数理解析研究所講究録
第 1852 巻 2013 年 15-24

不動点集合上の変分不等式問題と不動点問題の求解法

千葉大学・法経学部 青山 耕治
Koji Aoyama
Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J20, 47H09, 47H10.
Keywords and phrases. 変分不等式, 非拡大写像, 不動点.

概要

文献 [1] で得られた結果の紹介と解説を行う。

1 序論

本稿では, 次のような変分不等式問題を考える*1。

問題 1.1. H を実 Hilbert 空間, A を自己共役な H 上の有界線形作用素, $\{T_n\}$ を H 上の非拡大写像の列, $u \in H$, $\gamma \in (0,1]$ とし, $\|A\| = 1$ であり, A は γ-強正であり, $\{T_n\}$ の共通不動点の集合 F は空ではないと仮定する。このとき, すべての $y \in F$ に対して

$$\langle y - w, Aw - u \rangle \geq 0$$

となる $w \in F$ を求めよ。

問題 1.1 の仮定のもとで点列 $\{x_n\}$ を次のように定める。x_1 を H の任意の点とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + T_n x_n - \lambda_n A T_n x_n$$

とする。本稿では, この $\{x_n\}$ が問題 1.1 の解へ収束するための条件について考察し, A が恒等写像の場合の議論が重要であることを示す。

以下, 本稿の構成は次の通りである。次の第 2 節で, 問題 1.1 の詳細を説明する。第 3 節では, $\{x_n\}$ が収束するための条件を述べ, その応用例を示す。第 4 節では, 第 3 節の結果を使って導かれる他の結果を紹介する。また, 最後の第 5 節は, 補足事項をまとめたものである。

*1 この問題の詳細は, 第 2 節で説明する。

2 準備 (問題 1.1 について)

本稿では, H を実 Hilbert 空間, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。

ここでは, 問題 1.1 を理解するために必要な定義などを説明する。

- T_n が H 上の非拡大 (nonexpansive) 写像であるとは, T_n が H から H への写像であり, すべての $x, y \in H$ に対して
$$\|T_n x - T_n y\| \leq \|x - y\|$$
が成り立つときをいう。
- 問題 1.1 の F は
$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in H : T_n z = z\}$$
と表すこともできる。ここで, 各 T_n の不動点の集合 $\{z \in H : T_n z = z\}$ は閉凸であることが知られているので [12], F は H の閉凸部分集合である。
- H 上の有界線形作用素 A が γ-強正 (γ-strongly positive) であるとは, すべての $x \in H$ に対して
$$\langle Ax, x\rangle \geq \gamma \|x\|^2$$
が成り立つときをいう。
- 問題 1.1 の $\|A\| = 1$, $\gamma \leq 1$ という仮定は本質的ではなく, 単に $\|A\| > 0$, $\gamma > 0$ としてかまわない。しかし, このとき, すべての $x \in H$ に対して
$$\|A\| \|x\|^2 \geq \langle Ax, x\rangle \geq \gamma \|x\|^2$$
が成り立つから, $\|A\| \geq \gamma > 0$ であり, $\tilde{A} = A/\|A\|$, $\tilde{\gamma} = \gamma/\|A\|$ とおくと, $\tilde{A}$ は自己共役な有界線形作用素で, $\|\tilde{A}\| = 1$, $\tilde{\gamma}$-強正であり, $0 < \tilde{\gamma} \leq 1$ となる。さらに, $\tilde{u} = u/\|A\|$ とおけば, $w \in F$ のとき
$$\langle y - w, Aw - u\rangle \geq 0\,(\forall y \in F) \Leftrightarrow \left\langle y - w, \tilde{A}w - \tilde{u}\right\rangle \geq 0\,(\forall y \in F)$$
である。したがって, 問題 1.1 では, 最初から $\|A\| = 1$, $\gamma \leq 1$ と仮定している。
- 問題 1.1 は, ある凸最小化問題 (問題 5.1) と同値である (第 5 節参照)。

この節の最後に, 問題 1.1 の解が存在することを示しておく。

命題 2.1. 問題 1.1 の解は一意に存在する。

証明. $f = P_F(I - A + u)$ とおく。ここで, P_F は H から F の上への距離射影[*2]である。P_F は非拡大であるから, 補助定理 5.3 より, f は H 上の縮小写像である。実際, 任意の $x, y \in H$ に対して

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &= \|P_F(x - Ax + u) - P_F(y - Ay + u)\| \\ &\leq \|x - Ax + u - (y - Ay + u)\| \\ &\leq \|I - A\| \, \|x - y\| \\ &\leq (1 - \gamma) \, \|x - y\|\end{aligned}$$

が成り立つ。よって, 縮小写像の不動点定理[*3]により, $w = fw$ となる点 $w \in H$ がただ一つ存在し, ここでは, $w \in F$ である[*4]。さらに, 補助定理 5.4 より, f の不動点と問題 1.1 の解は一致することがわかるので, w が問題 1.1 のただ一つの解である。 □

このように, 縮小写像 $P_F(I-A+u)$ の不動点が問題 1.1 の解であるから, $P_F(I-A+u)$ を用いれば, 問題 1.1 の解への収束点列を得ることは容易である。しかし, 本稿では, P_F を使わずに問題 1.1 の解を近似する方法に焦点をあてる。

3 主結果

問題 1.1 の解を求めるために, [14] の成果を踏まえ, 次のような H の点列 $\{x_n\}$ を考える[*5]。初項 x_1 は H の任意の点[*6]とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (I - \lambda_n A) T_n x_n \tag{3.1}$$

とする。ここで, $\{\lambda_n\}$ は $[0, 1]$ の数列である。

さて, 文献 [11] を参考にして, 次の定理 3.1 を示そう。この定理から, $\{x_n\}$ の収束性に関しては $A = I$ のときが重要であることがわかる。

[*2] F は閉凸であるから, 各 $x \in H$ に対して, $\|z - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in F\}$ となる点 $z \in C$ がただ一つ存在する。x に z を対応させる写像を P_F と表し, P_F を H から F の上への距離射影と呼ぶ。距離射影 P_F は非拡大であることが知られている [12]。

[*3] 例えば, [12, Theorem 2.4.11]。

[*4] $f(H) \subset F$ であるから。

[*5] 文献 [14] では, F が一つの非拡大写像の不動点集合の場合, および, 有限個の非拡大写像の共通不動点集合の場合を議論している。

[*6] 初項 x_1 は, $\{x_n\}$ の極限に影響を与えないことがわかる。例えば, [9, 11]。

定理 3.1. A, $\{T_n\}$, F, u および γ は問題 1.1 と同じとする。また, $\{\lambda_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$ を仮定する。さらに, 任意の $v\in H$ に対して次の条件を仮定する。

$y_1=v$ および各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1}=\lambda_n v+(1-\lambda_n)T_n y_n \tag{3.2}$$

で定義される点列 $\{y_n\}$ は $P_F(v)$*7に強収束する。

このとき, $\{x_n\}$ は問題 1.1 の解に強収束する。

証明. w を問題 1.1 の解とし, $v=w-Aw+u$ とおく。補助定理 5.4 より, $P_F(v)=w$ である。点列 $\{y_n\}$ を, $y_1=v$ および各 $n\in\mathbb{N}$ に対して (3.2) で定義すると, 仮定より

$$y_n\to P_F(v)=w \tag{3.3}$$

である。したがって, $x_n-y_n\to 0$ であることを示せばよい。

各 T_n は非拡大であり, $w\in F$ であるから

$$\|T_n y_n-w\|\le\|y_n-w\|$$

が成り立つ。したがって, $u-v=-(I-A)w$ と補助定理 5.3 より, すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-y_{n+1}\|&=\|(I-\lambda_n A)(T_n x_n-T_n y_n)+\lambda_n(I-A)(T_n y_n-w)\|\\&\le\|(I-\lambda_n A)(T_n x_n-T_n y_n)\|+\lambda_n\|(I-A)(T_n y_n-w)\|\\&\le(1-\lambda_n\gamma)\|T_n x_n-T_n y_n\|+\lambda_n(1-\gamma)\|T_n y_n-w\|\\&\le(1-\lambda_n\gamma)\|x_n-y_n\|+\lambda_n\gamma\frac{1-\gamma}{\gamma}\|y_n-w\|\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, $\lambda_n\gamma\in[0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\gamma=\gamma\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$ だから, (3.3) と補助定理 5.5 より, $x_n-y_n\to 0$ となる。よって, $\{x_n\}$ が w に強収束することが示せた。 □

定理 3.1 より, (3.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ が収束するための十分条件を研究する場合は, (3.2) で定義される点列 $\{y_n\}$ が収束するための条件を調べればよいことがわかる。しかし, 問題 1.1 の解を得るために, 点列 $\{y_n\}$ を使うことはできない。なぜなら, 定理 3.1 の証明の中で点列 $\{y_n\}$ は問題 1.1 の解に収束することが示されるが, 点列 $\{y_n\}$ を定義するのに問題 1.1 の解 w を使ってしまっているからである。

*7 ここで, P_F は H から F の上への距離射影である。

問題 1.1 の F が, 有限個 (N 個) の非拡大写像の共通不動点集合の場合については, 次の定理が知られている。本節の最後に, 定理 3.1 を使ってこの定理を示そう。

定理 3.2 ([14, Theorem 3][*8]の $N=2$ の場合). H, A, $u \in H$ を問題 1.1 と同じとする。また, F を H 上の非拡大写像 T_1 と T_2 の共通不動点の集合とし

$$F = F(T_1T_2) = F(T_2T_1) \neq \emptyset$$

を仮定する[*9]。さらに, $\{\lambda_n\}$ を

$$\lambda_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+2} - \lambda_n| < \infty$$

を満たす $[0,1]$ の数列とし, 点列 $\{x_n\}$ を, H の任意の点 x_1 と各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (I - \lambda_n A)T_{[n]}x_n$$

で定義する。ここで, n が奇数のとき $T_{[n]} = T_1$, n が偶数のとき $T_{[n]} = T_2$ とする。このとき, $\{x_n\}$ は問題 1.1 の解に強収束する。

証明. 写像列 $\{T_{[n]}\}$ の共通不動点は F である。$v \in H$ を任意にとり, 点列 $\{y_n\}$ を, $y_1 = v$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n)T_{[n]}y_n$$

で定義すると [9, Theorem 3.1] より, $\{y_n\}$ は $P_F(v)$ へ強収束する。したがって, 定理 3.1 より, 結論が得られる。 □

4 主結果から導かれる結果

ここでは, 第 3 節で扱った点列 $\{x_n\}$ が収束するための十分条件を紹介し, 定理 3.1 から導かれる結果を述べる。

次の定理を述べる前に, いくつか準備が必要である。$\{T_n\}$ と F を問題 1.1 と同じとする。$\{x_n\}$ を H の有界点列とするとき, $\{x_n\}$ の弱収積点 (weak cluster point) の全体を $\omega_w(\{x_n\})$ で表す。$\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは

[*8] [14, Theorem 3] は, ある凸最小化問題の解への収束定理であるが, 補助定理 5.2 によって, 問題 1.1 の形の変分不等式問題の解への収束定理とみなすことができる。

[*9] ここで, $F(T_1T_2)$ は T_1T_2 の, $F(T_2T_1)$ は T_2T_1 の不動点集合である。

点列 $\{x_n\}$ が有界で, $x_n - T_n x_n \to 0$ ならば, $\omega_w(\{x_n\}) \subset F$

が成り立つときをいう [2,3,7,8]。

定理 4.1 ([1, Theorem 1.2]). A, $\{T_n\}$, F, u および γ を問題 1.1 と同じとする。$\{\lambda_n\}$ を $[0,1]$ の点列とし

$$\lambda_n \to 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を仮定する*10。さらに, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たし, 任意の空でない H の有界部分集合 D に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\|T_{n+1}y - T_n y\| : y \in D\} < \infty \tag{4.1}$$

が成り立つと仮定する。このとき, $x_1 \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義される $\{x_n\}$ は問題 1.1 の解へ強収束する。

定理 3.1 と次の補助定理を使えば, 定理 4.1 が直ちに得られる。

補助定理 4.2 ([1, Lemma 3.2], [5, Theorem 3.4]). H, $\{T_n\}$, F と $\{\lambda_n\}$ は, 定理 4.1 と同じとする。$v \in H$ とし, H の点列 $\{y_n\}$ を, $y_1 = v \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.2) で定義する。$\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たし, 任意の空でない H の有界部分集合 D に対して (4.1) が成り立つと仮定する。このとき, $\{y_n\}$ は $P_F(v)$ へ強収束する。

任意に与えられた非拡大写像列から, 定理 4.1 の仮定を満たす写像列を作り出すことができる。例えば, $\{S_n\}$ を共通不動点を持つ H から H への非拡大写像の列とする。このとき, 写像列 $\{T_n\}$ を, $T_1 = S_1$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} S_k + \frac{1}{2^n} S_{n+1}$$

で定義すると, 次のことがわかる [2,5]。

(1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が成り立つ。ここで $F(S_n)$, $F(T_n)$ は, それぞれ S_n, T_n の不動点の集合を表す。

(2) $\{T_n\}$ は条件 (Z) 満たす。

*10 条件 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$ を「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_n > 0$ かつ $\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 1$」に置き換えることができる [5]。

(3) 任意の空でない H の有界部分集合 D に対して (4.1) が成り立つ。

この他に, 文献 [10] の手法を使って, 定理 4.1 の仮定を満たす写像列を作り出すこともできる[*11]。

5 補足

ここではまず, 問題 1.1 が次の凸最小化問題[*12]と同値であることを示す。

問題 5.1. F, A および u を問題 1.1 と同じとする。また, 関数 $\phi\colon H \to \mathbb{R}$ を, $x \in H$ に対して

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle u, x\rangle$$

で定義する。このとき, ϕ を最小にする $z \in F$, つまり

$$\phi(z) = \inf\{\phi(y) : y \in F\}$$

となる $z \in F$ を求めよ。

問題 5.1 について次のことがわかる。

補助定理 5.2. 問題 5.1 の仮定のもとで以下が成り立つ。

(1) ϕ は凸関数である。

(2) ϕ は Gâteaux 微分可能である。つまり, すべての $x, y \in H$ に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi(x+ty)-\phi(x)}{t} = \langle Ax - u, y\rangle$$

が成り立つ。

(3) 問題 5.1 は問題 1.1 と同値である。

証明. まず, $x \in H$ に対して $\psi(x) = \langle Ax, x\rangle$ で関数 ψ を定義し, ψ が凸であることを示す。$x, y \in H$, $\lambda \in (0, 1)$ とする。A は線形で正であるから

$$\begin{aligned}\psi\bigl(\lambda x + (1-\lambda)y\bigr) &= \langle \lambda Ax + (1-\lambda)Ay, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle \\ &= \lambda\langle Ax, x\rangle + (1-\lambda)\langle Ay, y\rangle \\ &\qquad - \lambda(1-\lambda)[\langle Ax, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - \langle Ay, x\rangle - \langle Ax, y\rangle]\end{aligned}$$

---

*11 [4, Example 4.5] および [6] も参照。

*12 文献 [10, 13, 14] 参照。

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y) - \lambda(1-\lambda)\langle A(x-y), x-y\rangle \\
&\le \lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y)
\end{aligned}
$$

が得られる。よって, ψ は凸である。$\phi(x) = 1/2\psi(x) - \langle u, x\rangle$ であるから, ϕ が凸であることが示せた。

次に, ϕ が Gâteaux 微分可能であることを示す。$x, y \in H$, $t \in \mathbb{R}$ とすると, A は自己共役であるから

$$\phi(x+ty) = \phi(x) + t\langle Ax-u, y\rangle + \frac{1}{2}t^2\langle Ay, y\rangle$$

が成り立つことがわかる。したがって

$$\lim_{t\to 0}\frac{\phi(x+ty)-\phi(x)}{t} = \langle Ax-u, y\rangle + \frac{1}{2}\langle Ay, y\rangle\lim_{t\to 0}t = \langle Ax-u, y\rangle$$

となる[*13]。

最後に, 問題 5.1 と問題 1.1 と同値であることを示す。z を問題 5.1 の解とし, $y \in F$, $\lambda \in [0,1]$ とすると

$$\phi(z) \le \phi((1-\lambda)z + \lambda y) = \phi(z + \lambda(y-z))$$

が成り立つ。したがって, 任意の $\lambda \in (0,1]$ に対して

$$\frac{\phi(z+\lambda(y-z)) - \phi(z)}{\lambda} \ge 0$$

となる。よって, (2) より, すべての $y \in F$ に対して

$$\langle Az-u, y-z\rangle = \lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\phi(z+\lambda(y-z)) - \phi(z)}{\lambda} \ge 0$$

が成り立つので, z は問題 1.1 の解であることが示せた。次に, w を問題 1.1 の解とし, $y \in F$ とする。ϕ は凸であるから, $\lambda \in [0,1]$ のとき

$$\phi((1-\lambda)w + \lambda y) \le (1-\lambda)\phi(w) + \lambda\phi(y)$$

が成り立つ。したがって, すべての $\lambda \in (0,1]$ に対して

$$\frac{\phi(w+\lambda(y-w)) - \phi(w)}{\lambda} \le \phi(y) - \phi(w)$$

[*13] $t \neq 0$ のとき, $\left|\frac{\phi(x+ty)-\phi(x)}{t} - \langle Ax-u, y\rangle\right| = \frac{1}{2}|t\langle Ay, y\rangle| \le \frac{1}{2}|t|\,\|A\|\,\|y\|^2$ となるから, ϕ は微分可能で $\phi'(x) = Ax - u$ である。

となる。よって, (2) より, すべての $y \in F$ に対して

$$0 \leq \langle Aw - u, y - w \rangle = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\phi(w + \lambda(y - w)) - \phi(w)}{\lambda} \leq \phi(y) - \phi(w)$$

が成り立つので, w は問題 5.1 の解であることが示せた。 □

最後に, 本稿で利用した補助定理を列挙しておく。

補助定理 5.3 ([1, Lemma 2.3] など). 問題 1.1 の仮定のもとで, $0 \leq \lambda \leq 1$ ならば, $I - \lambda A$ は, 自己共役な有界線形作用素で, $\|I - \lambda A\| \leq 1 - \lambda\gamma \leq 1$ が成り立つ。

補助定理 5.4 ([12, Lemma 5.2.2] など). C を H の空でない閉凸部分集合とし, $x \in H$, $z \in C$ とする。このとき, $z = P_C x$ であることと, すべての $y \in C$ に対して $\langle y - z, x - z \rangle \leq 0$ が成り立つことは同値である。

補助定理 5.5 ([5, Lemma 2.3] など). $\{t_n\}$ を非負の数列, $\{s_n\}$ を実数列, $\{\lambda_n\}$ を $[0, 1]$ の数列とする。さらに, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $t_{n+1} \leq (1 - \lambda_n)t_n + \lambda_n s_n$ $\limsup_{n\to\infty} s_n \leq 0$ および $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ を仮定する。このとき, $t_n \to 0$ である。

参考文献

[1] K. Aoyama, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 21–28.

[2] ———, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 1–7.

[3] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III, Yokohama Publ., Yokohama, 2011, pp. 343–350.

[4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[5] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[6] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[7] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[8] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[9] H. H. Bauschke, *The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 150–159.

[10] I. Kirihara, Y. Kurokawa, and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for quadratic minimization problem with countable constraints*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 383–393.

[11] T. Suzuki, *Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 342–352.

[12] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.

[13] H. K. Xu, *An iterative approach to quadratic optimization*, J. Optim. Theory Appl. **116** (2003), 659–678.

[14] I. Yamada, N. Ogura, Y. Yamashita, and K. Sakaniwa, *Quadratic optimization of fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert space*, Numer. Funct. Anal. Optim. **19** (1998), 165–190.