数理解析研究所講究録
第 1855 巻 2013 年 201-208

最大値半自己分解可能分布

山梨大学医学工学総合研究部　西郷達彦
Tatsuhiko Saigo
Department of Research
Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering,
University of Yamanashi

確率変数列の最大値の極限定理である極値問題の理論構造は確率変数列の和の極限定理で得られる無限分解可能分布の理論構造と酷似している。まずこの両者を比較し、極値理論について簡単な導入を行い、定義と既知の結果を述べ、極値理論の中の最大値半自己分解可能分布のクラスと表現について分かった結果を提示する。

1 極値分布・無限分解可能分布の比較

無限分解可能分布は確率変数列の和の極限分布からつくられる (Sato(99)) が、この和の代わりに最大値をとった極限分布からつくられるクラスが極値分布 (Resnick(87)) である。無限分解可能分布の理論と極値理論には次の表のように構造がよく似ている。

表 1: 確率変数列の和と最大値の枠組の対応

	和	最大値
無限分解可能	確率変数の和 $\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}_n(z)^n$	確率変数列の最大値 $F(x)=F_n(x)^n$
(半) 自己分解可能	独立確率変数列の和 $\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}(bz)\hat{\rho}(z)$	独立確率変数列の最大値 $F(x)=F(Tx)F_\beta(x)$
(半) 安定	i.i.d. 確率変数列の和 $\hat{\mu}(z)^a=\hat{\mu}(bz)e^{i\langle c,z\rangle}$	i.i.d. 確率変数列の最大値 $F^t(x)=F(T_t(x))$

ここで $\hat{\mu}$ は特性関数、F は分布関数、T_t は $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ の作用素であり、下段はそれぞれの分布の特性関数や分布関数の満たす方程式である。

極限定理として、和の枠組では確率変数列の和 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ をとり、スケールとずらしを取った $a_n^{-1}(S_n-b_n)$ を考える。最大値の枠組では、最大値 $M_n=\max_{1\le i\le n}X_i$ についてスケールとずらしを取った $a_n^{-1}(M_n-b_n)$ を考える。それらはそれぞれの条件下において次のような分布に収束する。

表 2: 条件と極限分布

分布	同分布性	収束	独立性
無限分解可能	×	部分列	×
安定	○	全列	○
半安定	○	部分列	○
自己分解可能	×	全列	○
半自己分解可能	×	部分列	○

ただし○: 通常仮定する、×: 通常仮定しない、である。

ここで一様性の条件、すなわち一部の確率変数が他を圧倒しないことが必要になる。

和の枠組のなかで無限分解可能分布とそのサブクラスの理論には長い歴史がある。Sato(99) の p68 および p116-117 において、引用文献として無限分解可能分布は 1934 年、安定及び半安定分布は 1925 年、自己分解可能分布は 1937,38 年となっている。ところが最大値の枠組で対応するサブクラスははるかに新しい。その歴史は次表のようになる。

表 3: 最大値の枠組みでの極限定理の歴史

年号	著者	極限分布	論文名
1928	Fisher & Tippet	安定	Limiting forms of the frequency dist. largest or smallest member of a sample *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **24.** 180-190
1977	Balkema & Resnick	無限分解可能	Max-infinite divisibility. *J. Appl. Prob.* **14.** 309-319
1986	Gerritse & (Vervaat)	自己分解可能	Supremum selfdecomp. random vectors *Prob. Theory Relat. Fields* **72** 17–33.
1990	Pancheva	自己分解可能	Selfdecomposable Dist. for Maxima of Independent Random Vectors *Prob. Theory Relat. Fields* **84** 267–278
1993	Grinevich	半安定	Dom. of att. for max-semistable laws under linear and power normalizations. *Theory Probab. Appl.* **38** no. 4 640–650

次に極値分布の簡単な導入を行う。

2 極値分布

極値問題は、偶然で変動する毎年の洪水に対応する堤防の高さのように、確率変数列の最大値の漸近挙動を考える。そこで分布関数 F を持つ、独立同分布確率変数列 $\{X_i\}$ の最大値を考える。$M_n = \max_{1\le i\le n} X_i$ とすると、M_n の分布関数は $P(M_n < x) = (F(x))^n$ となる。M_n について極限をとると $\lim_{n\to\infty} M_n = \sup\{x : F(x) < 1\}$ a.s. と一点になってしまうが、元の分布によっては適当なスケーリングにより

$$P((M_n - b_n)/a_n \le x) = (F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{\mathrm{w}} G(x)$$

と極限分布が得られる。この分布はタイプ同値 $V(x) = U(ax + b)$ を除いて 3 種類であることが Fisher, Tippet によって明らかにされた。この理論は von Mises, Gnedenko, de Haan 他によって発展した。この極限分布のクラスは

$$G^t(x) = G(\alpha(t)x + \beta(t))$$

を満たす分布のクラスと一致する。以上は分布 μ に従う i.i.d. 確率変数列の和に関し、$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ として、

$$E\,(i\langle z, (S_n - b_n)/a_n\rangle) = (\widehat{\mu}(a_n z + b_n))^n \to \widehat{\nu}(z)$$

となり、$\widehat{\nu}(z)^t = \widehat{\nu}(a(t)z)e^{i\langle b(t),z\rangle}$ となる安定分布と酷似しており、さきほどの極限分布 G を最大値安定分布と言う。

これに対して前節で述べたようなさまざまな拡張が考えられている。和の枠組で半自己分解可能分布が Maejima-Naito(97) で導入され、Maejima-Sato-Watanabe(99) で拡張された。最大値の枠組で最大値半自己分解可能分布は Satheesh-Sandhya(06) で特別な場合のみ扱われている。そこでここでは Pancheva(90) の最大値自己分解可能分布の拡張として最大値半自己分解可能分布を考える。

3 定義と既知の結果

$\overline{\mathbb{R}}^d (= [-\infty, \infty)^d)$ 値確率ベクトルの列 $\mathbb{X}_k = \left(X_k^{(i)},\ i = 1, \ldots, d\right),\ k = 1, \ldots, n$ に対し、最大値ベクトルを

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{X}_1 \vee \ldots \vee \mathbb{X}_n = \left(\max_{1\le j\le n} X_j^{(i)},\ i = 1, \ldots, d\right)$$

とおき、$\overline{\mathbb{R}}^d$ 上の連続 $\vee$− 自己同型写像 L（$L(x \vee y) = L(x) \vee L(y)$ で逆像あり）の集合を GMA$\left(\overline{\mathbb{R}}^d\right)$ と書く。この後では分布関数 F として、$\mathbb{R}^d$ 上の分布で $\lim F(x_1, \ldots, x_d) \geq 0$ as $x_{i1}, \ldots x_{ik} \to -\infty$, $1 \leq k \leq d$ を満たすものを考え、そのクラスを $\mathcal{F}$ とかく。Pancheva(90) では最大値自己分解可能について $\{x : 0 < F(x) < 1\} = \mathbb{R}^d$ を満たす狭いクラスで考えられていたが、Pancheva(94) でより広い $\mathcal{F}$ に拡張されている。

定義 1 (最大値無限分解可能)　部分列を考えるため改めて $\mathbb{Z}_n = \mathbb{X}_{n1} \vee \ldots \vee \mathbb{X}_{nk(n)}$ とおく。この列について $P(\mathbb{Z}_n < x) \xrightarrow{w} F(x)$ となり、また $F(x) > 0$ なる F の連続点 x で無限小の条件

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} P\left(\mathbb{X}_{nj} > x\right) \to 0, \quad n \to \infty$$

を満たすとする。ただし不等号は d 個の各要素について考える。このとき極限分布を最大値無限分解可能分布と言い、そのクラスを MID と表す。$F \in$ MID ならば、任意の自然数 n について $F_n \in \mathcal{F}$ が存在し $F(x) = F_n(x)^n$ となる。

定義 2 (最大値自己分解可能)　独立な列 $\{\mathbb{X}_k\}$ から作る $\mathbb{Z}_n$ を基準化した分布関数の列 $\{F_n\}$ が非退化の分布関数 F に弱収束する、すなわち次式を満たすものとする。

$$F_n(x) := P(L_n^{-1}\mathbb{Z}_n < x) \xrightarrow{w} F(x), \quad n \to \infty,\ L_n \in \mathrm{GMA}\left(\overline{\mathbb{R}}^d\right)$$

さらに $F(x) > 0$ なる F の連続点 x で無限小の条件 $\max_{1 \leq j \leq n} P\left(L_n^{-1}\mathbb{X}_j > x\right) \to 0$, $n \to \infty$ を満たすとき、極限分布 F を最大値自己分解可能と言い、そのクラスを MSD と書く。$\mathbb{X}_{nj} = L_n^{-1}\mathbb{X}_j$ とすれば、MSD $\subset$ MID がわかる。またこのとき任意の $\beta \in (0, 1]$ に対し $T_\beta(x) = \lim L_{[n\beta]}^{-1} \cdot L_n(x)$ として、$F_\beta \in$ MID が存在し、$F(x) = F(T_\beta x)F_\beta(x)$ と分解できる。また $\mathcal{T} = \left\{T_\beta : \beta \in (0, 1]\right\}$ は半群 $T_\alpha(T_\beta x) = T_{\alpha \cdot \beta}(x),\ \alpha, \beta \in (0, 1]$ となる。

以上の知られている事実を和に関する半自己分解可能と同様の枠組みで捉えなおす。

4　最大値半自己分解可能分布のクラス

定義 3　$H \subset \mathcal{F}$ および $T^n x \to \infty$ となる $T \in$ GMA に対し $F \in \widetilde{K}(H, T)$ であるとは、独立確率ベクトル $\{\mathbb{X}_j\}$ と $L_n \in$ GMA と $k_n \uparrow \infty$ が存在し、次を

満たすことである。

$$Tx = \lim_{n\to\infty} L_{n-1}^{-1}L_n(x), \quad \mathcal{L}(\mathbb{X}_j) \in H, \quad F_{k_n}(x) := P\left(L_n^{-1}\max_{1\le j\le k_n}\mathbb{X}_j < x\right) \xrightarrow{\mathrm{w}} F(x)$$

さらに無限小条件 $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le k_n} P\left(L_n^{-1}\mathbb{X}_j > x\right) \to 0$ を満たすとき $F \in K(H,T)$ という。

定義 4 $H \subset \mathcal{F}$ が T-completely closed とは弱収束と対応する確率変数の最大値について閉じて、$\mathcal{L}(\mathbb{X}) \in H$ と $T(x) = \lim L_{n-1}^{-1}L_n(x)$ となる $L_n \in$ GMA について $\mathcal{L}(L_n^{-1}\mathbb{X}) \in H$ を満たすことを言う。さらに強い意味で T-completely closed とはこれに加え、$H \subset$ MID かつ、$F \in H$ ならば $t > 0$ に対し $F^t \in H$ であることを言う。

命題 1 次の事実が成り立つ。

1. $K(H,T) \subset \widetilde{K}(H,T)$.
2. $K(H,T) \subset$ MID.
3. H が T-completely closed ならば、$K(H,T), \widetilde{K}(H,T) \subset H$.

定理 1

1. H は T-completely closed で $F \in K(H,T)$ ならば $F_T \in H \cap$ MID が存在して次を満たす。
$$F(x) = F(Tx)F_T(x). \tag{1}$$
2. H が強い意味で T-completely closed のとき、$F_T \in H$ が存在して (1) を満たせば、$F \in K(H,T)$ である。
3. H が強い意味で T-completely closed ならば、$K(H,T)$ もそうである。

定理 2 $\widetilde{K}(H,T)$ について次の事実が成り立つ。

1. H が T-completely closed のとき、$F \in \widetilde{K}(H,T)$
$\iff \exists F_T \in H \ s.t.\ F(x) = F(Tx)F_T(x)$.
2. H が T-completely closed ならば、$\widetilde{K}(H,T)$ もそうである。

定義 5 自然数 m に対し、$L_{-1}(T) = \mathcal{F}, L_m(T) = K(L_{m-1},T)$ および $\widetilde{L}_{-1}(T) = \mathcal{F}, \widetilde{L}_m(T) = \widetilde{K}(\widetilde{L}_{m-1},T)$ とおき、さらに $L_\infty(T) = \bigcap_{0\le m<\infty} L_m(T)$ および $\widetilde{L}_\infty(T) = \bigcap_{0\le m<\infty}\widetilde{L}_m(T)$ とおく。

命題 2 次のような入れ子の構造がある。

$$\mathrm{IMD} \supset L_0(T) \supset L_1(T) \supset \ldots \supset L_\infty(T), \quad \widetilde{L}_0(T) \supset \widetilde{L}_1(T) \supset \ldots \supset \widetilde{L}_\infty(T)$$

5 最大値半自己分解可能分布の表現

先の $L_0(T)$ の元を最大値半自己分解可能分布と呼ぶ。
Maejima-Sato-Watanabe(99) において和の枠組みでの半自己分解可能分布の特徴づけがなされている。ここではその最大値版を考える。まず MID の指数測度について見てみよう。もともとは Balkema-Resnick(77) の論文で導入されたものだが、ここでは Resnick(87) の本と Pancheva(90) の論文を参考にする。まず点 $x = (x_1, \dots, x_d)$, に対し、$A_x = [-\infty, x_1] \times \dots \times [-\infty, x_d]$ なる記号を導入する。分布関数が MID の元であることと、$\overline{\mathbb{R}}^d$ 上の測度 μ で点 $q = -\infty$ を除いて σ-有限なものが存在し、$F(x) = \exp(-\mu(A_x^c))$ と表されることは必要十分である。この結果は和の枠組における Lévy-Khintchine 表現に相当する。最大値の枠組ではガウス分布に当たるものがないため、最大値無限可能分布では「ガウス部分」に当たるものを考えなくてよい。

μ と ν_T をそれぞれ (1) 式における分布関数 F と F_T の指数測度とする。この分解はかってなボレル集合 A に対し

$$\mu(A) - \mu(TA) = \nu_T(A) \geq 0,$$

が成り立つことと同値である。

次に $\mathbb{R}^d$ を分割する。

$$S_T = \{x \in \mathbb{R}^d; \max|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\} \leq 1,\ \max|Tx| > 1\}.$$

とおく。(1) の中で、$Tx > x$ であることから、$m \neq n$ のとき $T^m S_T \cap T^n S_T = \emptyset$ が成り立つ。$\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ および $T^{-\infty} S_T = \{-\infty\}$ とおくと、$\overline{\mathbb{R}^d} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^{-k} S_T$ となる。

いま用意した指数測度と空間の分割を用い、最大値無限分解可能に関する表現の結果を述べる。

命題 3 (最大値無限分解可能分布に関する表現)
Iμ が $F \in$ MID の指数測度ならば S_T 上の有限測度 μ_0 および各 $n \in \mathbb{Z}$ についてボレル可測関数 $g_n : S_T \to [0, \infty)$ が存在し、以下を満たす。

(a) $A \in \mathcal{B}(S_T)$ について $\mu_0(A) = 0$ と $\mu(T^n A) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$ は同値である。

(b) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x) > 0,\ \mu_0 - a.e.,$

(c) $\displaystyle\mu(A) = \int_{S_T} \mu_0(dx) \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x) \mathbf{1}_A(T^n x),\ \forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d).$

ここで $\{\mu_0, g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ は次の意味で一意である。すなわち $\{\mu_0, g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ および $\{\tilde{\mu}_0, \tilde{g}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ が上の条件を満たすならば、$0 < h(x) < \infty$ なるボレル可測関数 $h(x)$ が存在し、

$$\tilde{\mu_0}(dx) = h(x)\mu_0(dx),$$

$$g_n(x) = h(x)\tilde{g}_n(x),\ \mu_0 - a.e., \forall n \in \mathbb{Z}$$

となる。

またTx > x を満たす ∨− 自己同型写像 T について逆も成り立つ。

定理 3 (最大値半自己分解可能分布の特徴づけ)
F が最大値半自己分解可能分布ならば上記の表現における関数 $g_n(x)$ は $g_n(x) - g_{n+1}(x) \geq 0$ を満たす。

6 参考文献

- Gerritse, G. (1986) Supremaum self-decomposable random vectors *Probability Theory and Related Fields* **72** 17–33.
- Maejima, M. and Naito, Y.(1998) Semi-selfdecomposable distributions and a new class of limit theorems *Probability. Theory and Related Fields* **112** 13–31.
- Pancheva, E. I.(1990) Selfdecomposable Distributions for Maxima of Independent Random Vectors *Probability. Theory and Related Fields* **84** 267–278
- Pancheva, E. I.(1994) Extreme value theory with non-linear normalization *in Extreme value theory and applications* 305–318, Kluwer Academic publishers.
- Pancheva, E. I.(1995) Max-Semistable Laws *J. of Math. Sciences, Proceeding of the Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Moscow 1993* 2177–2180.
- Resnick, S. I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes* Springer.

- Satheesh, S. and Sandhya, E.(2006) Max-Semi-Selfdecomposable Laws and Related Processes *Statics and Probability Letters* **76** 1435–1440
- Sato, K. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* Cambridge University Press.
- 西郷達彦 (2012) 最大値半自己分解可能分布　無限分解可能仮定に関連する諸問題（１６）　統計数理研究所共同研究リポート 275 24–29