数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 218-221

自由確率論における非減少レヴィ過程の分布について

佐久間紀佳
愛知教育大学　数学教育講座
Noriyoshi Sakuma
Department of Mathematics, Aichi University of Education

自由確率論における非減少レヴィ過程 (subordinator) の分布の性質について報告する. 以下すべて分布は 1 次元のものを考える. $\mathcal{P}_+$ で $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度全体の集合とする.

確率論において非減少レヴィ過程 (subordinator) の分布の性質については次のことが知られている. 詳細については Sato[5] や Steutel and van Harn[6] を参照してほしい.

命題 1. (1) 非減少レヴィ過程 $(X_t)_{t\geqq 0}$ の分布族を $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ とする. レヴィ-ヒンチン表現が次の形である: $\eta'\geqq 0$ と $\nu((-\infty,0]))=0$ かつ $\int_{(0,\infty)}\min(1,x)\nu(dx)<\infty$ をみたす $\mathbb{R}$ 上の測度 ν が存在し

$$C^*_{\mu_t}(z):=\log\left(\int_{\mathbb{R}}e^{izx}\mu_t(dx)\right)=it\eta' z+t\int_{(0,\infty)}(e^{izx}-1)\nu(dx)$$

である

(2) 任意の $t\geqq 0$ に対して, $\mathrm{supp}(X_t)\subset[0,\infty)$

(3) $\inf(\mathrm{supp}(X_1))=b$ ならば $\inf(\mathrm{supp}(X_t))=bt$

(4) 二つの独立な非減少レヴィ過程 $(X_t)_{t\geqq 0}$ $(Y_t)_{t\geqq 0}$ の積は $(Z_t=X_tY_t)_{t\geqq 0}$ は必ずしもレヴィ過程にならない

この命題の (2) は非減少レヴィ過程の保存的な性質「分布が非負の領域に集中している」ということである. 他方, (4) は保存的でない性質, 確率過程の積というものを考えたときにその分布の無限分解可能性は保存されない, というものである. このような非減少レヴィ過程の分布の性質をみながら自由確率論におけるその対応物をドイツ Saarlandes 大学 Octavio Arizmendi 氏, 京都大学の長谷部高広氏と考察した [1].

自由確率論について簡潔にどういうものかだけ述べておく. 詳しくは [4] と [3] とその文献リストを参考にしてほしい. 通常の測度論に基づく確率論における「独立性」の概念を変形して確率変数が「確率変数の積」について非可換な場合の自然な独立性の一つとして「自由独立性」というものが Voiculescu により提唱された. その独立性の元での畳み込みなどの基本的な確率論の概念が整備された. それぞれ確率分布 μ, ν に従う自由独立な確率変数の和の分布を $\mu \boxplus \nu$ と表し, 同様に自由独立な確率変数の積の分布を $\mu \boxtimes \nu$ と表す. これらはランダム行列の解析に応用されている.

無限分解可能性の概念は $\boxplus$ の概念を用いて自由確率論でも同様に考えられている. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある確率分布 μ_n が存在して次が成立するとき μ は自由無限分解可能分布という:

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \cdots \boxplus \mu_n}_{n\text{ 個}}$$

確率分布 μ が自由無限分解可能ならば確率論のときと同様 $\mu^{\boxplus t}$ が任意の $t \geqq 0$ に対して定義される.

確率論のときと同様に自由無限分解可能分布に対して, レヴィ-ヒンチン表現が知られている. 自由確率論においては特性関数（フーリエ変換）を用いる代わりに R-変換と呼ばれる変換が用いられる. 確率分布 μ の R-変換とは次で定義される:

$$R_\mu = zG_\mu^{(-1)}(z) - 1$$

ここで $G_\mu^{(-1)}(z)$ は確率分布 μ のコーシー変換 $G_\mu(z) = \int \frac{\mu(dx)}{z-x}$ $(z \in \mathbb{C}^+)$ の合成についての右逆元とする. μ が自由無限分解可能分布であるとき $a \geqq 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ とレヴィ測度 ν（すなわち $\nu(\{0\}) = 0$ と $\int \min(1, x^2)\nu(dx) < \infty$ をみたす $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上の測度）が存在して次を満たす:

$$R_\mu(z) = az^2 + \eta z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1 - xz\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx), \quad z \in \mathbb{C}^-. \tag{1}$$

また逆に, 確率分布 μ の R 変換が上の表現を持てば μ は自由無限分解可能である.

この表現は確率論における無限分解可能分布のレヴィ-ヒンチン表現に対応している. μ が無限分解可能であれば $a \geqq 0, \eta \in \mathbb{R}$ とレヴィ測度 ν が存在して次を満たす:

$$C_\mu^*(z) := \log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{izx}\mu(dx) \right) = -\frac{az^2}{2} + i\eta z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx\mathbb{1}_{[-1,1]} \right) \nu(dx)$$

したがって無限分解可能の研究の中でこれらの無限分解可能分布, 自由無限分解可能分布を特徴付ける (a, ν, η) が同じもの同士を対応させる写像 Bercovici-Pata 写像 $\Lambda : I^* \to I^{\boxplus}$ が提唱された. ここで $I^*, I^{\boxplus}$ は無限分解可能分布全体の集合および自由無限分解可能分布全体の集合とする.

ここで非減少レヴィ過程の自由確率論における対応物をBercovici-Pata写像により定義する.

自由非減少レヴィ過程 (free subordinator)

分布族 $(\rho_t)_{t\geqq 0}$ に対して, ある分布族が $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ をもつ非減少レヴィ過程 $(X_t)_{t\geqq 0}$ が存在して, $(\rho_t = \Lambda(\mu_t))_{t\geqq 0}$ であるとき, この $(\rho_t)_{t\geqq 0}$ から構成される自由レヴィ過程を自由減少レヴィ過程 (free subordinator) と呼ぶことにする. $I_{r+}^{\boxplus}$ を自由非減少レヴィ過程の分布全体の集合とし, 自由正則無限分解可能分布のクラスと呼ぶ.

I_{r+}^{*} を減少レヴィ過程の分布全体の集合とする. $I_{r+}^{*} = I^{*} \cap \mathcal{P}_{+}$ であることに気をつけよ.

結論

自由非減少レヴィ過程の分布の性質を解説する. Bercovici-Pata写像の定義より自由非減少レヴィ過程の分布のレヴィ-ヒンチン表現は類似の形で成り立つ. また時間発展の元で「分布が非負の領域に集中している」ということも成立する. ところが分布の台の下限は確率論の場合のときのように単純に変化しない. そのためか, 「分布が非負の領域に集中している無限分解可能分布を時刻1の分布として構成されるレヴィ過程は必ず非減少レヴィ過程である」ということがいえなくなる. そして確率過程の積の分布の無限分解可能性については確率論のときより強い事実が成立する.

定理 2. $\mu, \nu \in I_{r+}^{\boxplus}, \sigma \in I^{\boxplus}$ とする. このとき以下が成立する.

(1) $\mu \boxtimes \nu \in I_{r+}^{\boxplus}$.

(2) $\mu^{\boxtimes t} \in I_{r+}^{\boxplus}$ が $t \geqq 1$ のとき成立.

(3) $\mu^{\uplus t} \in I_{r+}^{\boxplus}$ が $0 \leqq t \leqq 1$ のとき成立.

(4) $\mu \boxtimes \sigma \in I^{\boxplus}$.

ここで $\uplus$ はBoolean畳み込みと呼ばれる非可換確率論における別の独立性の元での畳み込みである.

複合自由ポアソン分布

複合測度 ν, パラメータ $\lambda > 0$ の複合自由ポアソン分布 $\pi_{\lambda,\nu}$ は

$$\mu_n = \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\delta_0 + \frac{\lambda}{n}\nu\right)^{\boxplus n}$$

の極限分布として定義される.

定理 3. μ を対称な確率分布, m を次の密度をもつ自由ポアソン分布とする: $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4-x}{x}}$.

(1) $\mu \in I^{\boxplus}$ ならばある $\sigma \in I^{\boxplus}_{r+}$ が存在して $\mu^2 = \mathrm{m} \boxtimes \sigma$. とくに, $\mu^2 \in I^{\boxplus}_{r+}$. 逆に, $\sigma \in I^{\boxplus}_{r+}$ ならば $\mathrm{Sym}\left((m \boxtimes \sigma)^{1/2}\right) \in I^{\boxplus}$. ここで, $\mathrm{Sym}(\nu)$ は $\nu \in \mathcal{P}_+$ の対称化である: $\mathrm{Sym}(\nu)(dx) := \frac{1}{2}\left(\nu(dx) + \nu(-dx)\right)$.

(2) μ がパラメータ λ をもつ複合自由ポアソン分布で複合測度として ν をもつならば, (1) の σ もまたパラメータ λ をもつ複合自由ポアソン分布で複合測度として ν^2 をもつ.

この定理と正規分布が自由無限分解可能であるということ [2] やコーシー分布が自由無限分解可能であることから χ^2-分布や $F(1,1)$-分布が自由無限分解可能であることが従う.

References

[1] O. Arizmendi, T. Hasebe, and N. Sakuma. On the law of free subordinators. *Preprint*, 2013.

[2] S. T. Belinschi, M. Bożejko, F. Lehner, and R. Speicher. The normal distribution is ⊞-infinitely divisible. *Adv. Math.*, 226(4):3677–3698, 2011.

[3] H. Bercovici and D. V. Voiculescu. Free convolution of measures with unbounded support. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3):733–773, 1993.

[4] A. Nica and R. Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, volume 335 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[5] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.

[6] F. W. Steutel and K. van Harn. *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, volume 259 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2004.