$ で定義する。このとき、$\tau_\lambda^\sharp$ が連続であるならば、$\tau_{\lambda'}^\sharp$ も連続である。

証明. 任意の $a, b \in Q^G$ に対して、$a\tau_\lambda = b\tau_\lambda \Rightarrow a\tau_{\lambda'} = b\tau_{\lambda'}$ であることから明らか。 □

この補題に加えて、左右を逆にした CA、0 と 1 を逆にした CA は、元の CA と挙動が同値であると考えることが出来る。ゆえに、本質的に調べる必要があるのは、1 価全域な局所関係である以下の 5 種類とそれらの値の一部を $\perp$ にした関係を調べれば良い。($\perp$ は undefined であることを示す)

Rule	11	10	01	00
λ_0	0	0	0	0
λ_6	0	1	1	0
λ_8	1	0	0	0
λ_{11}	1	0	1	1
λ_{12}	1	1	0	0

局所関係 λ が 1 価全域、つまり関数であるとき、遷移関係 τ_λ の逆遷移関係 $\tau_\lambda^\sharp$ は連続であることが示されている [4]。

補題 4 次の表で定義される局所関係 $\lambda_6^{(-10)} : Q^N \rightharpoondown Q$ から定義される遷移関係の逆遷移関係 $\tau_{\lambda_6^{10}}^\sharp : Q^G \rightharpoondown Q^G$ は不連続である。

	11	*10*	*01*	*00*
$\lambda_6^{(-10)}$	*0*	$\perp$	*1*	*0*

証明. λ_6 は線形な局所関数であり、この遷移関係 $\lambda_6^{(-10)}$ は次の様に表現できる。

$$\lambda_6^{(-10)} = \lambda_6 - \{(10,1)\} = \{(11,0),(01,1),(00,0)\}$$

簡単のため、$\lambda = \lambda_6^{(-10)}$ とおく。

$V = \{0\}$、$U = \{-n, -n+1, \cdots, n\}$ (n は任意の自然数) とする。このとき、$a, b \in Q^G$ を次の様に取る。

$$a = \cdots 111 \cdots,$$
$$b|_i = \begin{cases} 0 & i \leq n+1 \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

明らかに、$a\tau_\lambda|_U = b\tau_\lambda|_U$ である。このとき、$c|_V = a|_V$ かつ $b\tau_\lambda = c\tau_\lambda$ であると仮定すると、$0 = b\tau_\lambda|_0 = c\tau_\lambda|_0 = c|_0 + c|_1 = 1 + c|_1$ より $c|_1 = 1$、$0 = b\tau_\lambda|_1 = c\tau_\lambda|_1 = c|_1 + c|_2 = 1 + c|_2$ より $c|_2 = 1$、同様に繰り返し、$0 = b\tau_\lambda|_n = c\tau_\lambda|_n = c|_n + c|_{n+1} = 1 + c|_{n+1}$ より $c|_{n+1} = 1$ である。$1 = b\tau_\lambda|_{n+1} = c\tau_\lambda|_{n+1} = c|_{n+1} + c|_{n+2} = 1 + c|_{n+1}$ であるが、λ の $11, 10$ の値は 1 ではないので、仮定に矛盾する。故に、c は存在せず、$\tau_\lambda^\sharp$ は連続とはならない。 □

他の 1 価な局所関係に対する連続性については省略するが、同様に示すことができ、まとめると、下の表となる。表中の連続$_c$、連続$_1$ は、定数関係、1 近傍関係であることから、連続性が自明であることを示している。また、$\lambda_8^{(-00)}$、$\lambda_{11}^{(-01)}$ は、反転を考えると、$\lambda_6^{(-00)}$、$\lambda_6^{(-01)}$ の挙動と同値となる。

Rule	-11	-10	-01	-00
λ_0	連続$_c$	連続$_c$	連続$_c$	連続$_c$
λ_6	不連続	不連続	不連続	不連続
λ_8	連続$_c$	連続$_1$	連続$_1$	不連続
λ_{11}	連続$_1$	連続$_c$	不連続	連続$_1$
λ_{12}	連続$_1$	連続$_1$	連続$_1$	連続$_1$

$\lambda_6^{(-11,-10)} = \lambda_6 - \{(11,0),(10,1)\}$ の様に、1 価全域な 2 近傍 CA の局所関係から 2 カ所を undefined にした局所関係は、1 近傍関係、もしくは定数関係となり、その逆遷移関係は連続となる。

4 まとめ

この論文では、2 近傍 CA のうち 1 価な局所関係をもつものに対して、その逆遷移関係の連続性について議論した。1 価全域な局所関係をもつ 2 近傍 CA については、その逆遷移関係は連続となることが示されているが [4]、それらの局所関係から全域性を満たさない様に一部を undefined に変更した局所関係をもつ 2 近傍 CA については、自明なもの以外その逆遷移関係はすべて不連続となり、線形な λ_6 の一部を undefined に変更したもののみが不連続となっている。

今後、近傍を拡張した遷移関係についても、その逆遷移関係の連続について考察し、連続性の本質、線形性との関連などついて研究を続けていきたい。

参考文献

[1] V. Brattka and P. Hertling, Continuity and computability of relations, Informatik Berichte 164, Fern Universitat in Hagen (1994).

[2] E. Czeizler, On the size of the inverse neighborhoods for one-dimensional reversible cellular automata, Theoretical Computer Science 325 (2004), pp.273–284.

[3] H. Furusawa, T. Ishida, and Y. Kawahara, Continuous Relations and Richardson's Theorem, in: W. Kahl and T. G. Griffin (Eds.), Relational and Algebraic Methods in Computer Science, 13th International Conference on Relational and Algebraic Methods in Computer Science, RAMiCS 2012, Cambridge, UK, September 2012, Proceedings, LNCS 7560, pp.310 – 325, Springer (2012).

[4] 井口修一、石田俊一、河原康雄, 2 近傍セルオートマトンの逆遷移関係の連続性について, 応用数学研究集会報告集, 2012, pp.68–73

[5] J. Kari, on the inverse neighborhood of reversible cellular automata, in: G. Rosenberg, A. Salomaa (Eds.), Lindenmayer Systems, Inpact in Theoretical Computer Science, Computer Graphics and Developmental Biology, Springer, Berlin, Heidenberg, 1989, pp. 477–495.

[6] D. Richardson, Tessellations with local transformations, J. Computer and System Sciences 6 (1972), pp. 373–338