数理解析研究所講究録
第1855巻 2013年 43-46

A variational representation for G-Brownian functionals

東北大学・大学院理学研究科　大須賀 恵実
Emi Osuka
Mathematical Institute,
Tohoku University
(e-mail: sa9m06@math.tohoku.ac.jp)

S. Peng により導入された G-Brown 運動について考察する. G-Brown 運動は, 分散に不確定性をもつ Brown 運動の概念を定式化したものである. 通常の Brown 運動が確率空間上で定義されるのに対し, G-Brown 運動は劣線形期待値空間 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$, すなわち, 劣線形性: 任意の $X,Y\in\mathcal{H}$ と $\lambda\geqslant 0$ に対し,

$$\mathbb{E}[X+Y]\leqslant\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y],\quad \mathbb{E}[\lambda X]=\lambda\mathbb{E}[X]$$

をもつ空間上に定義される. ここに, Ω は与えられた集合, $\mathcal{H}$ は Ω 上で定義された実数値汎関数から成る vector lattice で, 劣線形期待値 $\mathbb{E}$ の定義域である.

Ω を $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^d$-値連続関数 ω で $\omega_0=0$ なるもの全体とする. S. Peng [4, 5] は Wiener と類似の方法によって, Ω の標準過程 B を G-Brown 運動とする劣線形期待値空間として G-期待値空間を構成した. その構成の方法は以下のようである: 有界 Lipschitz 関数による B の柱状汎関数全体を $C_{b,Lip}(\Omega)$ とおく. まず, $[0,1]\times\mathbb{R}^d$ 上の非線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sup_{\gamma\in\Theta}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\gamma\gamma^* D^2u\right]\right\}=0 \tag{1}$$

の粘性解を用いて整合的な有限次元劣線形分布の族を $C_{b,Lip}(\Omega)$ の上に構成し, 非線形 Kolmogolov の定理により $(\Omega, C_{b,Lip}(\Omega))$ 上の一意な劣線形期待値 $\mathbb{E}$ を得る. そして $\mathcal{L}^1_G(\Omega)$ をノルム $\mathbb{E}[|\cdot|]$ の下での $C_{b,Lip}(\Omega)$ の完備化とし, $\mathbb{E}$ を $\mathcal{L}^1_G(\Omega)$ 上の劣線形期待値へと拡張する. これにより得られる三組 $(\Omega,\mathcal{L}^1_G(\Omega),\mathbb{E})$ が G-期待値空間である. ここに, Θ は実 $d\times d$ 行列の与えられた空でない有界閉集合で, G-Brown 運動のもつ分散の不確定性を表すものである. また, γ^* は γ の転置行列, D^2u は u の Hessian を表す.

注意 1. 非線形熱方程式 (1) は

$$\sigma_0:=\inf_{\gamma\in\Theta}\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\|x|=1}} x\cdot\gamma\gamma^* x>0$$

のとき一意な古典解をもつ.

一般に, 劣線形期待値は線形な期待値の族の上限 (upper expectation) として表示できることが知られており, G-期待値 $\mathbb{E}$ に対してはその具体的な表示が与えられている: P を適当な可測空間上に定義された確率測度とし, $W = \{W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)^*; t \geqslant 0\}$ を P の下での標準 Brown 運動, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ を W から生成されるフィルトレーションとする. また, $[0,1]$ 上の Θ-値 $\{\mathcal{F}_t\}$-発展的可測過程全体を $\mathcal{A}_{0,1}^{\Theta}$ とおき, $\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^{\Theta}$ に対し, Ω 上の確率測度 P_θ を次で定める.

$$P_\theta(A) := P\left(\int_0^{\cdot} \theta_s \, dW_s \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

ただし $\mathcal{B}(\Omega)$ は Ω の Borel 集合族を表す. このとき, 任意の $X \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ に対し

$$\mathbb{E}[X] = \sup_{\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^{\Theta}} E_{P_\theta}[X] \tag{2}$$

が成り立つ (Denis-Hu-Peng [1]). upper expectation 表示 (2) に関連し, 容量

$$c(A) := \sup_{\theta \in \mathcal{A}_{0,1}^{\Theta}} P_\theta(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

が定義される. 容量 c は通常の確率解析における確率測度と同様の役割をはたす. 例として, Gao-Jiang [2] は容量の下で G-Brown 運動に対する大偏差原理を導出した.

[4, 5] において S. Peng はさらに, G-Brown 運動の 2 次変分の構成や, G-Brown 運動やその 2 次変分に関する確率積分の構成も行った. これらを用いて, G-Brown 運動の汎関数に対して以下のような変分表現が得られた: $\langle B\rangle = (\langle B^i, B^j\rangle)_{i,j=1}^d$ を G-Brown 運動の 2 次変分とし, $M_G^2(0,1)$ を d-次元過程 $h = (h^1, \dots, h^d)^*$ の族で, 確率積分

$$\int_0^t d\langle B\rangle_s \, h_s := \left(\sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i \, d\langle B^1, B^i\rangle_s, \dots, \sum_{i=1}^d \int_0^t h_s^i \, d\langle B^d, B^i\rangle_s\right)^*,$$

$$\int_0^t h_s \cdot (d\langle B\rangle_s \, h_s) := \sum_{i,j=1}^d \int_0^t h_s^i h_s^j \, d\langle B^i, B^j\rangle_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

が well-defined となるもの全体とする. また, $c(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{B}(\Omega)$ を極と呼び, 主張がある極集合の外側で成り立つことを quasi-sure (q.s.) に成り立つという. 以下, $\sigma_0 > 0$ と仮定する.

定理 2 (O. [3]). 任意の q.s. に有界な $f \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ に対し,

$$\log \mathbb{E}\left[e^{f(B)}\right] = \sup_{h \in M_G^2(0,1)} \mathbb{E}\left[f\left(B + \int_0^{\cdot} d\langle B\rangle_s \, h_s\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 h_s \cdot (d\langle B\rangle_s \, h_s)\right]$$

が成り立つ.

この変分表現のモチベーションの 1 つに, G-Brown 運動に対する大偏差原理がある. G-期待値空間の枠組みにおいては大偏差原理は次のように定式化される: $\mathcal{X}$ をポーランド空間, $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ を $\mathcal{X}$ の Borel 集合族とし, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を $\mathcal{X}$-値確率変数の族とする. $I:\mathcal{X}\to[0,\infty]$ を速度関数, すなわち, 各 $M\geqslant 0$ に対し level set $\{x\in\mathcal{X}: I(x)\leqslant M\}\subset\mathcal{X}$ はコンパクトとする. 任意の $A\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ に対し

$$-\inf_{x\in A^\circ} I(x)\leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log c\left(X^\varepsilon\in A\right)\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log c\left(X^\varepsilon\in A\right)\leqslant -\inf_{x\in\bar{A}} I(x) \quad (3)$$

が成り立つとき, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は速度関数を I として $\mathcal{X}$ 上で大偏差原理をみたすという. ただし, A° と $\bar{A}$ はそれぞれ A の内部と閉包を表す. 通常の確率解析における場合と同様に, G-期待値空間の枠組みにおいても, 大偏差原理と Laplace 原理は同値であることがいえる. すなわち, $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が大偏差原理 (3) をみたすための必要十分条件は, 任意の有界連続関数 $\Phi:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\Phi\left(X^\varepsilon\right)}{\varepsilon}\right)\right]=\sup_{x\in\mathcal{X}}\{\Phi(x)-I(x)\}$$

が成り立つことである. 確率変数の族 $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が G-Brown 運動の汎関数で表されているとき, Laplace 原理の導出に対して定理 2 を応用することができる. 例えば以下の Laplace 原理を導出することができる: $C([0,1];\mathbb{R}^d)$ (resp. $C([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})$) を $[0,1]$ 上の $\mathbb{R}^d$-値 (resp. $\mathbb{R}^{d\times d}$-値) 連続関数で時刻 0 における値が 0 なるもの全体とする. ただし $\mathbb{R}^{d\times d}$ は実 $d\times d$ 行列全体を表す. また,

$$\mathbb{H}:=\left\{x\in C([0,1];\mathbb{R}^d)\ \middle|\ x\text{ は絶対連続, かつ }\int_0^1|\dot{x}(t)|^2\,dt<\infty\right\},$$
$$\mathbb{A}:=\left\{y\in C([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})\ \middle|\ \begin{array}{l} y\text{ は絶対連続,}\\ \text{かつ a.e. } t\in[0,1]\text{ に対し } \dot{y}(t)\in\{\gamma\gamma^*\,|\,\gamma\in\Theta\}\end{array}\right\}$$

とおく. ただし $\dot{x}$, $\dot{y}$ は, それぞれ導関数 dx/dt, dy/dt を表す. 速度関数 $I: C([0,1];\mathbb{R}^d)\to[0,\infty]$ と $J: C([0,1];\mathbb{R}^d)\times C([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})\to[0,\infty]$ を次で定義する.

$$I(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\inf_{\gamma\in\Theta}\left|\gamma^{-1}\dot{x}(t)\right|^2dt, & x\in\mathbb{H},\\ +\infty, & x\notin\mathbb{H},\end{cases}$$

$$J(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\dot{x}(t)\cdot\left(\dot{y}^{-1}(t)\,\dot{x}(t)\right)dt, & (x,y)\in\mathbb{H}\times\mathbb{A},\\ +\infty, & (x,y)\notin\mathbb{H}\times\mathbb{A}.\end{cases}$$

命題 3. $\{\sqrt{\varepsilon}B\}_{\varepsilon>0}$ は, 速度関数を I として $C([0,1];\mathbb{R}^d)$ 上で Laplace 原理をみたす. また, $\{(\sqrt{\varepsilon}B,\langle B\rangle)\}_{\varepsilon>0}$ は速度関数を J として $C([0,1];\mathbb{R}^d)\times C([0,1];\mathbb{R}^{d\times d})$ 上で Laplace 原理をみたす.

命題 3 を通じて $\{\sqrt{\varepsilon}B\}_{\varepsilon>0}$, $\{(\sqrt{\varepsilon}B,\langle B\rangle)\}_{\varepsilon>0}$ に対する大偏差原理が得られる. これらの族に対する大偏差原理は, オリジナルには Gao-Jiang [2] によって離散近似の手法を用いて与えられた. 定理 2 は彼らの結果の別証明を与える.

参考文献

[1] L. Denis, M. Hu and S. Peng: Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths. Potential Anal. 34, 139–161 (2011)

[2] F. Gao and H. Jiang: Large deviations for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion. Stochastic Process. Appl. 120, 2212–2240 (2010)

[3] E. Osuka: A variational representation for G-Brownian functionals. arXiv:1204.4077v3 [math.PR] 2 Dec 2012.

[4] S. Peng: G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. Stoch. Anal. Appl., Abel Symp. 2, 541–567, Springer, Berlin (2007)

[5] S. Peng: Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation. Stochastic Process. Appl. 118, 2223–2253 (2008)