数理解析研究所講究録
第1855巻2013年209-217

整数論を用いた多重級数と多次元離散型確率分布の関係について

東京理科大学・理工学部　青山　崇洋, 中村　隆
Takahiro Aoyama and Takashi Nakamura
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

概要

一般にある多変数関数 f が与えられた際, それが特性関数と成るか否かについて判定することは困難である. その方法としては測度の半正値性を確認する為の Bochner の定理等いくつか存在するが, 実際には対応する測度が確率分布となることがほぼ自明な関数しか取り扱われていない. 特に多次元の離散分布に対応する関数については, ただ単に分布を定義する, もしくはその非無限分解可能性までを示した結果はいくつか存在するが, それ以外の有用な情報は殆ど得られていない. そこで我々は, 今日多大な発展を見せる多重ゼータ関数を用いて, 無限個の点に重みを持ちかつ無限分解可能性をも備える多次元離散型確率分布を導入することに着目した. 我々の課題は多重無限級数と高次元積分論の関係を深く知ることで, これまで初等的にしか数式で描くことができなかった高次元の現象を取り扱える関数と理論の幅を広げることを目的としている. 本解説は「解析的整数論とその周辺 -近似と漸近的手法を通して見た数論-」に寄稿した "Multidimensional zeta distributions and infinite divisibility" と同時に執筆した. 整数論は本文, 確率論の基礎的事項についてはそちらにおいて簡単に触れているので, 双方に重複する箇所も含まれるが, 興味のある読者は必要に応じて2編併せて読んで頂きたい.

1　ゼータ関数の基礎的事項

まず Euler 積を持つゼータ関数について述べる. Riemann ゼータ関数については松本 [9], Dedekind ゼータ関数については河田 [5], などを参照して頂きたい.

1.1　ゼータ関数

Riemann ゼータ関数は以下の級数又は Euler 積で定義される.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1-p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s=\sigma+it, \quad \sigma>1.$$

ただし $\prod_p$ は素数全体にわたる積とする. Euler 積表示から Riemann ゼータ関数は $1 < \sigma := \Re(s)$ で零点を持たない. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続されるが, 本論説では絶対収束領域 $1<\sigma$ のみを扱う.

次にDirichlet指標とDirichlet L関数を定義する．Nを自然数とし，環$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$の可逆元全体の乗法群$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$から0でない複素数全体の乗法群$\mathbb{C}^\times$への群準同型$\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$を mod N の Dirichlet 指標と呼ぶ．ただし$\chi(n)$は，nとNが互いに素であるときは$\chi(n \bmod N)$を表すが，nとNが互いに素でないときは0を表す．各Nに対して主指標χ_0は，$\chi_0(n) = 1$, $(n,N) = 1$, $\chi_0(n) = 0$, $(n,N) \neq 1$で定義される．N_1をNと異なるNの約数とし，χ_1を mod N_1 の Dirichlet 指標とする．このとき，合成写像$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$は一つの mod N の Dirichlet 指標を定義する．ここで一つ目の矢印は mod N_1 で考えることを意味する．このときχはχ_1により誘導されるといい，そのようにして得られるχは非原始的であるという．そうでないDirichlet指標は原始的であると呼ばれる．このときDirichlet L関数は以下の級数又はEuler積で定義される．

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1.$$

$N = 1$である場合がRiemannゼータ関数と見なされる．Euler積表示からDirichlet L関数も$1 < \sigma$で零点を持たない．Dirichlet L関数も全s平面の有理型関数に解析接続されることが知られている．Dirichletは初項と公差が互いに素であるような等差数列には無限に素数が含まれること(算術級数定理)を証明するために，この関数を導入した(ただしDirichletはsは複素数とせず実数としていた)．

Riemannゼータ関数，Dirichlet L関数はともに素数のEuler積により定義されている．この素数を素イデアルに拡張するという自然な考えから定義されたのがDedekindゼータ関数である．Kを代数体(有理数体の有限次代数拡大体)とする．Dedekindゼータ関数は以下の級数又はEuler積で定義される．

$$\zeta(s) := \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \big(1 - \mathfrak{p}^{-s}\big)^{-1}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \tag{1.1}$$

ただし，$N\mathfrak{a}$は整イデアル$\mathfrak{a}$のノルムであり，和はKの整イデアル全てを動き，積はKの素イデアル全てを動くものとする．級数表示，Euler積表示ともに$1 < \sigma$で絶対収束するので，やはり$1 < \sigma$で零点を持たない．Dedekindゼータ関数のEuler積表示により，素イデアルのノルムの値からDedekindゼータ関数を具体的に計算することができる．例えばKが二次体である場合，Kの判別式をDとし，χ_Dを法Dに関するクロネッカー指標とすると，$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(\chi_D, s)$が成り立つ($K = \mathbb{Q}(\mathrm{i})$である場合は§3.3も参照)．$K$が円分体である場合，$K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $\zeta_m := e^{2\pi \mathrm{i}/m}$, $m \geq 3$とするとき，$\zeta_K(s) = \prod_\chi L(\chi, s)$が成立する．ただし，積は法$m$に関する原始的Dirichlet指標全てにわたる積とする．

これまではRiemannゼータ関数のEuler積からゼータ関数の拡張を紹介していたが，次に級数表示によるゼータ関数の拡張について述べる．Hurwitzゼータ関数を以下の級数で定義する．

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, \qquad \Re(s) > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

この級数も $1<\sigma$ で絶対収束する．さらに $\zeta(s,\alpha)$ も全 s 平面の有理型関数に解析接続されることが知られている．$\zeta(s,1/2)=(2^s-1)\zeta(s)$ であるので $\zeta(s,1/2)$ は本質的に Riemann ゼータ関数である．これまでは Riemann ゼータ関数と同じ性質を持つのであるが，零点に関しては全く事情が異なる．$\alpha\neq 1,1/2$ とする．このとき $1<\sigma<1+\alpha$ において Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ は無限個の零点を持つ．これは $\alpha\neq 1/2,1$ が超越数または有理数であるときは Davenport と Heilbronn，α が代数的無理数であるときは Cassels により証明された ([8] 参照)．この事実は Hurwitz ゼータが無限分解可能でないことの証明に用いられることを注意しておく．

ここで Hurwitz ゼータ関数と関連する関数について述べる．Bernoulli 多項式 $B_m(x)$ に対し，$B_m(x)=-m\zeta(1-m,x)$, $m\in\mathbb{N}$, $0<x\leq 1$ という関係が知られている．さらにガンマ関数 $\Gamma(x)$ に対し，$(\partial/\partial s)\zeta(0,x)=\log(\Gamma(x)/\sqrt{2\pi})$, $0<x$ という Lerch の公式も有名である．q,r は自然数であり，$(q,r)=1$, $q\geq 3$，χ を mod q の原始的 Dirichlet 指標, φ を Euler 関数であるとする．Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,r/q)$ と Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ の間には次のような関係がある．

$$L(s,\chi)=\sum_{r=1}^{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi(r+nq)}{(r+nq)^s}=\sum_{r=1}^{q}\chi(r)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(r+nq)^s}=q^{-s}\sum_{r=1}^{q}\chi(r)\zeta(s,r/q),$$

$$\zeta(s,r/q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+r/q)^s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^s}{(r+qn)^s}=\frac{q^s}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(r)}L(s,\chi).$$

最後に級数により定義される多重ゼータ関数として Barnes 多重ゼータ関数を紹介する (松本 [10] などを参照)．s を複素変数，$\alpha,\omega_1,\ldots,\omega_r$ を適当な条件を充たす複素パラメーターとする．このとき Barnes 多重ゼータ関数は以下の級数で定義される．

$$\zeta_{B,r}(s;\alpha,(\omega_1,\ldots,\omega_r))=\sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+\omega_1n_1+\cdots+\omega_rn_r)^s},\qquad \Re(s)>r. \tag{1.2}$$

$r=\omega_1=1$ であるときは Hurwitz ゼータ関数になる．Barnes はこのゼータ関数により多重ガンマ関数を定義し，その性質を調べた．Hecke L 関数 (Dedekind ゼータ関数に Dirichlet 指標の拡張されたものが付けられた関数) の特殊値が多重ガンマ関数を用いて書けることが現在では知られている．

2 ℝ 上のゼータ分布

絶対収束領域 $\sigma>1$ において, Riemann ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている．

定義 2.1. *$n\in\mathbb{N}$, $\sigma>1$ に対して, 確率変数 X_σ が以下の分布に従うとき Riemann ゼータ確率変数, その分布を Riemann ゼータ分布という．*

$$\mathrm{P}_{X_\sigma}(\{-\log n\})=\frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

また, その特性関数 $f_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ は以下の様にゼータ関数を正規化した形で与えられる.

$$f_\sigma(t) = \mathrm{E}e^{\mathrm{i}tX_\sigma} = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\mathrm{P}_{X_\sigma}(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mathrm{i}t\log n}\frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)}.$$

この Riemann ゼータ分布は最も古い文献として Khinchine [6] に記されている. Gnedenko and Kolmogorov [4] には以下の命題がある.

命題 2.2. *$\mathbb{R}$ 上の Riemann ゼータ分布は複合ポアソンであり, その Lévy 測度 N_σ は有限かつ次のように書ける.*

$$N_\sigma(dx) = \sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} p^{-r\sigma} \delta_{r\log p}(dx). \tag{2.1}$$

Lin and Hu [7] は Riemann ゼータ関数の代わりに Dirichlet 級数 $D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} c(n)n^{-s}$, ただし $c(n)$ は非負で恒等的に 0 ではない, を考えた. さらに $c(n)$ が完全乗法的, 即ち任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $c(mn) = c(m)c(n)$ であるとき, $g_\sigma(t) := D(\sigma+\mathrm{i}t)/D(\sigma)$ は無限分解可能な特性関数になることを示し, その Lévy 測度も具体的に求めた. これらが我々の研究以前の無限分解可能なゼータ分布に関する結果である.

3 多次元ゼータ分布

我々の目的は, Gnedenko and Kolmogorov [4], Lin and Hu [7] において 1 次元でのみ取り扱われてきたゼータ分布を多次元に拡張し, 無限個の点に重みを持つ多次元離散型かつ確率過程論に応用可能な分布のクラスを導入することにある. 即ち Dedekind ゼータ関数 (1.1) のような多重の Euler 積を多次元化 (多変数化) し, まずそれらを正規化した関数が導入し得る $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布のクラスについて考え, さらに無限分解可能性について議論することである. 証明の概略は講究録 "Multidimensional zeta distributions and infinite divisibility" に書いた. 本論説では具体例を挙げる.

3.1 多次元 Euler 積

定義 3.1. *$d, m \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $-1 \le \alpha_{lp} \le 1$, $\vec{a}_l \in \mathbb{R}^d$, $1 \le l \le m$ に対し, 多次元 Euler 積 $Z_E(\vec{s})$ を次の無限積で定義する.*

$$Z_E(\vec{s}) = \prod_p \prod_{l=1}^{m} \left(1 - \alpha_{lp} p^{-\langle \vec{a}_l, \vec{s}\rangle}\right)^{-1}, \qquad \min_{1\le l\le m} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s}\rangle > 1. \tag{3.1}$$

この無限積が $\min_{1\le l\le m} \Re\langle \vec{a}_l, \vec{s}\rangle > 1$ において絶対収束することは, 不等式 $\sum_p p^{-\sigma} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} < \infty$, $\sigma > 1$ と $1 + \sum_p p^{-\sigma} \le \prod_p (1 + p^{-\sigma}) \le \exp(\sum_p p^{-\sigma})$ からわかる. 上記のような Euler 積で 1 次元のものは数論において広く扱われ, 例えば Steuding [11] にある. いくつか簡単な例を挙げる.

(i) $d=m=1$, $a=1$, $\alpha(p)=-1$ であるとき,

$$Z_E(s_1)=\prod_p\frac{1}{1+p^{-s_1}}=\prod_p\frac{1-p^{-s_1}}{1-p^{-2s_1}}=\frac{\zeta(2s_1)}{\zeta(s_1)}.$$

(ii) $d=m=1$, $a=2$, $\alpha(p)=1$ であるとき, 又は $d=1$, $m=2$, $a_1=a_2=1$, $\alpha_1(p)=-\alpha_2(p)=1$ であるとき,

$$Z_E(s_1)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-2s_1}}=\zeta(2s_1)=\prod_p\frac{1}{(1-p^{-s_1})(1+p^{-s_1})}.$$

(iii) $d=m=2$, $\vec{a}_1=(1,0)$, $\vec{a}_2=(1,1)$, $\alpha_l(p)=1$, $l=1,2$ であるとき,

$$Z_E(\vec{s})=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s_1}}\frac{1}{1-p^{-(s_1+s_2)}}=\zeta(s_1)\zeta(s_1+s_2).$$

(iv) $d=m=2$, $\vec{a}_1=(1,0)$, $\vec{a}_2=(1,2)$, $\alpha_1(p)=1$, $\alpha_2(p)=\chi(p)$, ただし $\chi(p)$ は実 Dirichlet 指標であるとき,

$$Z_E(\vec{s})=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s_1}}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-(s_1+2s_2)}}=\zeta(s_1)L(s_1+2s_2,\chi).$$

3.2 多次元多重ゼータ分布

以下, $\vec{s}:=\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t}$, $\vec{\sigma},\vec{t}\in\mathbb{R}^d$ に対し, $f_{\vec{\sigma}}(\vec{t})$ を次のように定義する.

$$f_{\vec{\sigma}}\left(\vec{t}\right):=\frac{Z_E\left(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t}\right)}{Z_E(\vec{\sigma})}.$$

このように Z_E を正規化した関数が1次元の Riemann ゼータ分布の拡張として多次元の分布に対応する無限分解可能な特性関数であればよいが, 実際には常に無限分解可能, さらには特性関数となるわけではない. そこでいつ特性関数になるのか, またいつ複合ポアソン (無限分解可能) となるのかについて判定する必要がある.

以下, $\vec{a}\in\mathbb{R}^d$ に対し, $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m\in\mathbb{R}^d$ が (LR) を充たすとは, $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m\in\mathbb{R}^d$ が線形従属であるが, $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数 ψ_l $(1\le l\le m)$ が存在し, $\vec{a}_l=\psi_l\vec{a}$ と書けることとする. また, $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m\in\mathbb{R}^d$ が線形独立であるとき, (LI) と書くことにする. ただし, 実数 $\theta_1,\ldots,\theta_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとは, $\sum_{k=1}^n c_k\theta_k=0$, $c_k\in\mathbb{Q}$ なるのは $c_1=\cdots=c_n=0$ に限られるということである.

定理を述べるために以下の多次元 Euler 積を用意する.

定義 3.2 (η 重 φ 階 Euler 積, $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$, [2]). $d,\varphi,\eta\in\mathbb{N}$, $\vec{s}\in\mathbb{C}^d$ とする. ここで $-1\le\alpha_{lk}(p)\le 1$, $\vec{a}_l\in\mathbb{R}^d$, $1\le l\le\varphi$, $1\le k\le\eta$ に対し, d 次元 η 重 φ 階 *Euler* 積 $Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s})$ を以下の無限積で定義する.

$$Z_E^{\eta,\varphi}(\vec{s}):=\prod_p\prod_{l=1}^{\varphi}\prod_{k=1}^{\eta}\left(1-\alpha_{lk}(p)p^{-\langle\vec{a}_l,\vec{s}\rangle}\right)^{-1},\qquad \min_{1\le l\le\varphi}\Re\langle\vec{a}_l,\vec{s}\rangle>1. \tag{3.2}$$

このとき, 次を得る.

定理 3.3 ([2]). (3.2) において $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\varphi$ が *(LI)* または *(LR)*, $\alpha_{lk}(p) = 0, \pm 1$ を充たすとする. このとき $f_{\vec{\sigma}}$ が特性関数となる必要充分条件は, 任意の $1 \le l \le \varphi$, 素数 p に対し, $\sum_{k=1}^{\eta} \alpha_{lk}(p) \ge 0$. さらにこのとき $f_{\vec{\sigma}}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の複合ポアソンとなり, その *Lévy* 測度 $N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}$ は有限かつ次のように書ける.

$$N_{\vec{\sigma}}^{\eta,\varphi}(dx) = \sum_{p} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\varphi} \sum_{k=1}^{\eta} \frac{1}{r} \alpha_{lk}(p)^r p^{-r\langle \vec{a}_l, \vec{\sigma} \rangle} \delta_{\log p^r \vec{a}_l}(dx).$$

この定理の主張は方向を変える (高階) こと及び 1 次元に帰着される同一直線上 (多重) で和を取る際に重みのある点が重複しないようにずらした 1 次元の複合ポアソンゼータ分布を貼り合わせることにより高次元多重型の複合ポアソンゼータ分布が定義できることを示している.

3.3 重要な例

Dirichlet L 関数 $L(s)$ を以下のように定義する.

$$L(s) := \prod_{p:\mathrm{odd}} \left(1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{-s}\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

このとき, $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) := \zeta(s)L(s)$ となることはよく知られている. 定理 3.3 により以下のように分類できる.

(i) 無限分解可能となるもの

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(\sigma)}, \quad \frac{\zeta(s)L(s)}{\zeta(\sigma)L(\sigma)}, \quad \frac{\zeta^2(s)L(s)}{\zeta^2(\sigma)L(\sigma)}, \quad \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)L(s_2)}{\zeta(\sigma_1)\zeta(\sigma_2)L(\sigma_2)}, \quad \frac{\zeta(s_1+s_2)\zeta(s_2)L(s_2)}{\zeta(\sigma_1+\sigma_2)\zeta(\sigma_2)L(\sigma_2)}.$$

(ii) 特性関数ですらないもの

$$\frac{L(s)}{L(\sigma)}, \quad \frac{\zeta(s)L^2(s)}{\zeta(\sigma)L^2(\sigma)}, \quad \frac{\zeta(s_1)L(s_2)}{\zeta(\sigma_1)L(\sigma_2)}, \quad \frac{\zeta(s_1)L(s_1)L(s_2)}{\zeta(\sigma_1)L(\sigma_1)L(\sigma_2)}, \quad \frac{L(s_1+s_2)\zeta(s_2)L(s_2)}{L(\sigma_1+\sigma_2)\zeta(\sigma_2)L(\sigma_2)}.$$

[2] では $\zeta^2(s)L(2s)(\zeta^2(\sigma)L(2\sigma))^{-1}$ は無限分解可能であり, $\zeta(2s)L(s)(\zeta(2\sigma)L(\sigma))^{-1}$ は特性関数ですらないことも証明されている.

4 多次元新谷ゼータ関数と分布

§3 において多次元の無限分解可能なゼータ分布を導入する為, Euler 積表示を用いて議論してきたが, ゼータ分布はその分布の計算については以下に述べるように級数表示が有用である. そこで我々は多次元のゼータ分布を級数の形にも書き直せるように先の Barns 多重ゼータ関数 (1.2) をさらに拡張した多次元新谷ゼータ関数と分布を [3] において導入した. ゼータ分布とは級数, Euler 積表示の双方を行き来しなければ取り扱いが困難である分布であると考えられる.

4.1 多次元新谷ゼータ関数

定義 4.1 (多次元新谷ゼータ関数, $Z_S(\vec{s})$, [3]). $d, m, r \in \mathbb{N}$, $\vec{s} \in \mathbb{C}^d$, $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ とする. このとき $\lambda_{lj}, u_j > 0$, $\vec{c_l} \in \mathbb{R}^d$ $(1 \leq j \leq r,\ 1 \leq l \leq m)$ 及び, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|\theta(n_1, \ldots, n_r)| = O((n_1 + \cdots + n_r)^\varepsilon)$ を充たす複素数値関数 $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ に対し, 多次元新谷ゼータ関数 $Z_S(\vec{s})$ を以下の級数で定義する.

$$Z_S(\vec{s}) := \sum_{n_1, \ldots, n_r = 0}^{\infty} \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{\prod_{l=1}^m (\lambda_{l1}(n_1 + u_1) + \cdots + \lambda_{lr}(n_r + u_r))^{\langle \vec{c_l}, \vec{s} \rangle}}, \quad \min_{1 \leq l \leq m} \Re \langle \vec{c_l}, \vec{s} \rangle > r/m.$$

$\vec{c_l} \in \mathbb{R}^d$ が各軸方向の単位ベクトル, 即ち $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$, である場合は整数論でしばしば扱われる ([10] などを参照). 例として, $d = m = r$, $\lambda_{11} = \cdots = \lambda_{mr} = 1$, $\vec{c_1} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{c_m} = (0, \ldots, 0, 1)$, $\theta(n_1, \ldots, n_m) = 1$ $(n_1 > \cdots > n_r > 0)$ $\theta(n_1, \ldots, n_m) = 0$ (その他) とすると,

$$\begin{aligned} Z_S(\vec{s}) &= \sum_{n_1 > \cdots > n_r > 0}^{\infty} \frac{1}{(n_1 + u_1)^{s_1} (n_2 + u_2)^{s_2} \cdots (n_r + u_r)^{s_r}} \\ &= \sum_{n_1, \ldots, n_r = 1}^{\infty} \frac{1}{(n_1 + \cdots + n_r + u_1)^{s_1} (n_2 + \cdots + n_r + u_2)^{s_2} \cdots (n_r + u_r)^{s_r}}, \end{aligned}$$

が得られ, Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数になる. 次の定理からわかるように, 多次元 Euler 積 $Z_E(\vec{s})$ は多次元新谷ゼータ関数 $Z_S(\vec{s})$ である.

定理 4.2 ([3]). 多次元 *Euler* 積 $Z_E(\vec{s})$ 全体を $\mathcal{Z}_E$, 多次元新谷ゼータ関数 $Z_S(\vec{s})$ 全体を $\mathcal{Z}_S$ と書くことにする. このとき次の包含関係が成り立つ.

$$\mathcal{Z}_E \subset \mathcal{Z}_S.$$

4.2 多次元新谷ゼータ分布

定義 4.3 (多次元新谷ゼータ分布, [3]). 定義 *4.1* の仮定の上に, さらに $\theta(n_1, \ldots, n_r)$ を定符号とし, $\vec{c_l} = (c_{l1}, \ldots, c_{ld}) \in \mathbb{R}^d$ と書くことにする. このとき確率変数 $X_{\vec{\sigma}}$ が以下の分布に従うとき多次元新谷ゼータ確率変数, その分布を多次元新谷ゼータ分布という.

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_{X_{\vec{\sigma}}} \Bigg(\Bigg\{ -\sum_{l=1}^m c_{l1} \log\big(\lambda_{l1}(n_1 + u_1) + \cdots + \lambda_{lr}(n_r + u_r)\big), \\ &\qquad \ldots, -\sum_{l=1}^m c_{ld} \log\big(\lambda_{l1}(n_1 + u_1) + \cdots + \lambda_{lr}(n_r + u_r)\big) \Bigg\} \Bigg) \\ &= \frac{\theta(n_1, \ldots, n_r)}{Z_S(\vec{\sigma})} \prod_{l=1}^m \big(\lambda_{l1}(n_1 + u_1) + \cdots + \lambda_{lr}(n_r + u_r)\big)^{-\langle \vec{c_l}, \vec{\sigma} \rangle}. \end{aligned}$$

多次元新谷ゼータ分布の特性関数は

$$f_{\vec{\sigma}}(\vec{t}) = \frac{Z_S(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})}{Z_S(\vec{\sigma})}, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^d.$$

と書ける．これは先の Euler 積とは違い，級数型のゼータ関数によって多次元の分布を新たに導入していることとなる．関数 $Z_S(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})$ の級数表示から導かれる微分可能性により次の定理を得る．

定理 4.4 ([3])**.** $k \in \mathbb{N}$, $X_{\vec{\sigma}}$ を多次元新谷ゼータ確率変数とする．このとき次が成り立つ．

$$E|X_{\vec{\sigma}}|^{2k} < \infty.$$

Remark 4.5. モーメントの存在の証明には $Z_S(\vec{\sigma}+\mathrm{i}\vec{t})$ の級数表示が本質的な役割を果たすことは上に述べた．しかしながら，ゼータ関数の級数表示では，絶対収束領域に零点を持つかどうか判定するのは困難である．実際，*Hurwitz* ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ は $\alpha = 1, 1/2$ を除き絶対収束領域に零点を持つ．よって *Hurwitz* ゼータ分布が無限分解可能分布であるための必要条件を充たすのは $\alpha = 1, 1/2$ のみであることがわかる．一方 *Euler* 積でゼータ関数を定義すれば，絶対収束領域では零点を持たない．よって無限分解可能分布であるための必要条件を充たすことはわかる．このようにゼータ分布の研究では，級数表示と *Euler* 積表示の双方の視点が必要である．

補足

§4 において級数により導入し得る多次元のゼータ分布は無限分解可能でないものも含まれると述べたが，多次元 Euler 積においても §3 で与えた条件を弱めることによりそのような分布が現れる．つまり多次元 Euler 積を絶対収束域において正規化した関数は無限分解可能 (複合ポアソン) 及び無限分解可能でない特性関数，さらに特性関数にすらならない 3 組に分類することができる．我々はこの事実を踏まえ，多次元多重 Euler 積を 2 次元有限積型に限定してさらに細かい議論を [1] において行っている．興味のある読者はそちらも併せて参照して頂きたい．

参考文献

[1] T. Aoyama and T. Nakamura, Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, *to appear in Math. Nachr.* (2013) http://arxiv.org/abs/1204.4043.

[2] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$, *preprint*, http://arXiv:1204.4041.

[3] T. Aoyama and T. Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on $\mathbb{R}^d$, *to appear in Tokyo J. Math.* (2012) http://arxiv.org/abs/1204.4042.

[4] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Translated from the Russian by Kai Lai Chung)*, Addison-Wesley, 1968.

[5] 河田敬義, 数論 古典数論から類体論へ, 岩波書店 1992.

[6] A. Ya. Khinchine, *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*, Moscow and Leningrad, 1938.

[7] G. D. Lin and C.- Y. Hu, The Riemann zeta distribution, *Bernoulli* **7** (2001) 817–828.

[8] K. Matsumoto, Probabilistic distribution theory for the value of zeta-function (in Japanese), *Sūgaku* **53** (2001), no. 3, 279–296.

[9] 松本耕二, リーマンのゼータ関数 (開かれた数学), 朝倉書店 2005.

[10] K. Matsumoto, Analytic theory of multiple zeta-functions and its applications (in Japanese), *Sūgaku* **59** (2007), no. 1, 24–45.

[11] J. Steuding, *Value Distributions of L-functions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.