数理解析研究所講究録
第1855巻 2013年 192-200

Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment with holding times

日本大学理工学部　久保田　直樹*
Naoki Kubota
Science and Technology,
Nihon University

Abstract

本稿では，2012年12月18日から21日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容を下に，ランダムな待ち時間を持つランダム環境中のランダムウォークに対する大偏差原理についての概要を述べる．ランダムウォークの初到達時刻のラプラス変換を用いて Lyapunov exponent と呼ばれる量を定義することで大偏差原理を証明し，さらに rate function の比較的明確な表現を得ることを目的とする．最後に，ランダムな待ち時間の分布が rate function にどのように影響しているかを簡単に考察する．

1 Introduction

本稿では，2012年12月18日から21日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容を下に，著者が福島竜輝氏と行った共同研究 [3] である「Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment with holding times」についての概要を述べる．定理などの証明は簡単な概略程度にとどめるため，詳細については上の文献または関連する研究である [1]，[7] や [8] を参照されたい．

ランダムな待ち時間を持つランダム媒質中のランダムウォーク (以下，RWREHT と表す) とは，各格子点上に推移確率と待ち時間をそれぞれランダムに与え，それに従い格子上をランダムウォークする粒子のモデルである．今回，この RWREHT に対し大偏差原理の研究を行った．これは「ランダムウォークの平均から大きく離れた “稀に起こる事

* E-mail address: kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

象" の確率の漸近的な振る舞い」をみるものである．各格子点での待ち時間が常に 1 の場合 (すなわち，後述の単にランダム媒質中のランダムウォーク) の大偏差原理については，近年，積極的に研究されている (例えば，[4, 6, 8])．一方で RWREHT については，Dembo，Gantert，Zeitouni らの結果 [1] のみであった．そこではランダムな推移確率・待ち時間についてエルゴード性という非常に弱い仮定をするのみであるが，その代わりに，状態空間は一次元格子 $\mathbb{Z}$ に限られ，さらにランダムな推移確率と待ち時間それぞれに対しある種の下からの一様評価を必要とする．今回の結果では，エルゴード性より強い独立性を仮定をした場合ではあるが，[1] の結果を多次元へ拡張し，さらにランダムな推移確率と待ち時間に対する一様評価を弱めることに成功した．同時に，第 2 章で述べる Lyapunov exponent と呼ばれる量を用いることで，大偏差原理の評価の指標である rate function について比較的明確な表現を与えることができた．

以下では，RWREHT のより詳しい設定と結果について説明する．まず，ランダム媒質中のランダムウォーク (以下，RWRE と表す) を定義する．$d \geqslant 1$ とする．$\mathcal{P}_1$ を $\mathcal{E}_d := \{e \in \mathbb{Z}^d; |e| = 1\}$ 上の確率測度全体の集合とし，$\mathcal{P}_1$ 上に確率測度 μ を与える．$\Omega := \mathcal{P}_1^{\mathbb{Z}^d}$ とし，Ω に標準的な直積 σ-加法族 $\mathcal{G}$ と直積測度 $\mathbb{P} := \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ を与え確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ を考える．各媒質 $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$ に対し，次の $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖 $((X_n)_{n=0}^\infty, (P_\omega^x)_{x \in \mathbb{Z}^d})$ によって RWRE を定義する: $P_\omega^x(X_0 = x) = 1$，かつ

$$P_\omega^x(X_{n+1} = y + e | X_n = y) = \omega(y, e), \qquad n \in \mathbb{N}_0,\, y \in \mathbb{Z}^d,\, e \in \mathcal{E}_d.$$

次に，ランダムな待ち時間を定義する．$\mathcal{P}_2$ を $(0, \infty)$ 上の確率測度全体の集合とし，$\mathcal{P}_2$ 上の確率測度 ν を与える．このとき，$\Sigma := \mathcal{P}_2^{\mathbb{Z}^d}$ とし，これに標準的な直積 σ-加法族 $\mathcal{S}$ と直積測度 $\mathbf{P} := \nu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ を与え確率空間 $(\Sigma, \mathcal{S}, \mathbf{P})$ を考える．Σ の要素を $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ と表し，$(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{Z}^d} \in (0, \infty)^{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^d}$ を独立な確率変数列で，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\tau_n(x)$ の法則が σ_x であるものとする．この確率変数 $\tau_n(x)$ をランダムな待ち時間と呼び，それらの列 $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{Z}^d}$ に対する法則を P_σ^{HT} で表すことにする．

上で定義した RWRE $(X_n)_{n=0}^\infty$ とランダムな待ち時間 $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{Z}^d}$ に対して，$\mathbb{Z}^d$ 上の連続時間ランダムウォーク $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ を次のように定義し，それを RWREHT と呼ぶ:

$$Z_t := X_n, \qquad \text{if} \sum_{m=0}^{n-1} \tau_m(X_m) \leqslant t < \sum_{m=0}^{n} \tau_m(X_m).$$

ここで，$\sum_{m=0}^{-1} \tau_m(X_m) := 0$．また，$\widetilde{P}_{\omega,\sigma}^x := P_\omega^x \otimes P_\sigma^{\mathrm{HT}}$ とし，これに対応する期待値を $\widetilde{E}_{\omega,\sigma}^x$ で表すことにする．同様に，P_ω^x，P_σ^{HT} に対応する期待値を E_ω^x，E_σ^{HT} とする．さらに，全体を通して次の 2 つの条件を仮定する:

(A1) $\log \min_{|e|=1} \omega(0,e) \in L^d(\mathbb{P})$ かつ $\int_0^\infty s\,\sigma_0(ds) \in L^d(\mathbf{P})$.

(A2) $\mathrm{supp}\Big(\mathrm{law}\big(\sum_{|e|=1} \omega(0,e)e\big)\Big)$ の convex hull に原点 0 が含まれる.

以上の設定の下で，次が今回得られた結果である.

Theorem 1.1. 法則 $\widetilde{P}^0_{\omega,\sigma}(Z_t/t \in \cdot)$ に対して大偏差原理が成立する．すなわち，$\mathbb{R}^d$ 上のすべてのボレル集合 Γ に対して，$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}$-a.s. で

$$-\inf_{x \in \Gamma^o} I(x) \leqslant \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \widetilde{P}^0_{\omega,\sigma}(Z_t/t \in \Gamma) \leqslant -\inf_{x \in \overline{\Gamma}} I(x)$$

が成立する．ここで，rate function I は後述の Lyapunov exponent $\alpha_\lambda(\cdot)$ を用いて次で与えられる:

$$I(x) = \sup_{\lambda \geqslant 0} (\alpha_\lambda(x) - \lambda). \tag{1.1}$$

2 Lyapunov Exponent

ここでは，大偏差原理の rate function の記述に用いた Lyapunov exponent について紹介する．$H^Z(y)$ を RWREHT $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ の点 y への初到達時刻とし，x, $y \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$a_\lambda(x,y,\omega,\sigma) := -\log \widetilde{E}^0_{\omega,\sigma}\Big[\exp\left\{-\lambda H^Z(y)\right\} \mathbb{1}_{\{H^Z(y)<\infty\}}\Big] \tag{2.1}$$

と定義する．これは大雑把に言えば，RWREHT $(Z_t)_{t \geqslant 0}$ が点 x から出発して点 y に到達するまでの traveling cost である．そこで，

$$\theta_{\lambda,\sigma}(z) := -\log \int_0^\infty e^{-\lambda s} \sigma_z(ds), \qquad z \in \mathbb{Z}^d$$

とし，$H^X(y)$ を RWRE $(X_n)_{n=0}^\infty$ の点 y への初到達時刻とする．このとき，(2.1) の右辺の期待値は，フビニの定理とランダムな待ち時間の独立性を用いることにより

$$\begin{aligned}
&E^x_\omega\left[E^{\mathrm{HT}}_\sigma\left[\exp\left\{-\lambda \sum_{k=0}^{H^X(y)-1} \tau_k(X_k)\right\} \mathbb{1}_{\{H^X(y)<\infty\}}\right]\right] \\
&= E^x_\omega\left[\prod_{k=0}^{H^X(y)-1} E^{\mathrm{HT}}_\sigma\big[\exp\{-\lambda \tau_k(X_k)\}\big] \mathbb{1}_{\{H^X(y)<\infty\}}\right] \\
&= E^x_\omega\left[\exp\left\{-\sum_{k=0}^{H^X(y)-1} \theta_{\lambda,\sigma}(X_k)\right\} \mathbb{1}_{\{H^X(y)<\infty\}}\right]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

と変形できる．これにより，$a_\lambda(x,y)$ は $\mathbb{Z}^d$ 上に配置されたランダムポテンシャル $\theta_{\lambda,\sigma}(\cdot)$ の影響を受けながら運動する RWRE $(X_n)_{n=0}^\infty$ の traveling cost と見直すことができる．大偏差原理のために traveling cost を考えるという手法は，最初に Sznitman [5] により連続空間 $\mathbb{R}^d$ 上にポアソン配置された障害物中をブラウン運動する粒子モデルの場合に用いられた．その後，Zerner により $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムポテンシャル中のシンプルランダムウォーク (以下，SRWRP と表す) と RWRE の場合において，それぞれ [7] と [8] の中で同様の手法が用いられた．今回我々が対象としている RWREHT においては，(2.2) の考察により，上で挙げた SRWRP と RWRE の二つを混合したモデルになっていることが分かる．そこで，[7] と [8] の 2 つの文献の手法に従い Lyapunov exponent を構成する．まず，$a_\lambda(x,y)$ の基本的な性質を以下に述べる:

- (Subadditivity) 各 $x,\,y,\,z \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$a_\lambda(x,y) \leqslant a_\lambda(x,z) + a_\lambda(z,y)$.
- (Integrability) 各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$a_\lambda(0,x) \in L^d(\mathbb{P}\otimes\mathbf{P})$.

これにより，$a_\lambda(x,y)$ についてエルゴード定理を用いることで，Lyapunov exponent $\alpha_\lambda(y)$ を構成することができる．

Theorem 2.1. 各 $y \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$\mathbb{P}$-a.s. と $L^1(\mathbb{P}\otimes\mathbf{P})$ の意味で

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}a_\lambda(0,ny) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\otimes\mathbf{E}[a_\lambda(0,ny)]\\ &= \inf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}\otimes\mathbf{E}[a_\lambda(0,ny)] = \alpha_\lambda(y).\end{aligned} \tag{2.3}$$

上の定理から導かれる Lyapunov exponent の性質について簡単にまとめておく:

- $q \in \mathbb{N}$ と $x,\,y \in \mathbb{Z}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}&\alpha_\lambda(qx) = q\alpha_\lambda(x),\\ &\alpha_\lambda(x+y) \leqslant \alpha_\lambda(x) + \alpha_\lambda(y).\end{aligned}$$

- $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して，

$$|x|_1(-\log\mathbf{E}[\exp\{-\theta_{\lambda,\sigma}(0)\}]) \leqslant \alpha_\lambda(x) \leqslant |x|_1\Big(\max_{|e|=1}\mathbb{E}[-\log\omega(0,e)] + \mathbf{E}[\theta_{\lambda,\sigma}(0)]\Big).$$

これらの性質により，$\alpha_\lambda(\cdot)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の関数に拡張することができる．このとき，$\alpha_\lambda(y)$ は $\lambda \geqslant 0$ については単調かつ凹関数で，$y \in \mathbb{R}^d$ については凸関数であることも分かる．

上の Lyapunov exponent の構成では，$ny\,(n\to\infty)$ という固定された方向の漸近挙動をみたが，より一般に $\mathbb{R}^d$ の列をとって漸近挙動を考えてよいということを次の定理は主

張している.

Theorem 2.2. $\mathbb{P}\otimes\mathbf{P}$-a.s. と $L^1(\mathbb{P}\otimes\mathbf{P})$ の意味で次が成立する: すべての $\lambda\geqslant 0$ とすべての $\mathbb{R}^d$ の列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n\to\infty$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_\lambda(0,[x_n])-\alpha_\lambda(x_n)}{|x_n|_1}=0.$$

ここで, 記号 $[y]$ は y に ℓ_1-距離で最も近い格子点を表している.

詳細は述べないが, この定理を保障しているのが maximal lemma と呼ばれる類の補題で,「x, y の距離がある程度小さければ, それに伴い $a_\lambda(x,y)$ も同様に小さい値をとる」ということ主張する. これにより, 列のとり方から生まれる誤差を制御することが可能になり Theorem 2.1 を上の定理の形に拡張することができる.

3 Overview of the Proof of Theorem 1.1

ここでは, Theorem 1.1 を証明する上でのポイントについて簡単に述べる. まず最初に, (1.1) によって定義された関数 I の性質を述べておく. $\mathcal{D}_I$ を I の essential domain とすれば,

- I は $\mathbb{R}^d$ 上で凸関数, かつ $\mathcal{D}_I$ 上で lower semicontinuous. 特に, $\mathcal{D}_I$ の内部で連続である.
- すべての $x\in\mathbb{R}^d$, $|x|_1\leqslant\mathbf{E}[\int_0^\infty s\sigma_0(ds)]^{-1}$ に対して,

$$0\leqslant I(x)\leqslant|x|_1\max_{|e|=1}\mathbb{E}[-\log\omega(0,e)].$$

大偏差原理の上からの評価については, 比較的容易に確かめられ, rate function として関数 I が正しいのではないかということが予想できる. 実際, 集合 Γ としてコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}^d$ をとって考えれば,

$$\begin{aligned}\widetilde{P}^0_{\omega,\sigma}(Z_t\in tK)&\leqslant\exp\{\lambda t\}\widetilde{E}^0_{\omega,\sigma}\left[\exp\{-\lambda t\}\mathbb{1}_{\{\exists x\in K\cap\mathbb{Z}^d,\,H^Z([tx])\leqslant t\}}\right]\\&\leqslant\exp\{\lambda t\}\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^d}\widetilde{E}^0_{\omega,\sigma}\left[\exp\{-\lambda H^Z([tx])\}\mathbb{1}_{\{H^Z([tx])\leqslant t\}}\right]\\&\leqslant\exp\{\lambda t\}|\#K\cap\mathbb{Z}^d|\exp\bigl\{-\inf_{x\in K}a_\lambda(0,[tx])\bigr\}.\end{aligned}$$

ここで, Theorem 2.2 を用いれば, 任意の $\lambda\geqslant 0$ に対し

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\widetilde{P}^0_{\omega,\sigma}(Z_t\in tK)\leqslant\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\lambda t+\log|K\cap\mathbb{Z}^d|-\inf_{x\in K}a_\lambda(0,[tx])\right)$$

$$= \lambda - \inf_{x \in K} \alpha_\lambda(x)$$

が成立し，これにより大偏差原理の上からの評価と rate function が従う．

次に，大偏差原理の下からの評価について述べる．上からの評価は，時刻 t 以下でランダムウォークがある集合に到達するという大雑把な事象の評価で得ることができた．一方で事象 $\{Z_t \in t\Gamma\}$ の確率を下から評価する場合は，時刻 t より早くランダムウォークが集合 $t\Gamma$ に到達した場合に，その集合の中に時刻 t まで一定時間滞在し続けるという描像がある程度の確率で起こり得ることを示す必要がある．このような理由から，下からの評価は上からの評価に比べやや複雑になる．大偏差原理の下からの評価は，$\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}$-a.s. で，すべての $z \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\} \cap \mathcal{D}_I$ と $0 < r \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \widetilde{P}^0_{\omega,\sigma}(Z_t \in tB(z,r)) \geqslant -I(z)$$

が成立することを示せば十分である．Zerner [7, 8] が扱った離散時間のモデルでは，この球の中心 z に一度到達してしまえば，その後この球から脱出するには少なくとも $\lceil tr \rceil$ の時間がかかり，一定時間球の中に滞在するという描像が実現され易い．しかし，我々の RWREHT は連続時間であるために，基になっている離散時間の RWRE がいくら一定時間球の中に滞在していたとしても，配置された待ち時間が小さければいくらでも早く球から脱出してしまう可能性を持っている．これを制御するために仮定 (A2) を用いる．Zerner は [8, Proposition 8] の中で，仮定 (A2) が次の条件と同値であることを示した: すべての $\epsilon > 0$ に対して，ある $R(\epsilon) \geqslant 2$ が存在して

$$\mathbb{P}\big(P^0_\omega(X_{R(\epsilon)} = 0) > e^{-\epsilon R(\epsilon)}\big) > 0.$$

これは，基になっている RWRE がある球の中にトラップされる様子を表している．また，$\theta_{1,\sigma}(0)$ の定義とランダムな待ち時間は $(0,\infty)$-値であることより，明らかに

$$\mathbf{P}(\theta_{1,\sigma}(0) \geqslant \delta) > 0$$

となる $\delta > 0$ をとることができる．これら 2 つを組み合わせることで，事象

$$\Big\{(\omega,\sigma) : P^y_\omega(X_{R(\epsilon)} = y) > e^{-\epsilon R(\epsilon)},\ \min_{x \in B(y,R(\epsilon))} \theta_{1,\sigma}(x) \geqslant \delta\Big\}$$

が起こる確率は真に正であることが導かれる．これは，球 $B(y, R(\epsilon))$ の中に RWRE が一定時間拘束され，さらにこの球の中に配置されている待ち時間がある一定より大きいという描像を表している．そこで，ランダム環境 ω と σ の独立同分布性と Borel–Cantelli の補題を組み合わせることで RWREHT がある程度の時間球 $tB(z,r)$ の中に滞在すると

いう描像が実現される．以上の考察から，下からの評価を得る上で最も危険な部分を回避できるので，上からの評価を得たときと類似の手法と Theorem 2.2 を用いて大偏差原理の下からの評価が得られ，同時に rate function として (1.1) で定義された I が現れることが分かる．

4 Rate Function and the Law of the Holding Times

最後に，ランダムな待ち時間の分布が rate function にどのように影響しているかを簡単に紹介する．ランダムな分布 $\sigma \in \Sigma$ に対して，次の 2 種類の平均化された分布を考える:

$$\overline{\sigma} := \left(\delta_{\int_0^\infty s\,\sigma_z(ds)}\right)_{z\in\mathbb{Z}^d}, \qquad \widetilde{\sigma} := \left(\int_\Sigma \sigma_z(\cdot)\,\mathbf{P}(d\sigma)\right)_{z\in\mathbb{Z}^d}.$$

一つ目の分布 $\overline{\sigma}_z$ は各サイトごとには異なる可能性があるが，この分布に従う待ち時間はどのサイトにおいてもランダムでなく一様に $\int_0^\infty s\,\sigma_z(ds)$ に等しい．一方で，二つ目の分布 $\widetilde{\sigma}_z$ はどのサイトにおいても一様であるが，この分布に従い各サイトに配置される待ち時間はランダムである．これら 2 つの平均化された分布と元の分布 σ における Lyapunov exponent を比較することで，分布が rate function に与える影響をみることにする．これにより，大偏差原理がみている“稀に起こる事象”の実現度合いの違いを考察する．

分布 $\sigma, \overline{\sigma}, \widetilde{\sigma}$ に対する Lyapunov exponents をそれぞれ α_λ^σ, $\alpha_\lambda^{\overline{\sigma}}$, $\alpha_\lambda^{\widetilde{\sigma}}$ と表すことにする．イェンセンの不等式より，

$$\begin{aligned}\theta_{\lambda,\overline{\sigma}}(z) &= -\log\left(\exp\left\{-\lambda\int_0^\infty s\,\sigma_z(ds)\right\}\right)\\ &\geqslant -\log\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,\sigma_z(ds) = \theta_{\lambda,\sigma}(z).\end{aligned}$$

ゆえに，(2.2) と Theorem 2.1 より $\alpha_\lambda^{\overline{\sigma}} \geqslant \alpha_\lambda^\sigma$ が成立するから，$I^{\overline{\sigma}} \geqslant I^\sigma$ である．この事実は，常に一様な待ち時間よりランダムな待ち時間の方がランダムウォークをトラップさせ易く，“稀に起こる事象”を実現し易いことを意味している．また，

$$\mathbf{E}[\exp\{-\theta_{\lambda,\sigma}(0)\}] = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\,\sigma_0(ds)\right] = \exp\{-\theta_{\lambda,\widetilde{\sigma}}(0)\}$$

であるから，再びイェンセンの不等式を用いれば

$$\mathbf{E}[a_\lambda(x,y,\omega,\cdot)] \geqslant -\log\mathbf{E}\big[e^{-a_\lambda(x,y)}\big]$$

$$= -\log E_\omega^x\left[\prod_{n=0}^{H^X(y)-1}\mathbf{E}[\exp\{-\theta_{\lambda,\sigma}(X_n)\}]\mathbb{1}_{\{H^X(y)<\infty\}}\right]$$
$$= a_\lambda(x,y,\omega,\widetilde{\sigma}).$$

したがって，Theorem 2.1 より $\alpha_\lambda^\sigma \geqslant \alpha_\lambda^{\widetilde{\sigma}}$ が成立するから，$I^\sigma \geqslant I^{\widetilde{\sigma}}$ である．我々は rate function を記述する際に traveling cost を用いたが，それはランダムウォークを特定の狙った点に到達させるという条件付きの下で考えられている．しかし，ランダムな待ち時間の分布に空間的一様性がないとランダムウォークを狙った点にまで導くことが難しいため，そこに費やすコストがかさんでしまう．その結果，分布が一様性を持つ場合に比べランダムウォークをトラップさせる方向に労力を使うことができず，rate function の値が大きくなってしまうと考えられる．最後に，平均化された分布 $\widetilde{\sigma}$ に対する $\alpha_\lambda^{\widetilde{\sigma}}$ は，$\mathbf{P}\otimes\widetilde{P}_{\omega,\sigma}^0$ という annealed law の下での Lyapunov exponent とみなすことができるため，Flury [2] により研究された SRWRP の場合の annealed Lyapunov exponent と非常に関連が深いことを注意しておく．

References

[1] Amir Dembo, Nina Gantert, and Ofer Zeitouni. Large deviations for random walk in random environment with holding times. *Ann. Probab.*, Vol. 32, No. 1B, pp. 996–1029, 2004.

[2] Markus Flury. Large deviations and phase transition for random walks in random nonnegative potentials. *Stochastic processes and their applications*, Vol. 117, No. 5, pp. 596–612, 2007.

[3] Ryoki Fukushima and Naoki Kubota. Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment with holding times. *Preprint*, 2012. http://arxiv.org/abs/1202.5643.

[4] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. Process-level quenched large deviations for random walk in random environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, Vol. 47, No. 1, pp. 214–242, 2011.

[5] Alain-Sol Sznitman. Shape theorem, lyapounov exponents, and large deviations for brownian motion in a poissonian potential. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 47, No. 12, pp. 1655–1688, 1994.

[6] S.R.S. Varadhan. Large deviations for random walks in a random environment.

Communications on Pure and Applied mathematics, Vol. 56, No. 8, pp. 1222–1245, 2003.

[7] Martin P. W. Zerner. Directional decay of the Green's function for a random nonnegative potential on $\mathbf{Z}^d$. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 8, No. 1, pp. 246–280, 1998.

[8] Martin P. W. Zerner. Lyapounov exponents and quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment. *Ann. Probab.*, Vol. 26, No. 4, pp. 1446–1476, 1998.