数理解析研究所講究録
第 1854 巻 2013 年 103-115

退化放物型方程式の流体力学極限による導出

佐々田槙子*

慶應義塾大学理工学部数理科学科

1 序

本稿では、多孔質媒質方程式 (Porous medium equation) に代表される退化放物型方程式のミクロスコピックなモデルからの導出について紹介する。特に、流体力学極限と呼ばれる手法を用いた導出について先行結果、および最近の講演者の研究成果について報告する。

流体力学極限は、統計物理学を数学的に厳密に基礎付ける重要な手法の一つである。統計物理学は、原子や分子といったミクロな系の性質から、その系のマクロな性質を導出するための理論である。ここでミクロな系として考察の対象となる系は、一般に非常に多くの自由度、または構成要素を持ち、複雑な相互作用をしながら時間発展しており、大規模相互作用系と呼ばれる。このような系を決定論的に扱うには、数学的に重大な困難があり、統計物理学の数学的な基礎付けには、ランダムな微視的系を考察の対象とした、確率解析に基づく大規模相互作用系の研究が大きな役割を果たしている。特に、ミクロな系の時間発展を表す確率過程を、時間と空間について適切なオーダーの比でスケール変換をし、スケーリングパラメータに極限操作を行い、大規模相互作用系の局所平衡による平均化を示すことで、マクロなパラメータが従う時間発展方程式を導出する手法を、流体力学極限と呼ぶ。この手法の本質的なアイディアは、大規模相互作用系は、その性質ゆえに、マクロな (少数の) パラメータで特徴づけられる平衡状態を持ち、さらにその平衡状態を特徴づけるパラメータは時空間の各点で異なり (局所平衡状態)、それが滑らかに連なって全体として平均化していく、という描像にある。

退化放物型方程式の典型的かつ重要な例である多孔質媒質方程式

$$\partial_t \rho = \Delta \rho^m \quad (m > 1)$$

*sasada@math.keio.ac.jp

は、物理学や工学など様々な文脈で自然に現れることから、長年様々な研究が行われてきた。また数学的にも、多孔質媒質方程式は、熱方程式（$m=1$ の場合にあたる）の非常にシンプルな一般化の一例でありながら、その「退化性」により熱方程式とは大きく異なる性質を持つことが知られている。特に、「有限伝搬性」と呼ばれる次の性質は熱方程式とは決定的に異なっている。

有限伝搬性：

$\rho(t,u)$ を多孔質媒質方程式の解で $\rho(0,u)\geq 0$ かつ $\rho(0,u)$ の support がコンパクトなものとすると、任意の時刻 $t>0$ で $\rho(t,u)$ の support もコンパクト。

この有限伝搬性を持つことから、多孔質媒質方程式は、拡散現象を表現する方程式として熱方程式に比べてより現実的なものであると考えることができる。しかし、多くの研究があるにもかかわらず、多孔質媒質方程式やその他の退化放物型方程式のミクロスコピックなモデルからの導出についてはあまり厳密な結果は知られていなかった。そこで、本稿では近年行われている退化放物型方程式の流体力学極限によるミクロスコピックモデルからの導出についてその研究動向を紹介する。

2 先行結果

本節では、多孔質媒質方程式の流体力学極限による導出について、既に知られている先行結果を紹介する。以下で紹介するモデルは、Stick process と Exclusion process with degenerate rates であり、それぞれ状態空間が連続なモデルと離散的なモデルの代表的な例である。筆者が知る限り、多孔質媒質方程式が流体力学極限によって厳密に導出されているのは、これらのモデルのみである。

2.1 モデル例１：Stick Process

Stick Process は $m=2$ の場合に、Suzuki らにより [6] で導入され、Feng らにより [1] で一般の $m>1$ に拡張されたモデルである。

2.1.1 設定

（境界条件を単純にするため）周期的な境界条件を持つ d 次元格子空間 $\mathbb{T}_N^d:=\mathbb{Z}^d/(N\mathbb{Z}^d)$ 上の各点にエネルギーを持つ粒子（または正値の長さを持つ stick）が配置された系を考える。この時、系の状態空間は $\chi_N^d:=\mathbb{R}_+^{\mathbb{T}_N^d}=(0,\infty)^{\mathbb{T}_N^d}$ となる。状態空間の元を、$\eta=(\eta_x)_{x\in\mathbb{T}_N^d}\in\chi_N^d$ で表す。η_x は場所 x にある粒子の持つエネルギーを表す。また $m>1$ を固定された定数とする。

2.1.2 時間発展規則

Stick process の時間発展規則は、次のように説明される。

- 位置 x にいる粒子はパラメータ $\frac{2d\eta_x^{m-1}}{m-1}$ の指数分布に従う、独立な時計を持つ
- いずれかの粒子の時計が鳴ると、その隣接点の中から確率 $\frac{1}{2d}$ で一カ所が選ばれる
- 密度関数 $\frac{(m-1)u^{m-2}}{\eta_x^{m-1}}$ を持つ確率分布に従って $0 < u < \eta_x$ をみたす u が選ばれ、その u だけ隣にエネルギーが移動する
- 時計は全てリセットされ、次の（いずれかの粒子の）時計が鳴るのを待つ

より厳密には、Stick process $\eta(t)$ は χ_N^d 上のマルコフ過程で以下の生成作用素 L_N により定まるものとして定義される。

$$(L_N f)(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \sum_{y\in\mathbb{T}_N^d, \|x-y\|=1} \int_0^{\eta_x} u^{m-2}\Big(f(\eta^{u,x,y}) - f(\eta)\Big)$$

ここで、$f : \chi_N^d \to \mathbb{R}$、$\|x-y\| := \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$、

$$\eta_z^{u,x,y} = \begin{cases} \eta_z & \text{if } z \neq x, y, \\ \eta_x - u & \text{if } z = x, \\ \eta_y + u & \text{if } z = y \end{cases}$$

とする。これはいわゆる zero-range process の連続値版の特別な場合と考えられる。

2.1.3 Stick Process に対する流体力学極限

Stick process のエネルギー分布に関するマクロな時間発展方程式を導出するため、経験測度 π_t^N をミクロな系に **diffusive scaling** でスケール変換を施した d 次元トーラス $\mathbb{T}^d = [0,1)^d$ 上のエネルギー分布として次のように定義する:

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N^d} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} \eta_x(N^2 t)\delta_{\frac{x}{N}}(du) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$$

ここで、$\mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$ は $\mathbb{T}^d$ 上の測度の集合とする。

定理 2.1. ([6, 1])
ある可測関数 $\rho_0 : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}_+$ が存在し、

$$\pi_0^N(du) \to \pi_0(du) = \rho_0(u)du \quad N \to \infty \quad \text{in prob}$$

であると仮定する。このとき、任意の時刻 $t > 0$ で,

$$\pi_t^N(du) \to \pi_t(du) = \rho(t,u)du \quad N \to \infty \quad \text{in prob}$$

が成り立つ。ただし、$\rho(t,u)$ は以下の多孔質媒質方程式の（あるクラスでの）一意な弱解とする:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = \Gamma(m)\Delta(\rho(t,u)^m) \\ \quad \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

ここで、in prob は確率収束の意味である。すなわち、初期時刻の経験測度の分布が、ある deterministic な関数を密度とする測度に確率収束していると仮定すると、時間発展したあとの経験測度も、ある deterministic な関数を密度とする測度に確率収束し、さらに、その密度関数は多孔質媒質方程式の解となっている。

すなわち、ミクロスコピックなエネルギーの時間発展が Stick process によって与えられる系の、マクロなエネルギーの時間発展は多孔質媒質方程式に従うことが示された。

2.2 モデル例２：Exclusion process with degenerate rates

Exclusion process with degenerate rates（退化した飛躍率を持つ排他過程）は Gonçalves らにより [5] で導入された相互作用粒子系である。[5] は、離散的な粒子系から、時空間に関するシンプルなスケール極限として（ミクロな系の時間発展規則をスケーリングパラメータに依存させることなく）多孔質媒質方程式を（$m \in \mathbb{N}$ の場合に）導出した画期的な結果である。

2.2.1 設定

d 次元の周期的格子空間 $\mathbb{T}_N^d$ 上を互いに排他的な相互作用をしながら移動する粒子の系を考える。特に $\mathbb{T}_N^d$ の各点 x には、粒子は高々一つしか存在できないものとする。この時、系の状態空間は $\chi_N^d := \{0,1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ となる。このように排他的な相互作用をする粒子の配置により与えられる相互作用粒子系は、総称して排他過程とよばれる。状態空間の元を、$\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbb{T}_N^d} \in \chi_N^d$:で表す。すなわち、$\eta_x$ は、状態 η のときの場所 x の粒子の数を表す。また $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ は固定された定数とする。

2.2.2 時間発展規則

Exclusion process with degenerate rates の時間発展規則は、直観的には次のように説明される。

- 各 $1 \le j \le d$ に対し、$C_m^{+,j}, C_m^{-,j}$ はそれぞれ具体的に与えられた $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の局所関数とする。

- 各粒子はパラメータ $C_m^{+,j}(\tau_x\eta)$ とパラメータ $C_m^{-,j}(\tau_x\eta)$ の指数分布に従う合計 $2d$ 個の時計（待ち時間）をそれぞれ持つ。ただし、全ての時計は独立とし、x はその粒子のいる位置を表すものとする。また $\tau_x\eta$ は η を $-x$ だけシフトした粒子の配置、すなわち $(\tau_x\eta)_y = \eta_{x+y}$ とする。

- x にいる粒子のパラメータ $C_m^{+,j}(\tau_x\eta)$（または $C_m^{-,j}(\tau_x\eta)$）の時計が鳴ると、その粒子は $x+e_j$（または $x-e_j$）に粒子がいなかった場合のみ $x+e_j$（または $x-e_j$）へ移動する。

- 時計は全てリセットされ、次の（いずれかの粒子の）時計が鳴るのを待つ

より厳密には，Exclusion process with degenerate rates $\eta(t)$ は χ_N^d 上のマルコフ過程で以下の生成作用素 L_N により定まるものとして定義される.

$$L_N f(\eta) = \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{j=1}^{d}\Big(C_m^{+,j}(\tau_x\eta)\eta_x(1-\eta_{x+e_j})(f(\eta^{x,x+e_j})-f(\eta)) \\ + C_m^{-,j}(\tau_x\eta)\eta_x(1-\eta_{x-e_j})(f(\eta^{x,x-e_j})-f(\eta))\Big)$$

ここで、$f:\chi_N^d \to \mathbb{R}$、

$$\eta_z^{x,y} = \begin{cases} \eta_z & \text{if } z \neq x,y, \\ \eta_y & \text{if } z = x, \\ \eta_x & \text{if } z = y, \end{cases}$$

とする。

ただし、$C_2^{+,j}(\eta) = \eta_{x-e_j} + \eta_{x+2e_j}$、$C_2^{-,j}(\eta) = \eta_{x+e_j} + \eta_{x-2e_j}$ であり、これらは系が勾配型となるように定められている。$m \ge 3$ でも $C_m^{+,j}, C_m^{-,j}$ は系が勾配型になるように、具体的かつ一意に与えられている [5]。

2.2.3 モデルの非既約性について

このモデルは、一般によく考察される排他過程と異なり、粒子数一定の状態空間の集合

$$\chi_{N,K}^d := \{\eta \in \chi_N^d; \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\eta_x = K\}$$

がマルコフ過程 $\eta(t)$ の既約な集合とはならない。このため、流体力学極限の通常の手法が使えない部分があり、証明に工夫を必要とする。また、この退

化性のために、流体力学極限の仮定として初期分布 ρ_0 が一様に正であることを必要とする。

しかし、このマルコフ過程の非既約性こそがマクロ方程式の退化性の根源であるため、退化放物型方程式を導出するミクロモデルを扱う限り避けられない問題である。

2.2.4 Exclusion process with degenerate rates に対する流体力学極限

粒子の密度分布に関するマクロな時間発展方程式を導出するため、経験測度 π_t^N をミクロな系に **diffusive scaling** でスケール変換を施した d 次元トーラス上の粒子の密度分布として次のように定義する:

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta_x(N^2 t) \delta_{\frac{x}{N}}(du) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$$

定理 2.2. ([5])
ある可測関数 $\rho_0 : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ が存在し、

$$\pi_0^N(du) \to \pi_0(du) = \rho_0(u)du \quad N \to \infty \quad \text{in prob}$$

であると仮定する。また $\rho_0 \in C^{2+\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ かつ $\inf_{u \in \mathbb{T}} \rho_0(u) > 0$ とする．このとき、任意の時刻 $t > 0$ で,

$$\pi_t^N(du) \to \pi_t(du) = \rho(t,u)du \quad N \to \infty \quad \text{in prob}$$

が成り立つ。ただし、$\rho(t,u)$ は以下の多孔質媒質方程式の一意な古典解とする:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = \dfrac{1}{2d} \Delta(\rho(t,u)^m) \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

この定理により、ミクロスコピックな粒子配置の時間発展が Exclusion process with degenerate rates によって与えられる系の、マクロな粒子密度の時間発展は多孔質媒質方程式に従うことが示された。

3 主結果

本節では、筆者による退化放物型方程式の流体力学極限による導出に関する最新の結果を述べる。以下で述べるモデルは Energy exchange model と Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints であり、それぞれ前節で取り上げたモデルの拡張、もしくは一般化となっている。

3.1 Energy exchange model

Energy exchange model は、Stick process の一般化であり、状態空間等の設定は同じである．このモデルは最近、決定論的なハミルトン系からそのメゾスコピックモデルとして形式的に導出されたため、その重要性が注目されている [3, 4]。ここで述べる形式に一般的してモデルを定義したのは、Szasz らである [2]。

3.1.1 時間発展規則

ここでは、まず数学的に厳密な定義を述べる。Energy exchange model $\eta(t)$ は χ_N^d 上のマルコフ過程で以下の生成作用素 $\mathcal{L}_N$ により定まるものとする。

$$\mathcal{L}_N f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{j=1}^{d} \Lambda(\eta_x, \eta_{x+e_j}) \int_0^1 P(\eta_x, \eta_{x+e_j}, d\alpha)[f(T_{x,x+e_j,\alpha}\eta) - f(\eta)]$$

ここで、$\alpha \in [0,1]$ に対し

$$(T_{x,y,\alpha}\eta)_z = \begin{cases} \alpha(\eta_x + \eta_y) & \text{if } z = x \\ (1-\alpha)(\eta_x + \eta_y) & \text{if } z = y \\ \eta_z & \text{if } z \neq x, y \end{cases}$$

とする。ただし、Λ、P はそれぞれ以下のような連続写像としてあらかじめ与えられているものとする。

- $\Lambda : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$: 二つの粒子間でエネルギー交換の起こる割合を与える
- $P(\cdot, \cdot, d\alpha) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathcal{P}([0,1])$: エネルギー交換時のエネルギー分配の割合を与える

なお $\mathcal{P}([0,1])$ は $[0,1]$ 上の確率測度全体の空間とする。

直観的には、任意の隣接するサイト x と y においてエネルギーの交換がパラメータ $\Lambda(\eta_x, \eta_y)$ の指数分布に従って起こり、エネルギー交換後のエネルギーの配分 $\alpha \in [0,1]$ が確率測度 $P(\eta_x, \eta_y, d\alpha)$ に従って選ばれる、というモデルである。このとき、各隣接するサイト (x, y) ごとに与えられる指数分布は独立である。

3.1.2 Mechanical form とその具体例

Energy exchnage model は、Λ と P の定め方により、様々な性質を持つ。特に、一般にハミルトン系に由来するエネルギーモデルは以下の mechanical form で与えられる。

定義 3.1. (Λ, P) の組が mechanical form であるとは Λ と P がそれぞれある関数の組 Λ_{sum} と Λ_{ratio}、$[0,1]$ 上の推移核 $P(\cdot, d\alpha)$ によって次のように与えられることである：

- $\Lambda(E_1, E_2) = \Lambda_{sum}(E_1 + E_2)\ \Lambda_{ratio}(\frac{E_1}{E_1+E_2})$
- $P(E_1, E_2, d\alpha) = P(\frac{E_1}{E_1+E_2}, d\alpha)$

実際に Gaspard らによって得られたモデル (以下、GG-model[3, 4]) は次のように与えられる：

<u>GG-model, 3 次元空間のミクロモデルに由来する系</u>

- $\Lambda_{sum}(s) = s^{1/2}, \quad \Lambda_{ratio}(\beta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6}\frac{\frac{1}{2}+\beta\vee(1-\beta)}{\sqrt{\beta\vee(1-\beta)}}$
- $P(\beta, d\alpha) = \frac{3}{2}\frac{1\wedge\sqrt{\frac{\alpha\wedge(1-\alpha)}{\beta\wedge(1-\beta)}}}{\frac{1}{2}+\beta\vee(1-\beta)}d\alpha$

<u>GG-model, 2 次元空間のミクロモデルに由来する系</u>

- $\Lambda_{sum}(s) = s^{1/2}, \quad \Lambda_{ratio}(\beta) = \sqrt{\frac{8(\beta\vee(1-\beta))}{\pi^3}}\big(2E(\beta^*) - (1-\beta^*)K(\beta^*)\big)$
- $P(\beta, d\alpha) = \frac{\tilde{P}(\beta,\alpha)}{\Lambda_{ratio}(\beta)}d\alpha$

ただし、E と K はそれぞれ第二種、第一種完全楕円積分、$\beta^* = \frac{\beta}{1-\beta} \wedge \frac{1-\beta}{\beta}$、

$$\tilde{P}(\beta, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \times \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{1-\beta}}K(\sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}}) & \text{if } 0 \le \alpha \le (\beta \wedge (1-\beta)) \\ \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}K(\sqrt{\frac{\beta}{1-\alpha}}) & \text{if } \beta \le \alpha \le (1-\beta) \\ \sqrt{\frac{1}{\alpha}}K(\sqrt{\frac{1-\beta}{\alpha}}) & \text{if } (1-\beta) \le \alpha \le \beta \\ \sqrt{\frac{1}{\beta}}K(\sqrt{\frac{1-\alpha}{\beta}}) & \text{if } (\beta \vee (1-\beta)) \le \alpha \le 1, \end{cases}$$

である。

3.1.3 Energy exchange model の流体力学極限に関する考察

一般の Energy exchange model に対しては、流体力学極限の証明は非常に難しい。その直接的な理由として、不変測度が明らかではないこと、系が非勾配型になることがある。加えて、GG model のように Λ が一様に正ではないと退化性の問題もある。

一方、GG-model の場合に限って考えると、直積ガンマ分布を平衡測度として持つことがわかる。しかし系はやはり非勾配型なので、流体力学極限の証明の第一歩として Spectral gap の評価が必要になる。この際、$\Lambda_{sum}(s) = \sqrt{s}$ であることから、Spectral gap が格子のサイズを固定しても、一様に正数で下から評価することはできないことがわかる。そのような性質を持つ連続値モデルの Spectral gap の評価は、これまであまり知られていなかったが、今回この問題について、流体力学極限の証明に十分な評価を与えることができた。

3.1.4 Energy exchange model に対する Spectral gap の評価

まず、Spectral gap を定義する。Energy exchange model はエネルギーの和を保存するので、状態空間

$$\mathcal{S}_{e,N} := \{\eta \in \chi_N^d \ ; \ \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta_x = e\}$$

における Spectral gap を考える。以後、$\eta(t)$ の平衡測度 $\pi_{e,N}$ が各 $\mathcal{S}_{e,N}$ 上に存在すると仮定する。

定義 3.2. $f : \chi_N^d \to \mathbb{R}$ に対し、Dirichlet form を

$$\mathcal{D}_{e,N}(f) := \int \pi_{e,N}(dx)[-L_N f](x) f(x)$$

と定める。

このとき、$-\mathcal{L}_N|_{\mathcal{S}_{e,N}}$ の Spectral gap は

$$\lambda(e,N) := \inf_f \left\{ \frac{\mathcal{D}_{e,N}(f)}{E_{\pi_{e,N}[f^2]}} \middle| E_{\pi_{e,N}}[f] = 0,\ f \in L^2(\pi_{e,N}) \right\}$$

で与えられる。

特に、$\bar{\lambda}(e,2)$ を $d=1$ とした場合の $\lambda(e,2)$ を表すものとする。

定理 3.3. ([8])
Λ, P で与えられる Energy exchange model $\eta(t)$ は直積ガンマ分布を平衡測度として持つとする。また、ある $C > 0$ と $p \geq 0$ が存在し,

$$\bar{\lambda}(e,2) \geq Ce^p$$

を満たしていると仮定する。

このとき、ある $C' = C'(C,p,\gamma,d) > 0$ が存在し、任意の $N \in \mathbb{N}$、$e > 0$ に対し、

$$\lambda(e,N) \geq C' \frac{e^p}{N^2}$$

を満たす。ただし、γ は平衡測度であるガンマ分布のパラメータを表す。

3.1.5 形式的な流体力学極限方程式の導出

Energy exchange model に対する流体力学極限の厳密な証明には、Spectral gap の評価以外にもいくつものステップが必要であり、まだ技術的な困難が多数残されている。

一方で、Λ, P がいくつかの条件を満たす場合には、その流体力学極限方程式の形式的な導出は容易であることがわかった。特に非勾配型モデルに対し、

極限方程式が明示的に得られることは非常に稀であり、このモデルの特徴的な性質である。

具体的には、以下の条件を仮定する：

- (Λ, P) は mechanical form である
- (Λ, P) で与えられる Energy exchange model $\eta(t)$ は直積ガンマ分布を平衡測度として持つ
- ある $p \geq 0$ が存在し、$\Lambda_{sum}(s) = s^p$ とする

このとき、(Λ, P) で与えられる Energy exchange model $\eta(t)$ の、マクロなエネルギーの時間発展は多孔質媒質方程式

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = C\Delta(\rho(t,u)^{p+1}) \\ \quad \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

に従うことが形式的に示される。ただし、C は正の定数である。

なお導出の方法は、極限方程式の拡散係数を与える変分公式（または Green-Kubo 公式）のスケール則による、非常に単純なものである。

3.2 Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints

Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints は、Exclusion process with degenerate rates を排他的な相互作用のない場合に拡張したものである。この拡張により、多孔質媒質方程式以外の退化放物型方程式を流体力学極限により導出することが可能となった。

3.2.1 設定

d 次元の周期的格子空間 $\mathbb{T}_N^d$ 上を互いに排他的な相互作用をしながら移動する粒子の系を考える。ただし粒子間に排他的な相互作用はないものとする。この時、系の状態空間は $\chi_N^d := \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathbb{T}_N^d}$ となる。状態空間の元を、$\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbb{T}_N^d} \in \chi_N^d$: で表す。すなわち、$\eta_x$ は、状態 η のときの場所 x の粒子の数を表す。また $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ は固定された定数とする。

3.2.2 時間発展規則

ここでは、まず数学的に厳密な定義を述べる。Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints $\eta(t)$ は χ_N^d 上のマルコフ過程で

以下の生成作用素 $\mathcal{L}_N$ により定まるものとする。

$$L_N f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \sum_{j=1}^{d} \Big(D_m^{+,j}(\tau_x \eta) g(\eta_x)(f(\eta^{x,x+e_j}) - f(\eta)) \\ + D_m^{-,j}(\tau_x \eta) g(\eta_x)(f(\eta^{x,x-e_j}) - f(\eta)) \Big)$$

ここで、$f : \chi_N^d \to \mathbb{R}$、

$$\eta_z^{x,y} = \begin{cases} \eta_z & \text{if } z \neq x, y, \\ \eta_x - 1 & \text{if } z = x, \\ \eta_y + 1 & \text{if } z = y, \end{cases}$$

ただし、$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, g(0) = 0$ とし、g はいくつかの仮定を満たすものとする（[7]）。また、各 $1 \leq j \leq d$ に対し、$D_m^{+,j}, D_m^{-,j}$ はそれぞれ具体的に与えられた $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の局所関数とする。特に $D_2^{+,j}(\eta) = g(\eta_{x-e_j}) + g(\eta_{x+2e_j})$、$D_2^{-,j}(\eta) = g(\eta_{x+e_j}) + g(\eta_{x-2e_j})$ であり、これらは系が勾配型となるように定められている。$m \geq 3$ でも $D_m^{+,j}, D_m^{-,j}$ は系が勾配型になるように、具体的かつ一意に与えられている [7]。

直観的には、Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints の時間発展規則は次のように説明される：

- 各サイト $x \in \mathbb{T}_N^d$ に、パラメータ $D_m^{+,j}(\tau_x \eta) g(\eta_x)$ とパラメータ $D_m^{-,j}(\tau_x \eta) g(\eta_x)$ の指数分布に従う合計 $2d$ 個の時計（待ち時間）がそれぞれ用意されている。ただし、全ての時計は独立とする。
- サイト x のパラメータ $D_m^{+,j}(\tau_x \eta) g(\eta_x)$（または $D_m^{-,j}(\tau_x \eta) g(\eta_x)$）の時計が鳴ると、$x$ にいる粒子のうち 1 つが $x + e_j$（または $x - e_j$）に移動する。
- 時計は全てリセットされ、次の（いずれかのサイトの）時計が鳴るのを待つ

3.2.3 Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints に対する流体力学極限

粒子の密度分布に関するマクロな時間発展方程式を導出するため、経験測度 π_t^N をミクロな系に **diffusive scaling** でスケール変換を施した d 次元トーラス上の粒子の密度分布として次のように定義する:

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta_x(N^2 t) \delta_{\frac{x}{N}}(du) \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^d)$$

定理 3.4. ([7])
ある可測関数 $\rho_0 : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ が存在し、

$$\pi_0^N(du) \to \pi_0(du) = \rho_0(u)du \quad N \to \infty \quad \text{in prob}$$

であると仮定する。また $\rho_0 \in C^{2+\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ かつ $\inf_{u \in \mathbb{T}} \rho_0(u) > 0$ とする．このとき、任意の時刻 $t > 0$ で,

$$\pi_t^N(du) \to \pi_t(du) = \rho(t,u)du \quad N \to \infty \quad \text{in prob}$$

が成り立つ。ただし、$\rho(t,u)$ は以下の退化放物型方程式の一意解とする:

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = \dfrac{1}{2d}\Delta(\Phi(\rho(t,u))^m) \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

Φ は g から定まる滑らかな具体的な関数で、$\Phi(0) = 0$ を満たす。

この定理により、ミクロスコピックな粒子配置の時間発展が Exclusion process with degenerate rates without exclusive constraints によって与えられる系の、マクロな粒子密度の時間発展は退化放物型方程式に従うことが示された。

4 今後の展望と課題

多孔質媒質方程式に代表される退化放物型方程式の流体力学極限による導出に関する研究の今後の展望について述べる。既に述べてきたように、流体力学極限による導出そのものの結果がまだ非常に少なく、より一般的なモデルからの導出が期待される。その他に、以下のような課題がある：

- 自由境界の時間発展に関するミクロからマクロの導出
- 流体力学極限に付随する中心極限定理（揺動定理)、大偏差原理

特に、一点目の自由境界に関する問題は重要である。現在のところ、二つの粒子系モデルに関する結果ではどちらの場合にも、初期分布 ρ_0 が一様に正である、という仮定が置かれている。この仮定は今与えられている証明において本質的であるが、この仮定の下では、「有限伝搬性」という退化放物型方程式の特徴的な性質が見られる場合を含んでおらず、従って解が自由境界を持つ場合を扱えていない。この点を改善し、結果をより一般的な初期分布に対して拡張する事が、まずは最も重要な課題である。

参考文献

[1] S. Feng, I. Iscoe and T. Seppäläinen, *A microscopic mechanism for the porous medium equation*, Stoch. Proc. Appl., **66** (1997), 147–182.

[2] A. Grigo, K. Khanin, D. Szasz, *Mixing rates of particle systems with energy exchange*, Nonlinearity, **25** (2012), 2349.

[3] P. Gaspard and T. Gilbert, *On the derivation of Fourier's law in stochastic energy exchange systems*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2008), p11021.

[4] P. Gaspard and T. Gilbert, *Heat transport in stochastic energy exchange models of locally confined hard spheres*, J. Stat. Mech.: Theory and Experiment, (2009), p08020.

[5] P. Gonçalves, C. Landim and C. Toninelli, *Hydrodynamic limit for a particle system with degenerate rates*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probab. Statis., **45** (2009), 887–909.

[6] Y. Suzuki, K. Uchiyama, *Hydrodynamic limit for a spin system on a multidimensional lattice*, Probab. theory relat. fields.m **95** (1993), 47–74.

[7] M. Sasada, *Hydrodynamic limit for particle systems with degenerate rates without exclusive constraints*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., **7** (2010), 277–292.

[8] M. Sasada, *Spectral gap for stochastic energy exchange models with degenerate rate functions*, preprint