数理解析研究所講究録
第1852巻 2013年 225-234

力学系のエルゴード性と疑似乱数

森 真
日本大学文理学部

2012年11月14日

Abstract

力学系のエルゴード性は，写像に対応する Perron–Frobenius 作用素のスペクトルによって決定される．この講演では，区間の上の力学系について，そのスペクトルを決定する方法を与え，さらに，力学系によって良好な疑似乱数が生成されることをみる．

1 エルゴード定理

我々の出発点は次の定理である．

Theorem 1 (G.D.Birkoff, (1932)) 力学系 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu, F)$ を考える．このとき，$f \in L^1$ について

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(F^k(x)) = {}^{\exists}\hat{f}(x) \quad \mu\text{–}a.e.$$

が成り立ち，さらに，$\hat{f}$ は，$\hat{f}(F(x)) = \hat{f}(x)$，かつ $\int \hat{f}(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu$ をみたす．

とくに，$\hat{f}$ が定数関数のとき，エルゴード的であるという．

力学系がエルゴード的であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap F^{-k}(B)) = \mu(A)\mu(B)$$

が成立することは容易に確かめることができる．このことから

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap F^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$$

が成立するとき，混合的であるという．

力学系のエルゴード性は，次の Unitary 作用素

$$Uf(x) = f(F(x))$$

のスペクトルによって決定される．

- 固有値 1 の固有空間の次元はエルゴード成分の数を定める
- 固有値 1 が単純ならばエルゴード的である.
- 固有値 1 が単純であり，それ以外に固有値がないとき，混合的である

さらに，力学系が混合的であるとき

$$\int f(x)\, g(F^n(x))\, d\mu \to \int f\, d\mu \times \int g\, d\mu$$

の収束の速度を decay rate of correlation という．これを決定するには，上述のユニタリ作用素では不可能である．場合を制限することによって，その研究を進めよう.

2　1次元力学系

$I = [0,1]$ とする．$F\colon I \to I$ によって定まる力学系を考えよう.

$$Pf(x) = \sum_{y:\ F(y)=x} f(y)|F'(y)|^{-1}$$

によって定義される作用素を Perron–Frobenius 作用素という．定義より

$$\int f(x)\, g(F(x))\, dx = \int Pf(x)\, g(x)\, dx$$

をみたし，P は F のある意味での dual とみなすことができる.

P は L^1 の上の作用素と考え，$g \in L^\infty$ で考える.

この Perron–Frobenius 作用素の単位円の上のスペクトルはユニタリ作用素のスペクトルと一致し，さらに不変確率測度の密度関数を与えることができる.

- 固有値 1 の固有空間の次元はエルゴード成分の数を定める
- 固有値 1 の固有空間の基底として非負関数をとることができる．したがって，$\int \rho(x)\, dx = 1$ とすれば，ρ は不変確率の密度関数を与える
- 固有値 1 が単純ならばエルゴード的である
- 固有値 1 が単純であり，それ以外に固有値がないとき，混合的である

さらに，絶対値 1 の固有値に対応する固有関数は有界変動であることに注意しておこう.

F は 推移的かつ拡大的 ($|F'(x)| > 1$) であると仮定しよう．この仮定により，力学系は混合的になる.

さて，以上の仮定の下で、decay rate of correlation を考察しよう．P の 2 番目に大きい固有値が decay rate of correlation，つまり，混合性の収束のオーダーを定めると容易に想像がつくが，これは誤りである．というのも，L^1 の上の作用素である P では単位円内の点がすべて無限重の固有値であるからであり，いかようにでも収束の悪い関数が L^1 内に存在することが知られている.

そこで，単位円の上の固有値に対応する固有関数が有界変動関数であったことを思い出そう．このことは P の定義域を有界変動関数全体 BV に制限するのが自然であることを示唆している．

ここで $BV \subset L^1$ とみなして，ノルムを

$$\|f\| = \|f\|_1 + V(f),$$

によって定義する，ここで，$\|f\|_1$ は L^1 ノルム，$V(f)$ は全変動とする．正確には，version をとって，

$$V(f) = \inf_{\tilde{f}\sim f} V(\tilde{f})$$

とする．このノルムにより BV は Banach space になる．

$$\xi = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in I} \log |F^{n\prime}(x)|.$$

とおくと，$e^{-\xi}$ は P の essential spectrum radius になる．言い換えれば，P は compact ではない．この場合に，スペクトルを決定する方法を以下で与えよう．

3 記号力学系

- 有限集合 $\mathcal{A}$ を alphabet とよぶ．
- $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ の上のシフトを θ で表す．
- $\{\langle a\rangle\}_{a\in\mathcal{A}}$ は I の区間による分割とする．

さらに，$w = a_1\cdots a_n$ を word とよび，

- $|w| = n$,
- $\langle w\rangle = \bigcap_{i=1}^{n} F^{-i+1}(\langle a_i\rangle)$,
- w が admissible とは $\langle w\rangle \neq \emptyset$ であることであり，その全体を $\mathcal{W}$ で表す
- empty word を $\epsilon \in \mathcal{W}$ で表し，$\langle\epsilon\rangle = I$ とする
- $wx \in [0,1]$ を $wx \in \langle w\rangle$ かつ $F^{|w|}(wx) = x$ をみたす点とする

$w \in \mathcal{W}$ であっても，wx は常に存在するとは限らないことに注意する．この記号を用いると

$$Pf(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}} f(ax)|F'(ax)|^{-1}$$

と表せることに注意しよう．

$x \in I$ について，x の展開を $a_1^x a_2^x \cdots$ $(a_n^x \in \mathcal{A})$ を

$$F^{n-1}(x) \in \langle a_n^x\rangle,$$

によって定義する．

$$X = \overline{\{a_1^x a_2^x \cdots : x \in I\}} \subset \mathcal{A}^N$$

とおくと，力学系 $(I, \mathcal{B}, \mu, F)$ は $(X, \mathcal{F}, \nu, \theta)$ に表現できる．ここで $\mathcal{F}$ は cylinder から生成される σ–algebra，ν は μ から誘導される確率測度である．

4　母関数

準備が整ったので，P の固有値を求めよう．

$$\begin{aligned} s^J(z,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n 1_J(x) \\ &= (I - zP)^{-1} 1_J(x). \end{aligned}$$

このことは $s^J(z,x)$ の特異点は P の固有値であることを示唆している．この母関数が我々の主な道具である．$g \in L^\infty$ について， 力学系が混合的ならば

$$\int P^n 1_J(x)\, g(x)\, dx = \int 1_J(x)\, g(F^n(x))\, dx \to |J| \times \int g\, d\mu$$

が成り立つ．したがって

$$\int s^J(z,x)\, g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_J(x)\, g(F^n(x))\, dx$$

は $z=1$ に特異点をもつ，したがって，$s^J(z,x)$ も $z=1$ に特異点をもち，その留数は $|J| \times \rho(x)$ に等しい．この事実に基づけば，母関数を求めることができれば，スペクトルだけでなく，不変確率測度の密度関数も求めることができる．

　一般論は煩雑になるので，簡単な例で考えよう．$I = [0,1]$ の上で

$$F(x) = \beta x \pmod 1,$$

を考える．ここで，$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，すなわち，$\beta$ は

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0$$

の正の解とする．ここで，$\mathcal{A} = \{a, b\}$, $\langle a \rangle = [0, \frac{1}{\beta})$ と $\langle b \rangle = [\frac{1}{\beta}, 1]$ する．このとき，

$$F(\langle a \rangle) = I, \qquad F(\langle b \rangle) = \langle a \rangle.$$

に注意しよう．

　区間 $\langle a \rangle$ に対応する母関数を考えると

$$\begin{aligned} s^{\langle a \rangle}(z,x) &= 1_{\langle a \rangle}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n P^n 1_{\langle a \rangle}(x) \\ &= 1_{\langle a \rangle}(x) + z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{c \in \mathcal{A}} P^n 1_{\langle a \rangle}(cx) \beta^{-1} \\ &= 1_{\langle a \rangle}(x) + z\beta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n 1_I(x) \\ &= 1_{\langle a \rangle}(x) + z\beta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n (1_{\langle a \rangle}(x) + 1_{\langle b \rangle}(x)) \\ &= 1_{\langle a \rangle}(x) + z\beta^{-1} (s^{\langle a \rangle}(z,x) + s^{\langle b \rangle}(z,x)). \end{aligned}$$

をみたす，一方，区間 $\langle b\rangle$ に対応する母関数は

$$
\begin{aligned}
s^{\langle b\rangle}(z,x) &= 1_{\langle b\rangle}(x)+\sum_{n=1}^{\infty} z^n P^n 1_{\langle b\rangle}(x) \\
&= 1_{\langle b\rangle}(x)+z\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{c\in\mathcal{A}} P^n 1_{\langle b\rangle}(cx)\beta^{-1} \\
&= 1_{\langle b\rangle}(x)+z\beta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n 1_{\langle a\rangle}(x) \\
&= 1_{\langle b\rangle}(x)+z\beta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n 1_{\langle a\rangle}(x) \\
&= 1_{\langle b\rangle}(x)+z\beta^{-1}s^{\langle a\rangle}(z,x).
\end{aligned}
$$

をみたす．このことから，

$$
s(z,x)=\begin{pmatrix} s^{\langle a\rangle}(z,x) \\ s^{\langle b\rangle}(z,x)\end{pmatrix}, \qquad \chi(z,x)=\begin{pmatrix} 1_{\langle a\rangle}(x) \\ 1_{\langle b\rangle}(x)\end{pmatrix}.
$$

とおくと

$$
s(z,x)=\chi(z,x)+\Phi(z)s(z,x),
$$

をみたすことがわかる，ここで

$$
\Phi(z)=\begin{pmatrix} z\beta^{-1} & z\beta^{-1} \\ z\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}.
$$

であり，この $\Phi(z)$ を Fredholm 行列とよぶ．

この定義から

$$
s(z,x)=(I-\Phi(z))^{-1}\chi(z,x).
$$

が成り立ち，P の固有値の逆数は $det(I-\Phi(z))=0$ の解であることがわかる．このことから，$\det(I-\Phi(z))$ を Fredholm 行列式とよぶことにしよう．さらに，$\Phi(z)^n$ のトレースが周期 n の周期点に対応していることに注目すると，力学系の zeta function

$$
\zeta(z)=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{p:\ F^n(p)=p} F^{n\prime}(p)\right]
$$

との間に」

$$
\zeta(z)=\frac{1}{\det(I-\Phi(z))}
$$

が成り立つことが証明される．実際

$$
\begin{aligned}
\zeta(z) &= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\sum_{p:\,F^n(p)=p}|F^{n\prime}(p)|\right] \\
&= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{trace}\,\Phi^n(z)\right] \\
&= \exp\left[-\,\mathrm{trace}\log(I-\Phi(z))\right] \\
&= \frac{1}{\det(I-\Phi(z))}
\end{aligned}
$$

このことから，$|z|>e^{-\xi}$ における $\zeta(z)$ の特異点は P の固有値の逆数になることが示される．

これまで，考えてきたのは Markov 型とよばれるシンボルに対応する区間の端点の像が，シンボルの端点に移る場合である．この場合には zeta function は有理関数になる．一般の piecewise linear 変換の場合には，Fredholm 行列の各成分が端点の展開に依存する収束半径 $e^{-\xi}$ の関数項級数になるため，zeta function は e^{ξ} を natural boundary にもつ関数となることが示される．また，Markov 型の場合にも $w=a_1\cdots a_m$ について

$$
\begin{aligned}
s^{\langle w\rangle}(z,x) &= \sum_{n=0}^{m-1} z^n P^n 1_{\langle w\rangle}(x) \\
&\quad + \sum_{n=m}^{\infty} z^n \sum_{|v|=m} P^{n-m}1_{\langle w\rangle}(vx)\beta^{-m} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} z^n\beta^{-n}1_{F^n\langle w\rangle}(x) \\
&\quad + z^m\beta^{-m}\begin{cases}(s^{\langle a\rangle}(z,x)+s^{\langle b\rangle}(z,x)) & a_m=a,\\ s^{\langle a\rangle}(z,x) & a_m=b.\end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注目して、word に対応する単関数に分解することで，P も essential spectrum radius が $e^{-\xi}$ であることが証明される．この結果は piecewise C^2 変換の場合にまで拡張が可能である．

さらに $f=\sum_{w\in\mathcal{W}}C_w1_{\langle w\rangle}$ と分解できて，任意の $0<r<1$ について

$$
||f||_r=\inf\sum_{m=0}^{\infty}r^m\sum_{|w|=m}|C_w|<\infty
$$

が成り立つ f 全体を $\mathcal{B}$ と表す．ここで，inf は f の分解についてとる．

$\mathcal{B}$ はセミノルム $||\cdot||_r$ $(0<r<1)$ をもち，1 次元の場合には BV より少し広いクラスになっている．この $\mathcal{B}$ の上で考えることで，上に述べたことは形式的にはそのまま高次元の場合にも一般化が可能である．しかし，1 次元とは異なり，P の essential spectrum radius を定めることは容易でないということに注意しておこう．

5 疑似乱数

列 $x_1, x_2, \ldots \in [0,1]^d$ について，discrepancy とは

$$D_N = \sup_J \left| \frac{1}{N} \#\{x_i \in J : i \le N\} - |J| \right|.$$

により定義される．ここで，上限は区間 $J \subset [0,1]^d$ 全体についてとる．

$d = 1$ と 2 のときは

$$D_N \ge O\left(\frac{(\log N)^d}{N}\right)$$

であることが示され，$d \ge 3$ でも成り立つと信じられている．

そこで，

$$D_N = O\left(\frac{(\log N)^d}{N}\right)$$

をみたす列を low discrepancy であるという．

積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を数値的に求めるもっとも単純な方法は Riemanian 和 $\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n}) \times \frac{1}{n}$ を考えることであるが，関数によってはこの収束は大変遅い．もう一つのアイディアは一様分布にしたがう確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ により $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(X_i)$ を考えることである．中心極限定理により，この値の $\int_0^1 f(x)\,dx$ への収束のオーダーは $\frac{1}{\sqrt{N}}$ であることがわかる．この方法は Monte Carlo 法と呼ばれる．これに対して，数列 $x_1, x_2, \ldots$ を用いて $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(x_i)$ により積分を近似する方法は quasi–Monte Carlo 法と呼ばれる．よく知られた結果として $\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(x_i)\right| \le V(f)D_N$ がある．したがって，low discrepancy sequence を用いると Monte Carlo 法より近似がよいことになる．ここで，$V(f)$ は f の total variation である．

代表的な low discrepancy 列として van der Corput sequence が知られている．その作り方は数列 $1, 2, 3, 4, \ldots$ を 2 進法で表して

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \ldots$$

これをひっくり返して

$$1, 01, 11, 001, 101, 011, 111, 0001, \ldots$$

さらに，ピリオドを前につけて

$$0.1, 0.01, 0.11, 0.001, 0.101, 0, 011, 0.111, 0.0001, \ldots$$

とすると，

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

を得るが，これが low discrepancy であることが知られている．

力学系により van der Corput sequence を構成しよう．$x \in I$ を固定し，$\{wx\}_{w \in \mathcal{W}}$ に以下のように順序を定める．

$wx < w'x$ であるとは

- $|w| < |w'|$
- $w = a_1 \cdots a_n$, $w' = b_1 \cdots b_n$, $a_{k+1} \cdots a_n = b_{k+1} \cdots b_n$ ならば，ある k があって，$a_k < b_k$

この順序で並べた $\{wx\}$ を力学系により導かれる van der Corput sequence とよぼう．

Theorem 2 F を $[0,1]$ 上の $|F'| \equiv \beta$ である *transitive* かつ *expanding piecewise linear* 変換としよう．このとき，

- ドーナッツ領域 $\beta^{-1} < |z| \leq 1$ で $z = 1$ 以外の固有値があるなら *van der Corput sequence* は *low discrepancy* でない．
- ドーナッツ領域 $\beta^{-1} < |z| \leq 1$ に $z = 1$ 以外に固有値があるなら

$$D_N = O\left(\frac{(\log N)^{k+1}}{N}\right)$$

  である，ここで，k は *Markov* 点でない端点の個数である．したがって，F が *Markov* なら *van der Corput sequence* は *low discrepancy* である．

証明の概要：word $u \in \mathcal{W}$ に対応する区間 $\langle u \rangle$ を考えよう．

$$P^n 1_{\langle u \rangle}(x) = \beta^{-n} \sum_{|w|=n} 1_{\langle u \rangle}(wx)$$

だから，$|u| < n$ ならば，$\langle u \rangle$ への訪問回数は

$$\sum_{|w|=n} 1_{\langle u \rangle}(wx) = \beta^n P^n 1_{\langle u \rangle}(x)$$

に等しい．ラフに評価すれば，P の 2 番目に大きい固有値を η とすると

$$\sum_{|w|=n} 1_{\langle u \rangle}(wx) = \beta^{n-|u|}\rho(x) + (\beta\eta)^{n-|u|}$$

となる．

$$N = \sum_{k=1}^{n} \#\{wx \colon |w| = k\}$$

と表すと，

$$N = \sum_{k=1}^{n} \sum_{|w|=k} 1_{\langle \epsilon \rangle}(x) \sim \sum_{k=1}^{n} \beta^k \rho(x)$$

になる．とくに $\eta = \beta^{-1}$，つまり，ドーナッツ領域に 1 以外の固有値がないなら，

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{|w|=k} 1_{\langle u \rangle}(wx) = \sum_{k=|u|}^{n} \beta^{k-|u|}\rho(x) + n$$

を得る．$N \sim \beta^n$ であるから，区間 $\langle u \rangle$ の長さが $\sim \beta^{-|u|}$ で，$n \sim \log N$ になる．このことは，列が low discrepancy であることを示している．

実際の証明は，P の固有値を求めたときに用いた再生方程式を詳細に検討することから得られる，

この 1 次元の low discrepancy な疑似乱数の生成は，高次元の場合にも拡張が可能である．形式的には，ヤコビアンが定数 β であるような変換の essential spectrum radius が β^{-1} になり，さらに，単純な 1 以外に unessenntial spectrum が存在しないならば，その変換から生成される van der Corput 列であることが証明できる．しかし，高次元の場合には，前にも述べたように，essential spectrum radius を求めることが非常に困難であり，その最小値である β^{-1} を達成する変換を構成することは容易ではない．これまでにいくつか Bernoulli タイプのこの条件をみたす変換を構成してきたが，irreducible polynomial を用いた方法は最も自然であると思われる．しかし，この方法でさえ，Bernoulli でない単純な Markov 型の変換を構成することはまだできていない．

References

[1] Yuko Ichikawa and Makoto Mori, *Discrepancy of van der Corput sequences generated by piecewise linear transformations*, Monte Carlo methods and Applications **10**, No. 2 (2004), 107-116.

[2] Masaki Mori and Makoto Mori, *New Construction of two dimensional Low Discrepancy Sequences, accepted in Proceedings of The Institute of Natural Sciences, Nihon University.*

[3] Makoto Mori, *Fredholm determinant for piecewise linear transformations*, Osaka J. Math. **27** (1990), 81-116.

[4] Makoto Mori, *Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations*, Osaka J. Math. **29** (1992), 497-529.

[5] Makoto Mori, *Low discrepancy sequences generated by piecewise linear Maps*, Monte Carlo methods and Applications **4**, No. 2 (1998), 141-162.

[6] Makoto Mori, *Discrepancy of sequences generated by piecewise monotone Maps*, Monte Carlo methods and Applications **5**, No. 1 (1999), 55-68.

[7] Makoto Mori, *Fredholm determinant for higher dimensional piecewise linear transformations*, Japanese J. Math. **25**, No.2 (1999), 317–342.

[8] Makoto Mori, *Construction of two dimensional low discrepancy sequences*, Monte Carlo methods and Applications **8**, No.2 (2002),159-170.

[9] Makoto Mori, *Construction of 3 dimensional low discrepancy sequences*, Monte Carlo methods and Applications **11**, No.2 (2005), 163-174.

[10] Makoto Mori, *Spectra of Perron–Frobenius operator and new construction of two dimensional low discrepancy sequences*, Monte Carlo methods and Applications **14**, No.1 (2008), 53-74.

[11] Makoto Mori and Masaki Mori, *New Construction of Two Dimensional Low Discrepancy Sequences*, Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University **47**, (2012), 449–462.

[12] Makoto Mori and Masaki Mori, *Dynamical system generated by algebraic method and low discrepancy sequences*, Monte Carlo methods and Applications, to appear.

[13] S. Ninomiya, *Constructing a new class of low-discrepancy sequences by using the β-adic transformation*, Math. Comput. Simul. **47** (1998), 405-420.

[14] S. Ninomiya, *On the discrepancy of the β-adic van der Corput sequence*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **5** (1998), 345-366.