数理解析研究所講究録
第 1851 巻 2013 年 25-35

点列の集合への収束と強制拡大

嘉田 勝 / Masaru Kada
大阪府立大学 / Osaka Prefecture University

概要

本稿では，強制拡大による点列の集合への収束の保存，不保存について，岩佐明，加茂静夫との共同研究 [7] で得られた結果を紹介する．

1 はじめに

本稿では，擬順序 $\mathbb{P}$ による強制拡大を考えるとき，基礎モデル $\mathbf{V}$ に存在する位相空間 $\langle X,\tau\rangle$ がもつ性質が強制モデル $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ においても保たれるか，それとも強制拡大によって壊れるか，という問題を扱う．[*1]

ただし，この問題を定式化するには，まず，基礎モデル $\mathbf{V}$ の位相空間 $\langle X,\tau\rangle$ （τ は X 上の開集合系）に対して，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ における対応物は何かを明確にする必要がある．なぜなら，基礎モデルの集合 X,τ をそのまま $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ で考える（すなわち，集合 $\check{X}$ とその部分集合の族 $\check{\tau}$ を考える）と，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ では τ の部分集合が増えている可能性があるために，τ が和集合について閉じるとは限らず，$\check{X}$ 上の位相になっている保証がないからである．そこで，位相は開基によって定まると考え，$\mathbf{V}$ の位相空間 $\langle X,\tau\rangle$ に対して，「$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において $\check{\tau}$ を開基として生成される $\check{X}$ 上の開集合系」を $\tau^{\mathbb{P}}$ で表し，$\langle\check{X},\tau^{\mathbb{P}}\rangle$ を $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ における $\langle X,\tau\rangle$ の対応物と考える．そのうえで，擬順序 $\mathbb{P}$ と位相空間の性質 φ について，

$\mathbf{V}$ で $\langle X,\tau\rangle$ が性質 φ をみたすならば，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ で $\langle\check{X},\tau^{\mathbb{P}}\rangle$ が性質 φ をみたす

という状況を，「擬順序 $\mathbb{P}$ は性質 φ を保存する」と言い表す．

強制拡大によって，位相空間のどのような性質が保存され，どのような性質が壊れるだ

嘉田 勝: email kada@mi.s.osakafu-u.ac.jp

[*1] 本稿ではしばしば，ジェネリック拡大 $\mathbf{V}[G]$ と強制言語での $\mathbb{P}$-名前の空間 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ をいちいち区別せずに同一視する．また，$\mathbf{V}[G]$ に属する集合 x を指し示すために，それを $\mathbb{P}$-名前と同一視して $\dot{x}$, $\check{x}$ などという記号を使うことがある．

ろうか．また，（壊れるかもしれない）ある位相空間の性質について，その性質を保存する擬順序のクラスを決定できるだろうか．たとえば，ハウスドルフ性（T_2 分離公理）は開基だけで決定される性質なので，$\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle$ の定義によって，いかなる強制拡大によっても保存される．[*2] 一方，正規性（normality）は強制拡大で必ずしも保存されない（壊れる例がある）ことが知られている [4]．もっと簡単な例として，実数直線の閉区間 $I = [0,1]$ のコンパクト性や連結性は，新しい実数を付加する強制拡大によってあっさり壊される．[*3]

本稿では，これらの問題のひとつとして，**点列の集合への収束**という概念に着目する．点列の点への収束は開基だけで決定できる性質なので強制拡大で不変だが，点列の集合への収束を次のように定義すると，必ずしも強制拡大で保存されない性質となる．

定義 1.1. 位相空間において，点列 $\{x_n\}_n$ [*4] が集合 A に収束するとは，$A \cap \{x_n\}_n = \emptyset$ であって，かつ，A を包含する任意の開集合 U について「有限個を除くすべての n について $x_n \in U$」が成り立つことをいう．

例 1.2. （強制拡大によって点列の集合への収束が壊れる例）

$\mathbb{R}^2$ において $A = [0,1] \times \{0\}$ に収束する点列 $\{x_n\}_n$ （ただし $n \geq 1$）を，

$$\text{各 } n \text{ について，} l_n = \lfloor \log_2 n \rfloor \text{ とし，} x = \left(\frac{n - 2^{l_n}}{2^{l_n}}, \frac{1}{2^{l_n}} \right)$$

によって定める．このとき，点列 $\{x_n\}_n$ が A に収束することは容易に確かめられる．

ここで，新たな実数を付加する任意の強制擬順序 $\mathbb{P}$ をとり，強制拡大 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ で議論する．

新たに付加された実数 $r \in [0,1]^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}} \setminus \mathbf{V}$ をとり，点 $(r,0)$ に着目する．この点は $\check{A}$ には属さないので，A を包む開集合 U を，点 $(r,0)$ を頂点とする「V 字形」を境界の一部とするように作れる．その際，V 字の左の辺は 45 度より浅い角度（たとえば 10 時の方向）にしておく（右の辺は右上がりであれば任意の角度でよい）．すると，点列 $\{x_n\}_n$ の定義により，U の外側（V 字の「谷」の内側）の点だけをたどって点 $(r,0)$ に収束する $\{x_n\}_n$ の部分列がとれる．このことは，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ では点列 $\{x_n\}_n$ はもはや $\check{A}$ に収束しないことを示している．

[*2] 実は，正則性（regularity）も任意の強制拡大で保存されることが知られている [6]．

[*3] ここで，強制拡大 $\mathbf{V}[G]$ における I の対応物として $\check{I}$ すなわち $[0,1] \cap \mathbf{V}$ （基礎モデルに属する実数に制限された $[0,1]$ 閉区間）を考えていることに注意する必要がある．I の対応物として「$\mathbf{V}[G]$ であらためて定義される $[0,1]$ 閉区間」を考えてしまうと，それは当然コンパクトかつ連結（さらには，ZFC で証明可能な性質はすべて $\mathbf{V}$ における I と共通）である．

[*4] 今後，点列を表す記法として，$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ の代わりに $\{x_n\}_n$，$\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ の代わりに $\{x_{n_i}\}_i$ などと書く．

次節以降では，点列の集合への収束が強制拡大で保存されるための条件（点列と収束先の集合との関係）を検討する．そのために，点列の集合への収束について成り立つ有用な性質を観察する．

κ 個のコーエン実数を付加する強制擬順序 $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ [10, VII 章] を $\mathbb{C}(\kappa)$ で表す．

今後扱う空間はすべて完全正則空間（Tychonoff 空間）とする．空間が完全正則であるという性質は強制拡大で保たれることが知られている [2].

本稿で扱う点列はすべて**離散的な点からなる点列**とする．ここで，点列が離散的な点からなるとは，点列自身に属する点に収束する部分列が存在しないことと定義する．点列の集合への収束を議論するうえでは，そのような点列のみを考えれば十分である．

空間 X の点 p が X の部分集合 A の**集積点** (accumulation point) であるとは，p の任意の開近傍 U について $U \cap A$ が無限集合であることをいう．また，空間 X の点 p が X の部分集合の列 $\{A_n : n \in \omega\}$ の**クラスター点** (cluster point) であるとは，p の任意の開近傍 U について，U が無限個の n に対する A_n と交わることをいう．

位相空間 X が *scattered* であるとは，X の任意の空でない部分空間が孤立点をもつ（したがって，孤立点を除去する操作を超限回繰り返すと空集合に到達する）ことである．いかなる空間 X も，scattered な部分空間 S と完全集合 P の disjoint union（すなわち $X = P \cup S$ かつ $P \cap S = \emptyset$）に一意的に分解できることが知られている．このときの S を X の *scattered kernel*，P を X の *perfect kernel* と呼ぶ（[3, Problem 1.7.10]).

完全正則空間 X が**擬コンパクト** (pseudocompact) であるとは，任意の X 上の実数値連続関数が有界であることをいう．擬コンパクト性は本来の定義のほかに次の性質で特徴づけられる．

命題 1.3. ([5, pp.177–178]; [3, Theorem 3.10.23]) 完全正則空間 X について次は同値である．

(1) X は擬コンパクトである．
(2) $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ が互いに交わらない空でない X の開部分集合からなる列であれば，$\mathcal{U}$ のクラスター点が X に存在する．
(3) X の空でない開集合からなる減少列 $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$ について，$\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$ である．

点列の集合への収束について，後に必要となる基本的な事実を挙げる．

命題 1.4. $\{x_n\}_n$ を X の離散的な点からなる点列，A を $\{x_n\}_n$ と交わらない X の部分集合とする．このとき次は同値である．

(1) $\{x_n\}_n$ は A に収束する.

(2) $\{x_n\}_n$ のいかなる部分列 $\{x_{n_i}\}_i$ についても, $\overline{\{x_{n_i}\}_i} \cap A \neq \emptyset$ である.

証明. 易しい. □

命題 1.5. X を完全正則空間, $\{x_n\}_n$ を X の離散的な点からなる点列とする. 次は同値である.

(1) $\{x_n\}_n$ はなんらかの X の部分集合に収束する.

(2) $\{x_n\}_n$ は集合 $\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ に収束する.

(3) $\{x_n\}_n$ のいかなる部分列 $\{x_{n_i}\}_i$ も集積点をもつ (すなわち $\overline{\{x_{n_i}\}_i} \setminus \{x_{n_i}\}_i \neq \emptyset$).

(4) $\overline{\{x_n\}_n}$ は擬コンパクトである.

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は易しい. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) を示そう.

(2) $\Rightarrow$ (3): ある部分列 $\{x_{n_i}\}_i$ が集積点をもたない (つまり $\overline{\{x_{n_i}\}_i} \setminus \{x_{n_i}\}_i = \emptyset$) とすると, 命題 1.4 によって, $\{x_n\}_n$ は集合 $\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ に収束しないことになる.

(3) $\Rightarrow$ (4): $Y = \overline{\{x_n\}_n}$ が擬コンパクトでないと仮定する. 擬コンパクト性の特徴づけにより, Y の空でない開部分集合の族 $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ を, 互いに交わらず, かつ Y の中にクラスター点をもたないようにとれる. 各 i について, U_i と点列 $\{x_n\}_n$ は交わるので, $x_{n_i} \in U_i$ をみたす n_i をとる. すると, 点列 $\{x_n\}_n$ の部分列 $\{x_{n_i}\}_i$ は Y の中に集積点をもたない. Y は閉集合なので, $\{x_{n_i}\}_i$ は X の中にも集積点をもたない.

(4) $\Rightarrow$ (2): $\{x_n\}_n$ が集合 $\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ に収束しないと仮定する. 命題 1.4 によって, 部分列 $\{x_{n_i}\}_i$ を, $\overline{\{x_{n_i}\}_i}$ と $\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ が交わらないように選び出す. これは $\overline{\{x_{n_i}\}_i} \subseteq \{x_n\}_n$ を意味するが, $\{x_n\}_n$ が離散的な点からなる点列であることから, 結局 $\overline{\{x_{n_i}\}_i} = \{x_{n_i}\}_i$ ということになる. ここで, 集合 $\overline{\{x_n\}_n}$ の中で集合族 $\{\{x_{n_i}\} : i \in \omega\}$ を考えると, これは互いに交わらない開集合の族で, しかもクラスター点をもたないものとなる. 命題 1.4 によって, $\overline{\{x_n\}_n}$ は擬コンパクトでないことが導かれる. □

2 コンパクト集合への点列の収束

この節では, 点列がコンパクト集合に収束する場合に, その収束が強制拡大で保たれるかどうかを議論する.

命題 2.1. (X,τ) を正則なコンパクト位相空間とする. κ を任意の無限基数とする. このとき, $\mathbb{C}(\kappa)$ による強制拡大において, 次は同値である.

(1) $(\check{X}, \tau^{\mathbb{C}(\kappa)})$ はコンパクトである.
(2) $(\check{X}, \tau^{\mathbb{C}(\kappa)})$ は可算コンパクトである.
(3) $(\check{X}, \tau^{\mathbb{C}(\kappa)})$ は擬コンパクトである.

証明. (3) $\Rightarrow$ (1) を示せば十分である.

正則性が任意の強制拡大で保存されることと，リンデレーフ性がコーエン拡大（$\mathbb{C}(\kappa)$ による強制拡大）で保存されることは知られている [6]. したがって，仮定 (3) のもとで，$(\check{X}, \tau^{\mathbb{C}(\kappa)})$ は正則，リンデレーフ，擬コンパクトである．ところで，正則なリンデレーフ空間は正規 [3, Theorem 3.8.2] であり，また，正規な擬コンパクト空間は可算コンパクト [3, Theorem 3.10.21] なので，$(\check{X}, \tau^{\mathbb{C}(\kappa)})$ は可算コンパクトかつリンデレーフ，したがってコンパクト空間となる. □

次の命題はたいへん有用である.

命題 2.2. ([8, Lemma 7]; [1, Proposition 5.5]) コンパクトハウスドルフ空間 X について次は同値である.

(1) X のコンパクト性が，いかなる強制拡大においても保たれる.
(2) X のコンパクト性が，1 個のコーエン実数の付加（$\mathbb{C}(\omega)$ による強制拡大）で保たれる.
(3) X は scattered である.

この命題を利用して，次の定理が証明できる.

定理 2.3. (岩佐・嘉田・加茂 [7, Theorem 3.3]) $\mathbf{V}$ において，完全正則空間 X の離散的な点からなる点列 $\{x_n\}_n$ がコンパクト集合 K に収束しているとする．このとき，次は同値である.

(1) いかなる強制擬順序 $\mathbb{P}$ による強制拡大 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ においても，$\{x_n\}_n$ は K に収束する.
(2) 1 個のコーエン実数を付加する強制拡大 $\mathbf{V}^{\mathbb{C}(\omega)}$ において，$\{x_n\}_n$ は K に収束する.
(3) $\overline{\{x_n\}_n}$ は scattered である.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らかである.

(2) $\Rightarrow$ (3): 点列 $\{x_n\}_n$ がコンパクト集合に収束しているので，その閉包 $\overline{\{x_n\}_n}$ がコンパクトである．$\overline{\{x_n\}_n}$ が scattered でないと仮定する．このとき，命題 2.2 によって，$\mathbf{V}^{\mathbb{C}(\omega)}$ において $\overline{\{x_n\}_n}$ は擬コンパクトでない．さらに，命題 1.5 によって，$\{x_n\}_n$ はいかなる集合にも収束しない.

(3) ⇒ (1): $\overline{\{x_n\}_n}$ は scattered であると仮定する．命題 2.2 により，$\mathbf{V}^{\mathbb{C}(\omega)}$ において $\overline{\{x_n\}_n}$ は擬コンパクトであり続ける．命題 1.5 によって，$\mathbf{V}^{\mathbb{C}(\omega)}$ において $\{x_n\}_n$ は $\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ に収束する．ここで，$\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n \subseteq K$ が成り立つことは容易にわかる．したがって $\{x_n\}_n$ は K に収束する． □

ところで，この定理で，点列の収束先集合がコンパクトであるという仮定は落とせるだろうか．この節の残りの部分では，(1) ⇒ (2) と (2) ⇒ (3) については，コンパクト性の仮定が実際に必要であることを示す．(3) ⇒ (1) については，実はコンパクト性の仮定はなくても成り立つことを次節で示す．

例 2.4. ω の無限部分集合の族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が（ω 上の）almost disjoint family であるとは，$\mathcal{A}$ の任意の 2 つの要素の交わりが有限集合であることをいう．ω 上の almost disjoint family が，無限集合で，かつ極大である（almost disjoint family としてそれ以上拡大できない）とき，それを maximal almost disjoint family または MAD family と呼ぶ．

ω 上の無限な almost disjoint family $\mathcal{A}$ について，位相空間 $\Psi(\mathcal{A})$ を次のとおり定義する．$\Psi(\mathcal{A})$ は集合としては $\omega \cup \mathcal{A}$，つまり，$\Psi(\mathcal{A})$ は ω に $\mathcal{A}$ の個々の要素を「点」として付加した集合で，ω の各点は孤立点とし，付加された点としての $A \in \mathcal{A}$ については，A の個々の有限部分集合 F についての $(A \setminus F) \cup \{A\}$ の形の集合を点 A の基本近傍として位相を導入する．このとき，$\Psi(\mathcal{A})$ は scattered な位相空間で，$\overline{\omega} = \Psi(\mathcal{A})$ が成り立つ．$\mathcal{A}$ は $\Psi(\mathcal{A})$ の離散的な閉部分空間で，かつ無限なので，$\Psi(\mathcal{A})$ はコンパクトではない．

特に，$\mathcal{A}$ が MAD family の場合，空間 $\Psi(\mathcal{A})$ は Mrówka 空間 [11] と呼ばれ，さかんに研究されている．

$\Psi(\mathcal{A})$ において，ω を点列とみなして，ω が $\mathcal{A}$ に収束するかどうかを考える．次の事実は容易にわかる．

主張 1. $\Psi(\mathcal{A})$ において，点列 ω が集合 $\mathcal{A}$ に収束することと，$\mathcal{A}$ が MAD family であることは同値である．

証明. $\mathcal{A}$ が MAD family でないと仮定する．X を ω の無限部分集合で，どの $A \in \mathcal{A}$ とも交わりが有限であるものとする．$U = (\omega \setminus X) \cup \mathcal{A}$ とおく．すると，U は $\mathcal{A}$ を包含する開集合であって，しかも X と交わらない（つまり点列 ω の無限個の点が U の外にある）ので，U は点列 ω が $\mathcal{A}$ に収束しないことを示す開集合となる．

逆に，ω が $\mathcal{A}$ に収束しないと仮定する．命題 1.4 により，ω の無限部分集合 X を，X が $\mathcal{A}$ のどの点にも集積しないように選べる．ここで，$A \in \mathcal{A}$ の近傍の定義を思い出すと，これは，どの $A \in \mathcal{A}$ についても $X \cap A$ が有限である（したがって $\mathcal{A}$ に X を追

加することで almost disjoint family として拡張できる）ことを意味する. □

このことから，MAD family $\mathcal{A}$ について，$\Psi(\mathcal{A})$ における ω の $\mathcal{A}$ への収束が強制拡大で保存されるかどうかは，次の意味で，$\mathcal{A}$ の極大性（MAD family であること）が強制拡大で保存されるかどうかの議論に置き換えられる．基礎モデル $\mathbf{V}$ で ω 上の MAD family $\mathcal{A}$ をとる．すると $\Psi(\mathcal{A})$ において ω は $\mathcal{A}$ に収束する．ここで，強制擬順序 $\mathbb{P}$ による強制拡大 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ を考えるとき，もし $\mathcal{A}$ が $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において MAD family であり続けるなら，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ においてなお ω は $\mathcal{A}$ に収束することになり，そうでなければ，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ ではもはや ω は $\mathcal{A}$ に収束しないことになる．

ところで，MAD family の強制拡大による保存については，次のよく知られた古典的な結果がある．

(1) 実数を付加するいかなる強制概念 $\mathbb{P}$ によっても極大性が壊れる MAD family $\mathcal{A}_d$ が存在する．[10, VIII Exercise A14]
(2) 連続体仮説のもとで，$\mathbb{C}(\kappa)$ による強制拡大で極大性が保存される MAD family $\mathcal{A}_{Ci}$ (Cohen-indestructible MAD family) が存在する．[10, VIII Theorem 2.3]

したがって，$\Psi(\mathcal{A}_d)$ は，点列の閉包が scattered であるにもかかわらず $\mathbb{C}(\omega)$ による強制拡大で点列の収束が保存されない，つまり，収束先集合のコンパクト性の仮定を落とすと定理 2.3 の (3) ⇒ (2) が成り立たないことを示す例となる．また，$\mathcal{A}_{Ci}$ の極大性は $\mathbb{C}(\omega)$ による強制拡大で保存されるが，どんな MAD family に対しても，それの極大性を壊す強制擬順序は存在する[*5] ので，$\Psi(\mathcal{A}_{Ci})$ は定理 2.3 の (2) ⇒ (1) がコンパクト性の仮定なしでは成り立たない（ZFC では証明できない）ことを示す例となる．

3 収束先がコンパクト集合でない場合

この節では，定理 2.3 の (1) ⇒ (3) が収束先集合のコンパクト性の仮定がなくても成り立つことを示す．そのために，点列 $\{x_n\}_n$ がなんらかの集合に収束していて，点列の閉包 $\overline{\{x_n\}_n}$ が scattered でないという仮定だけから，点列 $\{x_n\}_n$ の集合への収束を壊す強制擬順序を構成する．

まず，実数を付加する強制拡大によって，完全空間 (perfect space) は擬コンパクトでなくなることを観察する．

[*5] 特定の MAD family の極大性を壊す強制擬順序としては，[10, II Definition 2.7] で定義された ccc 擬順序が典型的だが，単に壊したい MAD family の濃度を $\aleph_0$ に潰す強制擬順序でもよい．

補題 3.1. $\langle X, \tau \rangle$ を完全正則空間，$\mathbb{P}$ を実数を付加する任意の強制擬順序とする．$\langle X, \tau \rangle$ が完全空間ならば，$\mathbb{P}$ による強制拡大で $\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle$ は擬コンパクトでない．

証明. $\langle X, \tau \rangle$ が基礎モデル $\mathbf{V}$ で擬コンパクトでない場合は，基礎モデルにおける X 上の非有界な実数値連続関数が強制拡大においてもその性質を持ち続けるので，$\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle$ は pseudocompact でない．そこで，$\langle X, \tau \rangle$ が基礎モデルで擬コンパクトであると仮定して証明する．

まず，$\mathbf{V}$ において，X の中に**カントールスキーム** [9, Definition 6.1, Theorem 6.2] を構築する．カントールスキームとは，$2^{<\omega}$ で添字づけされた空でない開集合の系列 $\{U_s : s \in 2^{<\omega}\}$ で，次の性質をみたすものである．

(1) 各 $s \in 2^{<\omega}$ について，$U_{s^\frown\langle 0 \rangle} \cap U_{s^\frown\langle 1 \rangle} = \emptyset$.

(2) 各 $s \in 2^{<\omega}, i \in \{0, 1\}$ について，$\overline{U_{s^\frown\langle i \rangle}} \subseteq U_s$.

X は正則空間で，かつ，孤立点をもたないので，上記の性質をみたす $\{U_s : s \in 2^{<\omega}\}$ を構成できることは容易に確かめられる．

X は擬コンパクトなので，命題 1.3 により，各 $f \in 2^\omega$ について $\bigcap\{\overline{U_{f \restriction n}} : n \in \omega\} \neq \emptyset$ が成り立つ．

ここで，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ に視点を移し，$\mathbb{P}$ で付加される実数 r をとる（つまり $r \in (2^\omega)^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}}} \setminus \mathbf{V}$）．次の主張が証明できれば，命題 1.3 により，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において $\langle \check{X}, \tau^{\mathbb{P}} \rangle$ が擬コンパクトでないことが示される．

主張 2. $\bigcap\{\overline{U_{r \restriction n}} : n \in \omega\} = \emptyset$.

補題を証明する．$\bigcap\{\overline{U_{r \restriction n}} : n \in \omega\} \neq \emptyset$ と仮定して，$x \in \bigcap\{\overline{U_{r \restriction n}} : n \in \omega\}$ をとる．この x は $\mathbf{V}$ に属するので，$\mathbf{V}$ において，$g \in 2^\omega$ を，

$$\text{各 } n \in \omega \text{ について} \quad g(n) = i \iff x \in U_{g \restriction n^\frown\langle i \rangle}$$

で定義する（これで g が適切に定義されることは容易にわかる）．すると，各 n について $r \restriction n \in \mathbf{V}$ であることと，カントールスキームの定義により，（$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において）$r = g$ となる．$g \in \mathbf{V}$ なので，これは r が $\mathbb{P}$ で付加された実数であることに矛盾する． □

目的の定理（定理 3.3）を証明するために，2 段階の反復強制拡大を考える．基礎モデルで $\langle X, \tau \rangle$ の点列 $\{x_n\}_n$ が $\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ に収束し，かつ $\overline{\{x_n\}_n}$ が scattered でない（空でない perfect kernel をもつ）という設定からスタートして，まず（補題 3.1 を使って）実数を付加する強制拡大で $\overline{\{x_n\}_n}$ の perfect kernel の擬コンパクト性を壊しておく．

次に，$\overline{\{x_n\}_n} \setminus \{x_n\}_n$ が擬コンパクトでないことを利用して，どこにも集積点をもたない $\{x_n\}_n$ の部分列を意図的に付加する強制擬順序を作って強制拡大する．この 2 段階反復強制によって，点列 $\{x_n\}_n$ の集合への収束は壊れることになる．その「2 段階め」の強制擬順序の作り方を与えるのが，次の補題である．

補題 3.2. 基礎モデル $\mathbf{V}$ において，$\langle X, \tau \rangle$ を完全正則空間とし，次のことを仮定する．

(1) 離散的な点からなる点列 $\{x_i\}_i$ が集合に収束する．
(2) 点列 $\{x_i\}_i$ の閉包 $\overline{\{x_i\}_i}$ は scattered でない．
(3) 点列 $\{x_i\}_i$ の閉包 $\overline{\{x_i\}_i}$ の perfect kernel は擬コンパクトでない．

このとき，ccc をみたす強制擬順序 $\mathbb{Q}$ を，強制拡大 $\mathbf{V}^{\mathbb{Q}}$ において点列 $\{x_i\}_i$ が集合に収束しないように構成できる．

証明. $\overline{\{x_i\}_i}$ の perfect kernel を P とおく．仮定により P は擬コンパクトでないので，命題 1.3 により，部分空間 P の空でない，互いに交わらない開集合の族 $\{V_n : n \in \omega\}$ を，P の中にクラスター点をもたないようにとる．

各 $n \in \omega$ について，V_n から任意に点 d_n をとって固定し，$D = \{d_n : n \in \omega\}$ とおく．$\{V_n : n \in \omega\}$ の選び方により，D は P の中に集積点をもたないが，P は X の閉集合なので，D は X の中でも集積点をもたない．

各 $n \in \omega$ について，d_n の X における開近傍 U_n を，U_n たちが互いに交わらないように選び，$\mathcal{U}_n$ を U_n の内側での d_n の近傍基のひとつとする（単に $\mathcal{U}_n = \{V : V$ は X の開集合で $d_n \in V \subseteq U_n\}$ と定めればよい）．また，$U_n \cap \{x_i\}_i$ の部分列で d_n に集積するものを固定し，それ（部分列全体）を B_n で表す．

ここまでで用意した $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ と $\{B_n : n \in \omega\}$ を利用して，強制擬順序 $\mathbb{Q}$ を次のとおり定義する．$\mathbb{Q}$ の要素 p は $p = (s^p, W^p)$ の形で，

(1) $s^p \in \bigcup_{l \in \omega} \left(\prod_{n<l} B_n \right)$,
(2) $W^p \in \prod_{n \in \omega} \mathcal{U}_n$

をみたすものとする．$\mathbb{Q}$ の 2 つの要素 $p = (s^p, W^p)$, $q = (s^q, W^q)$ について，擬順序関係 $p \leq_{\mathbb{Q}} q$ を，

(1) $s^p \supseteq s^q$,
(2) すべての $n \in \omega$ について $W^p(n) \subseteq W^q(n)$,
(3) すべての $n \in \mathrm{dom}(s^p) \setminus \mathrm{dom}(s^q)$ について $s^p(n) \in W^q(n)$

で定める．このとき，$p, q \in \mathbb{Q}$ について，$s^p = s^q$ ならば p, q は両立する（compatible である）ので，強制擬順序 $\mathbb{Q}$ は σ-centered である（したがって ccc をみたす）．[*6]

$\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックなフィルター G をとり，G によるジェネリック拡大 $\mathbf{V}[G]$ において，$S_G = \bigcup\{s^p : p \in G\}$ と定める．このとき，S_G は $\{x_i\}_i$ の（無限な長さの）部分列となることが容易に確かめられる．

次の主張を証明すれば，命題 1.5 によって点列 $\{x_i\}_i$ はいかなる集合にも収束しないことになり，定理の証明は完結する．

主張 3. $\mathbf{V}[G]$ において，S_G は X の中に集積点をもたない．

主張を証明するために，X の点 x を固定し，S_G が x に集積しないことを示そう．$\mathbf{V}$ において，D は X に集積点をもたないので，x の開近傍 V を，$\overline{V} \cap D$ が空集合または 1 点集合[*7]となるように選ぶ．各 n について，$H_n \in \mathcal{U}_n$ を $H_n \cap V = \emptyset$ となるように選ぶ（$d_n \in \overline{V}$ の場合は H_n を $\mathcal{U}_n$ から任意に選ぶ）．こうして選ばれた $\{H_n : n \in \omega\}$ について，$\{p \in \mathbb{Q} : \forall n \in \omega\,(W^p(n) \subseteq H_n)\}$ は（$\mathbf{V}$ で定義された）$\mathbb{Q}$ の稠密な部分集合となる．G は $\mathbf{V}$ 上 $\mathbb{Q}$-ジェネリックなので，p をこの集合と G の共通部分からとると，すべての n について $W^p(n) \subseteq H_n$ となる．このことと，$\mathbb{Q}$ における順序関係の定義，さらに S_G の定義により，$\mathbf{V}[G]$ において，有限個を除くすべての n について $S_G(n) \in W^p(n)$ となる．すべての n について $W^p(n) \subseteq H_n$ で，かつ，高々 1 個を除くすべての n について $H_n \cap V = \emptyset$ なので，このことは，S_G が x に集積しないことを示している．□

定理 3.3. 基礎モデル $\mathbf{V}$ において，$\langle X, \tau \rangle$ を完全正則空間とし，次のことを仮定する．

(1) 離散的な点からなる点列 $\{x_i\}_i$ が集合に収束する．
(2) 点列 $\{x_i\}_i$ の閉包 $\overline{\{x_i\}_i}$ は scattered でない．

このとき，ccc をみたす強制擬順序 $\mathbb{P}$ を，強制拡大 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において点列 $\{x_i\}_i$ が集合に収束しないように構成できる．

証明．$\mathbb{R}$ を実数を付加する任意の強制擬順序とすると，補題 3.1 によって，$\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$ において $\overline{\{x_i\}_i}$ の perfect kernel は擬コンパクトでない．そこで，$\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$ において補題 3.2 を適用して得られる強制擬順序 $\mathbb{Q}$ とする．$\mathbb{Q}$ を表す $\mathbb{R}$-名前を $\dot{\mathbb{Q}}$ とし，2 段階反復強制 $\mathbb{R} * \dot{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{P}$ とすれば，$\mathbb{P}$ は要求された性質をみたす強制擬順序となる．□

[*6] 特に，空間 (X, τ) が第 1 可算であれば，$\mathcal{U}_n$ を空でない開集合の長さ ω の減少列として選ぶことができて，そのように選んだ場合に構成される $\mathbb{Q}$ は，Hechler 強制擬順序と同じものになる．

[*7] $x \in D$ の場合は $x \in \overline{V} \cap D$ が不可避．

参考文献

[1] L. Aurichi. D-spaces, topological games, and selection principles. *Topology Proc.*, Vol. 36, pp. 107–122, 2010.

[2] J. Baumgartner and F. Tall. Reflecting Lindelöfness. *Topology Appl.*, Vol. 122, pp. 35–49, 2002.

[3] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] R. Grunberg, L. R. Junqueira, and F. D. Tall. Forcing and normality. *Topology Appl.*, Vol. 84, pp. 145–174, 1998.

[5] K. P. Hart, J. Nagata, and J. E. Vaughan, editors. *Encyclopedia of General Topology.* Elsevier Science, Amsterdam, 2004.

[6] A. Iwasa. Covering properties and Cohen forcing. *Topology Proc.*, Vol. 31, pp. 553–559, 2007.

[7] A. Iwasa, M. Kada, and S. Kamo. Preservation of convergence of a sequence to a set, 2012. to appear.

[8] I. Juhász and W. Weiss. Omitting the cardinality of the continuum in scattered spaces. *Topology Appl.*, Vol. 31, pp. 19–27, 1989.

[9] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*, Vol. 156 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1995.

[10] K. Kunen. *Set Theory: an introduction to independence proofs*, Vol. 102 of *Studies in Logic.* North Holland, 1980.

[11] S. Mrówka. On completely regular spaces. *Fund. Math.*, Vol. 41, pp. 105–106, 1954.